数理解析研究所講究録
第 45 巻 1968 年 89-96



# non-convex orientor field について

神大 理　菊池紀夫

## §1. orientor field

Vector field $f(t, x)$, $(t, x) \in R \times R^n$, が $R^n$ にあたえられているとする。微分不等式

$$\left|\frac{dx}{dt} - f(t, x)\right| \leqq \varepsilon$$

を書きあらためると,

$$\frac{dx}{dt} \in V(f(t, x), \varepsilon)$$

ここに,

$$V(y, \varepsilon) = \{ z \in R^n; |y - z| \leqq \varepsilon \},$$

とする。$V(f(t, x), \varepsilon)$ を $F(t, x)$ と書くと, $F(t, x)$ は $f(t, x)$ を中心とし, 半径 $\varepsilon$ の球であり, それが各点 $(t, x) \in R \times R^n$ にあたえられたことになる。これを一般にして各点 $(t, x) \in R \times R^n$ にたいして $R^n$ の集合 $F(t, x)$ をたいおうさせるとき, $F(t, x)$, $(t, x) \in R \times R^n$, を $R^n$ における

orientor field とよぶ。また、この orientor field $F(t, x)$ にたいおうした次の関係

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$$

のことを contingent equation とよぶ。

この contingent equation は 40 年程前に福原先生によって、はじめて導入されたものである。

## §2. contingent equation と制御問題

制御函数のはいった微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega,$$

ただし、$x, f \in R^n$, $\Omega \subset R^r$, $u = u(t)$ は可測函数、があたえられているとする。ある制御函数 $u = u(t)$ にたいおうして、上の微分方程式をみたす $x = x(t)$ は次の contingent equation をみたす。

$$\frac{dx(t)}{dt} \in f(t, x(t), \Omega) = F(t, x(t))$$

逆に、この contingent equation をみたす $x = x(t)$ にたいして、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega$$

をみたす様に可測函数 $u = u(t)$ を選びだすことができれば（陰函数の定理を用いる）制御系方程式と contingent equation との解の族が一致することになる。

この様に見ると、制御系方程式について調べることを、Contingent equation について調べることに帰着させることができる。

## §3. 記号と定義

$R^n$ の closed sets（compact sets）全体の集合を $Cl(R^n)$（$Comp(R^n)$）であらわす。

$R^n$ の集合 $A$ にたいして、$\mathrm{conv}A$ は $A$ を含む最小の closed-convex set を、$\mathrm{bdry}A$ は $A$ の boundary をあらわす。

$Cl(R^n) \ni A, B$ にたいして、

$$Dist(A, B) = \inf\{\delta > 0 ; V(A,\delta) \supset B, V(B,\delta) \supset A\}$$

ここに、

$$V(A,\delta) = \{x \in R^n ; dist(x, A) \leqq \delta\},$$

$$dist(x, A) = \inf\{|x - y| ; y \in A\},$$

を $A$ と $B$ との間の（Hausdorff の）距離とする。

$$|A| = Dist(A, 0)$$

とおく。ただし、$0$ は $R^n$ の原点である。

定義 1. 位相空間 $T$ で定義された函数 $F(t) \in Cl(R^n)$ が $t_0 \in T$ で連続であるというのは、

任意の $\varepsilon > 0$ にたいして，$t_0$ の近傍 $U$ が存在して

$$\mathrm{Dist}\,(F(t),\ F(t_0)) < \varepsilon$$

が $U$ のすべての $t$ にたいして成りたつことをいう。$T$ のすべての点で $F(t)$ が連続のとき，$F(t)$ は $T$ で連続であるという。

定義 2．可測空間 $E$ で定義された函数 $F(t) \in Cl(R^n)$ が $E$ で可測であるというのは，すべての $C \in Cl(R^n)$ にたいして，集合

$$\{t \in E;\ F(t) \cap C \neq \phi\}$$

が $E$ で可測のことである。

$I$ は区間 $[t_0, t_0+a]$ をあらわす。$a.e.\ I$ は'$I$ 上のほとんどいたる所'を意味する。

仮定 H(F)．$F(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され，値を $Comp(R^n)$ にとる函数で，$t$ に関しては可測，$x$ に関しては連続である。また，$I$ で積分可能な函数 $k(t)$ が存在し，

$$|F(t, x)| \leqq k(t) \qquad a.e.\ I$$

が成りたつ。

定義 3. $F(t) \in Comp(R^n)$ は I で可測とする。I で積分可能な函数 $h(t)$ が存在し,

$$|F(t)| \leqq h(t) \quad a.e. \ I$$

が成りたつ。このとき, $F(t)$ が可測であるので, 可測な函数 $f(t) \in F(t)$ を選びだすことができ, この様な函数 $f$ の全体の集合を $M$ であらわす。I 上の $F(t)$ の積分を次の様に定義する。

$$\int_I F(t)\,dt = \{ \int_I f(t)\,dt ; \ f \in M \}.$$

定義 4. I で定義された絶対連続な函数 $x = x(t)$ が次の関係

$$x(t) \in x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, x(t))\,dt \quad \text{on } I$$

をみたすとき, $x = x(t)$ は初期条件 $x(t_0) = x_0 \in R^n$ をみたす, orientor field $F(t, x)$ の trajectory という。

$T(A, F)$ $(A \subset R^n)$ は初期条件 $x(t_0) \in A$ をみたす, $F(t, x)$ の trajectories 全体の集合をあらわし, $Z(A, F)$ はそれらの graphs $(\subset I \times R^n)$ の和集合をあらわす。 $\tau \in I$ にたいして,

$$S(A, F, \tau) = Z(A, F) \cap \{t = \tau\}$$

とおく。

## §4. trajectory の幾つかの性質

定理1から4までは $H(F)$ を仮定する。

定理 1. すべての $x_0 \in R^n$ にたいして，初期条件 $x(t_0) = x_0$ をみたす $F(t, x)$ の trajectory が $I$ 全体において存在する。

定理 2. $A \in Comp(R^n)$ ならば，$T(A, F)$ は一様収束の位相で compact である。

定理 3 (Kneser). $Comp(R^n) \ni A$ が連結しているならば，すべての $\tau \in I$ にたいして $S(A, F, \tau)$ は連結体である。

定理 4 (Hukuhara). $bdry\, Z(A, F)$ 上のすべての点は $bdry\, Z(A, F)$ の上ばかり通る trajectory $x(t)$ で $bdry\, A$ と結ぶことができる。しかもこの $x(t)$ は その部分のほとんどいたる所で，次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in bdry\, conv\, F(t, x(t)) \quad a.e.$$

をみたす。

定理 5. $F(t, x) \in Cl(R^n)$ は $I \times R^n$ で定義され $t$ に関して可測である。$I$ で積分可能な函数 $k(t)$ が存在して、

$$\mathrm{Dist}(F(t, x), F(t, x')) \leqq k(t)|x - x'|$$

が成りたつとする。このとき、次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \quad a.e. \quad x(t_0) = x_0$$

をみたす絶対連続な函数 $x(t)$ が(局所的に)存在する。

なお、比較定理も成立すると予想されるので、trajectory の存在範囲なども調べられると思われる。

制御系方程式と contingent equation の関係について、詳しくは Hukuhara [2], Wazewski [6] を参照されたい。

Compact-convex set value な函数論は Hukuhara [3], [4]. にある。

# 参考文献

[1] Filippov, A.F., Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, SIAM J. Control, 5 (1967), 609–621.

[2] Hukuhara, M., Équation au contingent et systeme de commande, 数理解析研究所講究録 11 (1966), 1–21.

[3] ——————, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, RIMS-11, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[4] ——————, Integration des application measurables dont la valeur est un compact convexe, RIMS-15, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[5] Kikuchi, N., On non-convex orientor fields satisfying the Carathéodory type conditions.

[6] Wazewski, T., On an optimal control problem, Differential Equations and Their Applications: Proceedings of the Conference held in Prague, September 1962 (1963), 229–243.