

## 多種気体の B-G-K 模型と 衝撃波の構造

東大 宇宙研 小口 伯郎  
" 阿部 寛治

最近実際の問題を気体論的に取り扱う場合、いわゆる B-G-K 模型<sup>1)</sup>に基づく解析が多い。1 種気体に対するものを 2 種気体の場合に拡張した 模型方程式<sup>2)</sup>は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Df_1}{Dt} &= \nu_{11}(M_1 - f_1) + \nu_{12}(\tilde{M}_1 - f_1) \\ \frac{Df_2}{Dt} &= \nu_{22}(M_2 - f_2) + \nu_{21}(\tilde{M}_2 - f_2) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで  $\nu_{ij}$  は衝突頻度に相当したもので、 $\tilde{M}$  および  $M$  は Maxwellian。特に cross collision に関する Maxwellian  $\tilde{M}_i$  は数密度  $\tilde{n}_i$ 、平均速度  $\tilde{v}_i$ 、温度  $\tilde{T}_i$  が含まれている。模型方程式には  $\nu_{ij}$ 、 $\tilde{n}_i$ 、 $\tilde{v}_i$ 、 $\tilde{T}_i$  の計 14 個の未定量がある。これらの量を単種気体に固有な量によって表すことが必要となる。 $\nu_{ij}$  に関しては (1) と Boltzmann 式との比較によって

$$n_1 v_{12} = n_2 v_{21} \quad (2)$$

の関係が成り立つ。

なお 質量, 運動量, エネルギーの保存からそれぞれ

$$\tilde{n}_1 = n_1, \quad \tilde{n}_2 = n_2 \quad (3)$$

$$m_1 \tilde{u}_1 + m_2 \tilde{u}_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}k(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) + \frac{m_1}{2}\tilde{u}_1^2 + \frac{m_2}{2}\tilde{u}_2^2 \\ = \frac{3}{2}k(T_1 + T_2) + \frac{m_1}{2}u_1^2 + \frac{m_2}{2}u_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

cross collision による運動量, エネルギー交換について Boltzmann 式より<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_2 - u_1) = -\alpha \left( \frac{1}{n_1 m_1} + \frac{1}{n_2 m_2} \right) \left( \frac{m_1 + m_2}{2} \right) (u_2 - u_1) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_2 - T_1) = -\alpha \left[ (T_2 - T_1) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{3k} \left( \frac{m_2}{n_1} - \frac{m_1}{n_2} \right) \right] \quad (7)$$

ここで  $\alpha$  は分子間ポテンシャルによって決められるパラメータで, たとえば剛体球分子に対しては

$$\alpha = \frac{16n_1 n_2}{3(m_1 + m_2)^2} \sqrt{\frac{2k}{\pi} m_1 m_2 (m_2 T_1 + m_1 T_2)} Q_{12} \quad (8)$$

他方, 模型方程式(1)から相当する関係は

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_2 - u_1) = v_{21}(\tilde{u}_2 - u_2) - v_{12}(\tilde{u}_1 - u_1) \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_2 - T_1) = n_1 v_{12} \left[ \frac{\tilde{T}_2}{n_2} - \frac{\tilde{T}_1}{n_1} + \frac{1}{3k} \left\{ \frac{m_2}{n_2} (\tilde{u}_2 - u_2)^2 - \frac{m_1}{n_1} (\tilde{u}_1 - u_1)^2 \right\} \right] \quad (10)$$

結局 (6) と (9), (7) と (10) をそれぞれ等置するとき, 模型方程式は 模型方程式の 運動量, エネルギー交換について Boltzmann 式を正確に反映するようになる。以上 11 の関係から 4)

$$\tilde{u}_1 = u_1 + \delta (u_2 - u_1) \quad (11)$$

$$\tilde{u}_2 = u_2 + \delta \frac{m_1}{m_2} (u_1 - u_2) \quad (12)$$

$$\tilde{T}_1 = T_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \delta \left[ T_2 - T_1 + \frac{(u_2 - u_1)^2}{6k} \{2m_2 - \delta(m_1 + m_2)\} \right] \quad (13)$$

$$\tilde{T}_2 = T_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \delta \left[ T_1 - T_2 + \frac{m_1}{m_2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{6k} \{2m_2 - \delta(m_1 + m_2)\} \right] \quad (14)$$

そこで

$$\delta = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \frac{\alpha}{n_1 \nu_{12}} \quad (15)$$

模型方程式を用いるためには  $\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{22}$  の決定が残されている。

1種気体の B-G-K 方程式に対して Liepmann<sup>5)</sup> による行われ方を応用することにより, 上記の未定パラメータを決めることができる。すなわち 模型方程式に Chapman-Enskog 流<sup>6)</sup> を用いて, その第1近似をとると, 粘性, 熱伝導, 拡散にわたる輸送係数が  $\nu_{ij}$  の関数として求まる。

たとえば

粘性係数

$$\mu_{\text{mixture}} = \left( \frac{n_i}{\nu_{ii} + \nu_{ij}} + \frac{n_j}{\nu_{jj} + \nu_{ji}} \right) kT \quad (16)$$

拡散係数

$$D_{ij} = \frac{n_j (m_i + m_j) kT}{(n_i + n_j) m_i m_j \nu_{ij}} \quad (17)$$

また 1種成分に対しては, たとえば粘性係数は

$$\mu_i = \frac{n_i}{\nu_{ii}} kT \quad (18)$$

のように与えられる。

一方 Boltzmann 式に基づく Chapman-Enskog の理論によつて  $\mu_{mixture}$ ,  $D_{ij}$ ,  $\mu_j$ ,  $\mu_i$  などについては厳密な値が知られている。これらと ( )<sub>C-E</sub> として区別すると

$$\mu_i = (\mu_i)_{C-E}, \quad \mu_j = (\mu_j)_{C-E}$$

より  $\nu_{ii}$ ,  $\nu_{ij}$  が一意的に定められる。さらに  $\nu_{ij}$  に関して

$$\mu_{mixture} = (\mu_{mixture})_{C-E}$$

または

$$D_{ij} = (D_{ij})_{C-E}$$

などとすることによつて  $\nu_{ij}$  を定めることができる。ただし以上のことから明らかなように, 1種, 2種気体いづれの場合についても C-E 値をとるよりに扱われる輸送係数は1つに限られる。このことは B-G-K 模型の基礎である "単一緩和衝突模型" (single relaxation collisional model) の避けられない欠点であると云える。実際には現象に対し支配的な輸送係数を選択されるべきであろう。とくに, たと

えは  $D_{ij}$  として  $\delta$  は

$$(\delta)_D = \frac{m_j}{m_i + m_j} \quad (21)$$

ここで  $(\delta)_D$  は拡散係数が選択された場合の意。同様に

$$(\delta)_\mu = \frac{2}{3} \frac{m_i + m_j}{m_j} \frac{1}{\gamma} \quad (22)$$

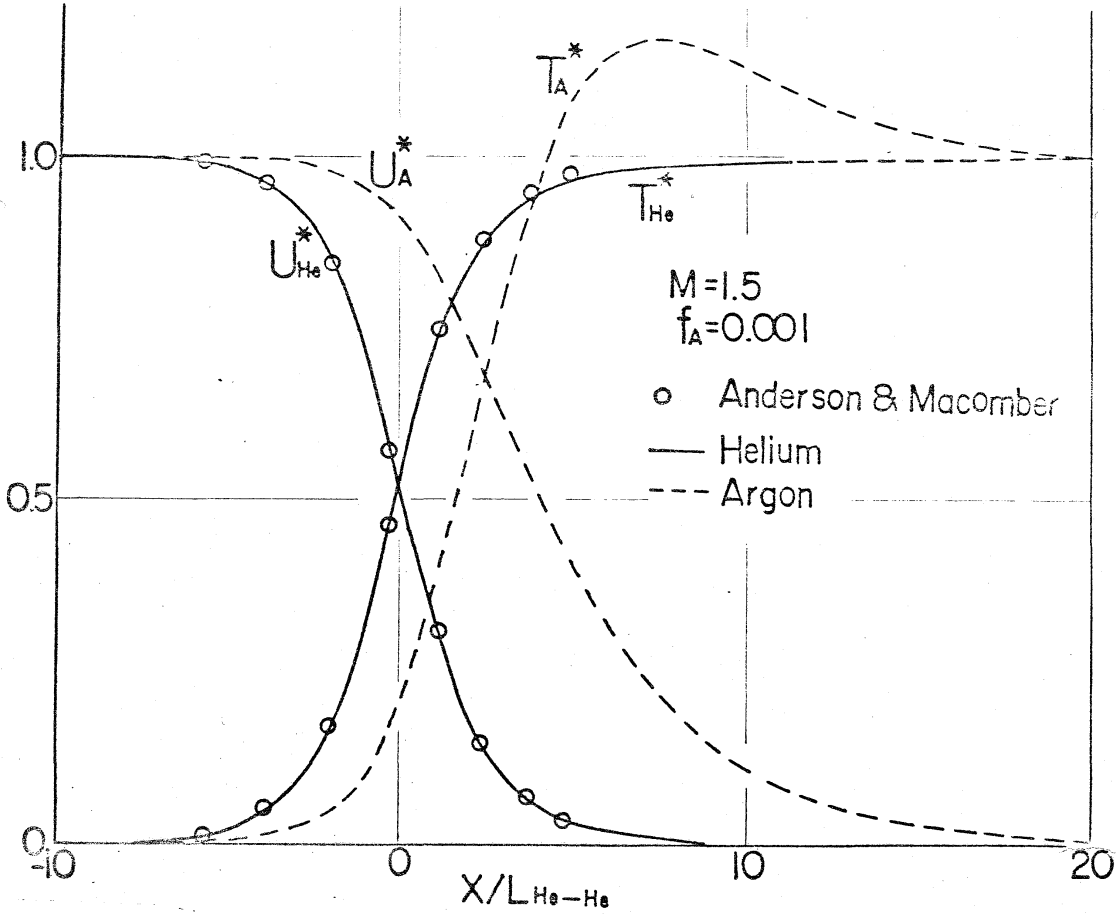
ここで  $\gamma$  は衝突断面を含んで与えられる。

実際の応用として以上の模型方程式を He-Arg 混合気体の中の定常1次元衝撃波の構造の解析に適用、数値計算の結果が以下に示される。(数値計算の具体的手法は詳細に併表される予定)。Fig 1 は Argon 濃度がきわめて小さい場合で、この場合には Argon に対する衝撃波構造は1種気体の場合と同じである。事実 Argon 気体中の衝撃波構造上関する Anderson<sup>6)</sup> の厳密な数値結果と現在の結果とは殆んど完全に一致している。Fig 2 は結果の  $\delta$ -dependence を調べたもので模型方程式は  $\delta$  の値に依存しているか、 $\delta$  の値は輸送係数の選択によって異なった値をとる。そこで (21), (22) に示したように輸送係数として拡散係数、熱伝導係数を選んだときのそれぞれの  $\delta$  に対して得られる結果の比較が示されている。それによる、 $\delta$  に対して結果のあまり影響されないことと確認される。Fig 3 は結果の1例で、

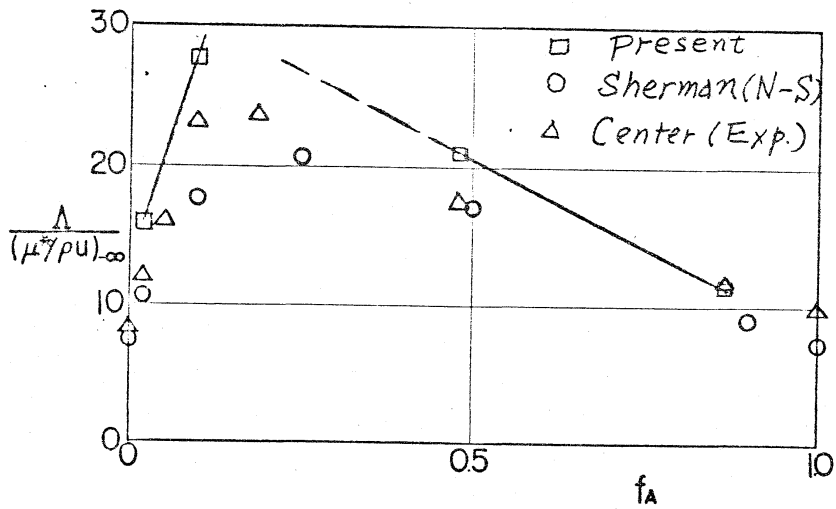
のような結果が Mach 数  $1.05 \sim 3.0$ , モル比  $f_A$   $0 \sim 1.0$  の範囲にわたって求められた。才4図に衝撃波の厚みの理論結果が、最近 (Center<sup>7)</sup>) によって行われた実験結果と比較されている。これによっても B-G-K 模型の多種気体の流れに対する有用性が保證されると言えよう。

## References

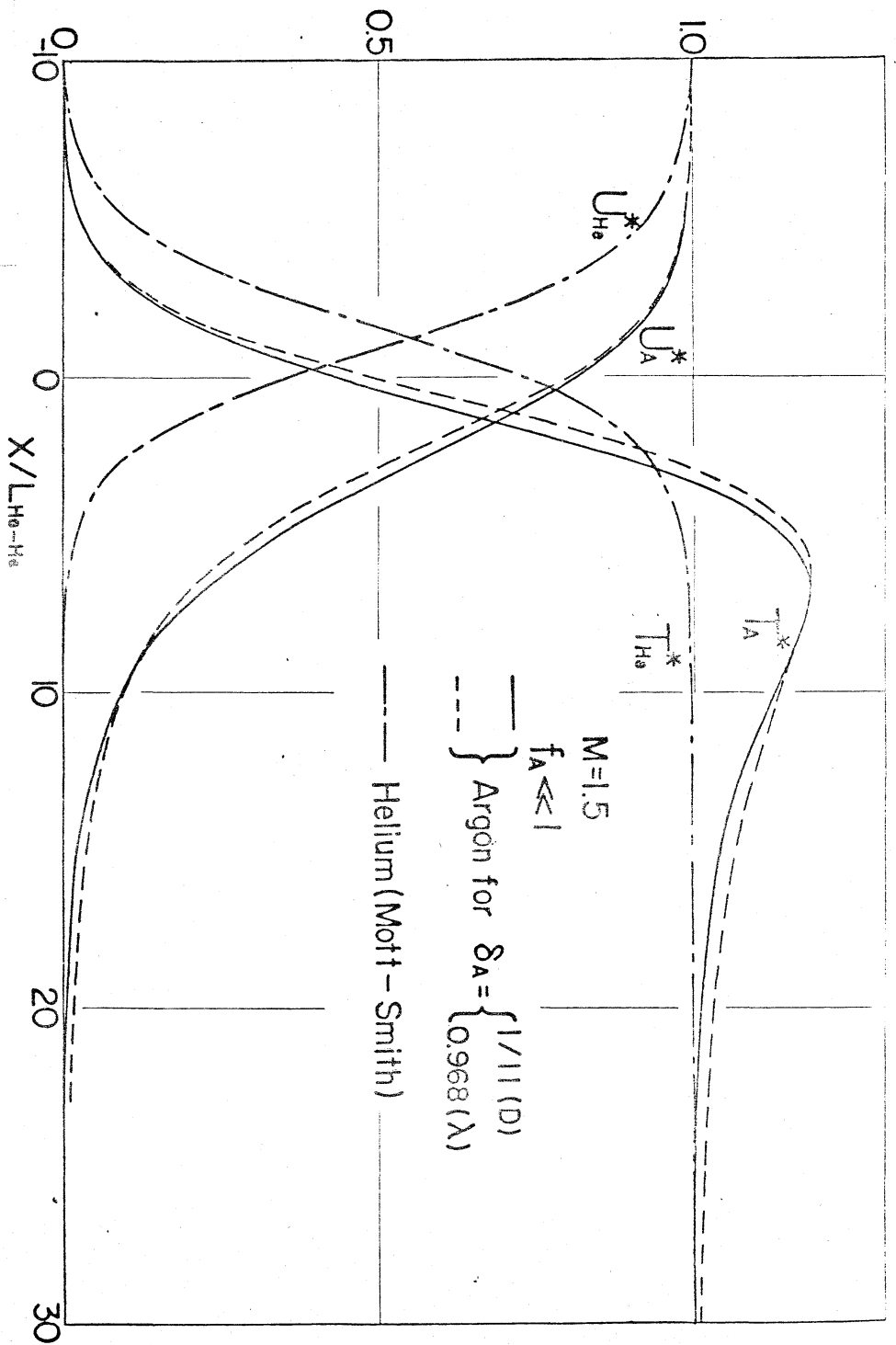
- 1) P.L. Bhatnager, E.P. Gross and M. Krook, Phys. Rev., 94, 511 (1954)
- 2) E.P. Gross and M. Krook, Phys. Rev., 102, 593 (1956).
- 3) T.F. Morse, Phys. Fluids, 6, 1420 (1963).
- 4) H. Oguchi, In "Rarefied Gas Dynamics", edited by C.L. Brundin (Academic Press, New York and London, 1967).
- 5) H.W. Liepmann, R. Narasimha and M.T. Chahine, Phys. Fluids, 5, 1313 (1962).
- 6) D.G. Anderson and H.K. Macomber, In "Rarefied Gas Dynamics", edited by J.H. deLeeuw (Academic Press, New York and London, 1965).
- 7) R.E. Center, Phys. Fluids 10, 1777 (1967).



第1図  $f_A \ll 1$  のときのアルゴン・ヘリウム気体中の衝撃波

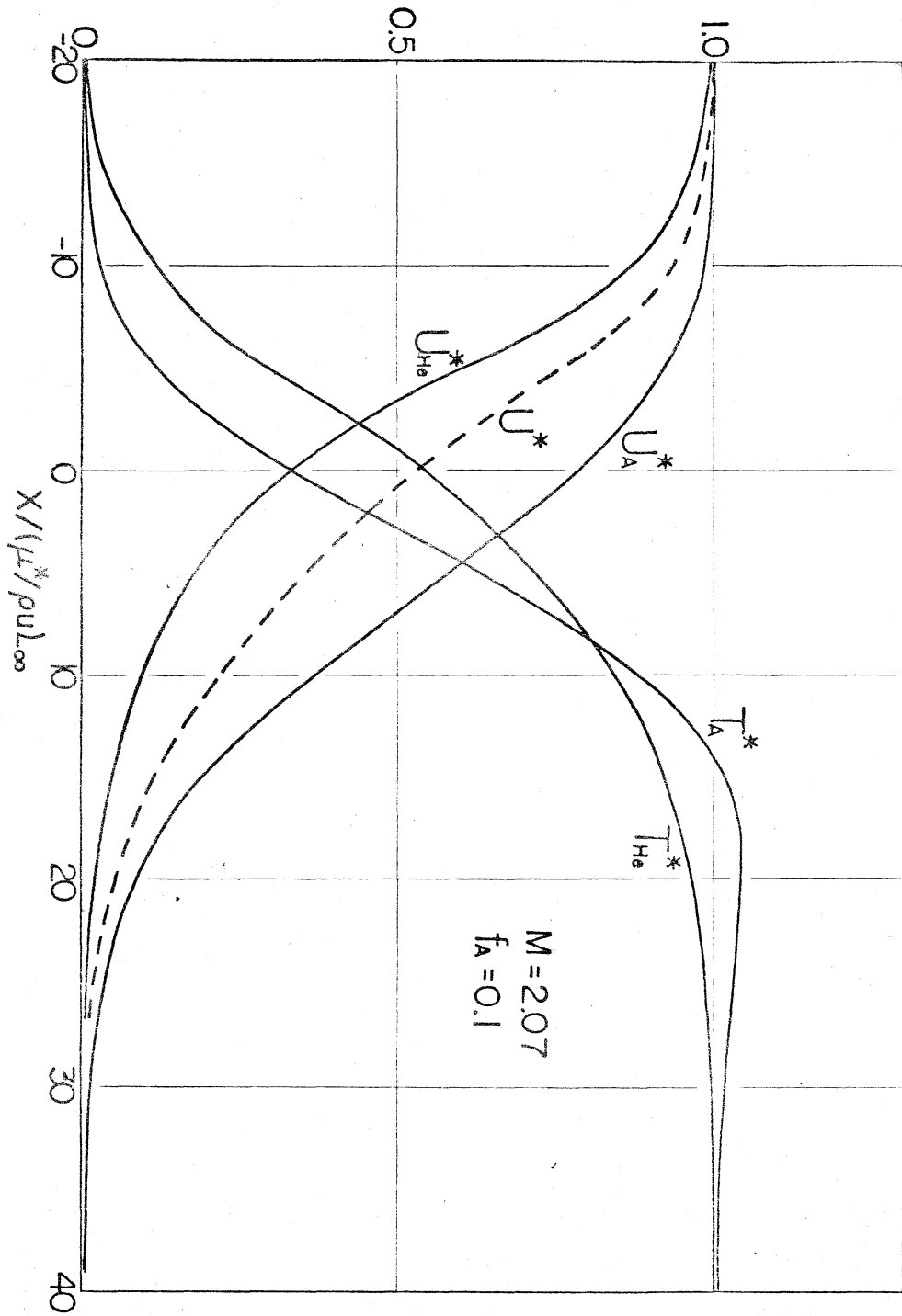


第4図 マル比  $f_A$  に対する衝撃波厚さの変化 ( $M=2.07$ )



斗2圖 ヌルゴソ 衝撃波構造の  $\delta$ -Dependence





オ 3 図 アルゴン・ヘクトムの速度および温度分布