数理解析研究所講究録
第 46 巻 1968 年 1-14

Sufficiency and Approximate Sufficiency について

阪大 理 橋本 勲

§1. 序. Le Cam, L. (1964) A.M.S. 35 の紹介である。その中で特に二つの実験の比較と部分実験の十分性について記す. 従来の実験 $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathcal{P}\}$ より弱い構造 $\{\mathfrak{X}, E, \mathcal{P}\}$ で実験を定義する。それによって十分性の定義などにおける測度論的困難さを除去することができる. 実験の比較において Blackwell - Sherman - Stein の定理を含む定理を得ている。部分実験の十分性において Halmos and Savage の十分性の定義と Blackwell の十分性の定義とが同等であることを示している。最後に二・三の注意を述べる.

§2. 実験とそれに関連した空間.

<u>定義</u> 1. 実験 $\alpha = \{\Theta, E, \mathfrak{X}, \{P_\theta\}\}$ とは Θ はある集合, E はある集合 $\mathfrak{X}$ の上の有界実数値関数のある集合そして $\forall\theta\in\Theta$ に E の上で定義された実数値関数 P_θ を対応させる対応: $\theta \to P_\theta$ とから成る. さらに α は次の要請を満足すると仮定する.

(i) E は $f, g \in E$ に対し $f \geq g$ を $\forall x \in \mathfrak{X}$, $f(x) \geq g(x)$ と定義

し，この順序$\geqq$によってベクトル束である。

(ii) $\exists I \in E$; $\forall x \in \mathfrak{X}$, $I(x) = 1$.

(iii) $\forall P_\theta$は正値 normalized 線形汎関数である。(正値とは$\forall f \in E$に対し$f^+ P_\theta \geqq 0$となること。ここで$f^+ = f \vee 0$である．normalized とは$I P_\theta = 1$となること．$f P_\theta$は$f \in E$でのP_θの値を示し，$f P_\theta = \int f(x) P_\theta(dx)$と考えてよい。)

(iv) Eはノルム$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathfrak{X}\}$に関して完備である．

Eをベクトル束とする．Eの区間$[f, g]$は$\{h; h \in E, f \leqq h \leqq g\}$である．Eの上で定義された線形汎関数がEの区間を$\mathbb{R}$の有界集合の中へ写すとき order bounded であるという．$E^* = \{$Eの上の order bounded 線形汎関数$\}$とし，E^*をEの Riez dual という．$E^* \supset \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$である．

ベクトル束EはEのあらゆる有界集合SがEの中に$\sup S$をもつならば order complete であるといわれる．Riez dual E^*は常に order complete である。

$f^+ = f \vee 0$，$f^- = (-f) \vee 0$として$|f| = f^+ + f^-$とする．$f, g \in E$; $|f| \wedge |g| = 0$ならば，fとgとは disjoint であるという。f^+とf^-とは disjoint である。

Eを order complete ベクトル束とする．Eの線形部分空間FはFと違うEの線形部分空間F'が存在し

(i) $\forall f \in F$, $\forall g \in F'$に対し，$|f| \wedge |g| = 0$,

(ii) $E \ni {}^{\forall} v \geqq 0$, $F \ni {}^{\exists} f \geqq 0$, $F' \ni {}^{\exists} g \geqq 0$, $v = f + g$,

となるとき band という. bandsの共通部分はまた band である.

定義 2. 実験αにより定義される空間$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha)$とは$\{P_\theta\}$を含む$E^*$の最小の band である.

E^*の順序は$Q \in E^*$が$Q \geqq 0$であることを${}^{\forall} f \in E$に対し$f^+ Q \geqq 0$と意味することにより定義される. $\mathcal{L} \subset E^*$であるから, $\mathcal{L}$の順序はE^*の順序で入れることができる. この順序で$\mathcal{L}$はベクトル束である.

定義 3. 実験αにより定義される空間$M = M(\alpha)$とは$\mathcal{L}(\alpha)$の Riez dual $\mathcal{L}^*(\alpha)$である.

$f, g \in E$に対し, 積$f \cdot g$を$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in \mathcal{X}$で定義する. この積に関してEは環になる.

$f, g \in E$に対し$f \sim g$を${}^{\forall} \lambda \in \mathcal{L}$, $(f - g)\lambda = 0$と意味する. $\sim$は同値関係になる. $\dot{E} = E/\sim$とする. $\dot{E}$はMに imbed される. 従ってEの積をMに移すことができる. 正確に,

命題 1. $\exists$ one and only one bilinear map $(u, v) \to uv$ of $M \times M$ into M:

(i) $\dot{I} u = u \dot{I} = u$,

(ii) $u^+ v^+ \geqq 0$.

命題 2. $Z = \{ \varphi \in M^* ;\ \varphi > 0,\ (uv)\varphi = (u\varphi)(v\varphi),\ u, v \in M \}$,

$C(Z) \dot{=} \{Z$ 上の連続実数値関数$\}$ とする．そのとき M と $C(Z)$ とは同型である．

§3. ランダム写像とそれらの一般化．

$\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ とは二つの集合とする．E（または F）を $\mathfrak{X}$（または $\mathfrak{Y}$）の上の有界実数値関数の作るベクトル束とする．束とベクトルの演算は各点毎に定義された通常の演算でありそして E は $\mathfrak{X}$ の上の一様収束位相に関して完備である．さらに $\forall x \in \mathfrak{X}$, $I(x)=1$ となる $I \in E$ とする．F も $\mathfrak{Y}$ の上で同じ要請を満足するとする．

F 上の *expectation* とは F の上の正値 normalized 線形汎関数である．expectation P は $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset \mathfrak{Y}$ と対応する実数 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が存在し $\forall f \in F$ に対し $fP = \sum_{j=1}^{n} p_j f(y_j)$ となるとき *有限な台をもつ* expectation といわれる．

定義 4．$\{\mathfrak{X}, E\}$ から $\{\mathfrak{Y}, F\}$ への special ランダム写像 D は次の三つの条件を満足する $\mathfrak{X}$ の上で定義された対応：$x \to D_x$ である．

(i) D_x は F の上の expectation である．

(ii) $\forall f \in F$, $x \to fD_x$ なる fD は E の元である．

(iii) $\forall x \in \mathfrak{X}$, D_x は $\mathfrak{Y}$ 上有限な台をもつ．

$\forall x \in \mathfrak{X}$ に対し D_x の台を含む x と無関係な有限集合が存在するならば special ランダム写像は *restricted* であるという．

$\forall x \in \mathfrak{X}$ に対し D_x の台が $\mathfrak{Y}$ の一点であるとき D をノンランダム写像であるという．

D が special ランダム写像であれば，$(f, \lambda) \in F \times L(\alpha)$ に実数 $fD\lambda \, (= \int f D_x \lambda(dx))$ を対応させる関数は正値 normalized 双線形である．すなわち

(i) $f^+ D \lambda^+ \geqq 0$,

(ii) $J D \lambda^+ = \|\lambda^+\|$，ただし J は $\forall y \in \mathfrak{Y}$, $J(y) = 1$ である．$\|\lambda\| = \sup\{|f\lambda|;\ f \in E,\ |f| \leqq I\}$.

定義 5．α から $\{\mathfrak{Y}, F\}$ へのランダム写像は $F \times L(\alpha)$ の上の正値 normalized 双線形関数である．

各 special ランダム写像はランダム写像を定義する．

空間 $L(\alpha)$ はノルム $\|\lambda\| = \sup\{|f\lambda|;\ f \in E,\ |f| \leqq I\}$ に関してバナッハ空間である．また空間 F もノルム $\|f\| = \sup\{|f(y)|;\ y \in \mathfrak{Y}\}$ に関してバナッハ空間である．他方，$L(\alpha)$ も F も汎弱位相をもつ．従って $F \times L(\alpha)$ において (i) A が F において強閉でありかつ B が $L(\alpha)$ において弱閉である．または (ii) A が F において弱閉でありかつ B が $L(\alpha)$ において強閉であるような矩形 $A \times B$ を考えることができる．

定理 1．$\mathfrak{M} = \{F \times L(\alpha)$ 上の正値 normalized 双線形関数$\}$，$\mathfrak{M}_r = \{\alpha$ から $\{\mathfrak{Y}, F\}$ への restricted special ランダム写像$\}$ とする．$\mathfrak{M}_r$ は $A \times B$ 上の一様収束位相に対し $\mathfrak{M}$ において稠密

である.

§4. approximate な十分性.

$\alpha=\{\Theta, E, \mathfrak{X}, \{P_\theta\}\}$ を実験とする. $\{T, C\}$ を決定の集合 T と T の上の有界実数値関数の作るベクトル束 C から成る組とする. C は constant 関数を含むとする. $\Theta\times T$ の上で定義された実数値損失関数 W は与えられている. $(\theta, t)\in\Theta\times T$ での W の値を W_θ^t で示す. 関数 $t\to W_\theta^t$ を W_θ で示す. $\|W\|=\sup\{|W_\theta^t|; \theta\in\Theta, t\in T\}$ とする. $\forall\theta\in\Theta$ に対し $W_\theta\in C$, かつ $\|W\|<\infty$ と仮定する.

α から $\{T, C\}$ への <u>special decision procedure</u> ρ は定義4の D に対応する. そのとき F の代りに C を考える. リスクは

$$R(\theta,\rho)=\int\left\{\int W_\theta^t \rho_x(dt)\right\}P_\theta(dx)$$

によって与えられる.

α から $\{T, C\}$ への <u>decision procedure</u> は定義5に対応する. すなわち $C\times L(\alpha)$ の上の正値 normalized 双線形関数である. リスクは $R(\theta,\rho)=W_\theta\rho P_\theta$ と書く.

decision procedures の全体を $\mathfrak{S}$ とし, $\mathfrak{S}$ に $C\times L(\alpha)$ の上の各点毎収束位相を入れると $\mathfrak{S}$ は凸コンパクト・ハウスドルフ空間である.

$\mathring{\Theta}$ を Θ 上有限な台をもつ確率測度の全体とする.

<u>定義</u>6. $\alpha=\{\Theta, E, \mathfrak{X}, \{P_\theta\}\}$ と $\beta=\{\Theta, F, \mathfrak{Y}, \{Q_\theta\}\}$ を同じパラメ

ーター空間Θをもつ二つの実験とする．εをΘ上で定義された非負値関数とする．αがβに対してε-*deficient*であるとは任意の*decision space* $\{T, C, W\}$と任意のβから$\{T, C\}$への*special decision procedure* σに対しαから$\{T, C\}$への*decision procedure* ρが存在し任意の$\mu \in \tilde{\Theta}$に対し

$$\int W_\theta \rho P_\theta \mu(d\theta) \leqq \int W_\theta \sigma Q_\theta \mu(d\theta) + \|W\| \int \varepsilon(\theta) \mu(d\theta)$$

（または同値的に，任意の$\theta \in \Theta$に対し

$$W_\theta \rho P_\theta \leqq W_\theta \sigma Q_\theta + \|W\| \varepsilon(\theta).)$$

となることである．

$t \in T$の撰択にはリスクの値にのみ関係しているから*loss*関数W^tの撰択と同等である．仮定からWが有界であるから一般性を失わずに$|W_\theta^t| \leqq 1$としてよい．$\mathcal{S}$をΘから$[-1, +1]$への関数の全体とする．$\mathcal{S}$はΘ上の各点毎収束位相に対しコンパクト・ハウスドルフ空間である．Cを$\mathcal{S}$の上の連続実数値関数の空間とする．Wを$\Theta \times \mathcal{S}$上で定義された関数とする．*decision space* $\{T, C, W\}$を$T \subset \mathcal{S}$とする．

<u>補題</u>．$\mu \in \tilde{\Theta}$とする．σをβから$\{T, C, W\}$へのノンランダム *decision procedure*とする．Tは対応：$y \to \sigma_y$の*strict*な値域とする．そのとき，αから$\{T, C, W\}$への*decision procedure* ρが存在し

$$\int W_\theta \rho P_\theta \mu(d\theta) < \int W_\theta \sigma Q_\theta \mu(d\theta) + \varepsilon$$

となるための必要十分条件はαからβへの specialランダム写像Mが存在し

$$\int (W_\theta \sigma) M P_\theta \mu(d\theta) < \int W_\theta \sigma Q_\theta \mu(d\theta) + \varepsilon$$

となることである．

証明．必要であること．$\mu \in \widehat{\Theta}$ であるから定理1によって special restricted decision procedure ρ が存在し $\int W_\theta \rho P_\theta \mu(d\theta) < \int W_\theta \sigma Q_\theta \mu(d\theta) + \varepsilon$ となる．ρ が restricted であるから，$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\} \subset T$ と $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset E$ が存在し ρ は対応：$x \to \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \delta_{s_j}$，ただし δ_s は $s \in T$ に大きさ1を与える確率測度，である．Tが対応：$y \to \sigma_y$ の strict な値域であるから，$\forall s_j$ に対し $\exists y_j \in \mathcal{Y}$ し $s_j = \sigma_{y_j}$．M を $x \to \sum u_j(x) \delta_{y_j}$ とすれば，M はαからβへの restricted special decision procedure でありかつ $\rho = \sigma M$ である．十分であること．σM がαから$\{T, C\}$への special decision procedure であるから，それをρとすればよい．（終）

<u>定理</u>2．次の(1)～(3)の命題は同等である．

(1) αからβへのランダム写像Mが存在し $\forall \theta \in \Theta$ に対し $\| M P_\theta - Q_\theta \| \leqq \varepsilon(\theta)$ となる．

(2) αはβに対し ε-deficient である．

(3) $L(\alpha)$ から $L(\beta)$ の中への線形写像Mが存在し(i) $\forall \lambda \in L(\alpha)$ に対し $\| M \lambda^+ \| = \| \lambda^+ \|$，(ii) $\forall \theta \in \Theta$ に対し $\| M P_\theta - Q_\theta \| \leqq \varepsilon(\theta)$ となる．

証明．(1) ⇒ (2)：$\|MP_\theta - Q_\theta\| \leqq \varepsilon(\theta)$ から，$\forall \varphi \in F$, $|\varphi| \leqq J$ に対し $|\varphi M P_\theta - \varphi Q_\theta| \leqq \varepsilon(\theta)$．$\varphi = \frac{W_\theta}{\|W\|}\sigma$ かつ $\rho = \sigma M$ とすれば，$W_\theta \rho P_\theta \leqq W_\theta \sigma P_\theta + \|W\| \cdot \varepsilon(\theta)$．(2) ⇒ (1)：$\beta$ から $\{T, C\}$ への *special decision procedure* σ に対し $\sigma' : y \to \sum t_j \sigma_y(t_j)$ とすれば σ' はノンランダムでかつ $W_\theta \in C$ であるから $\forall \theta \in \Theta$ に対し $W_\theta \sigma = W_\theta \sigma'$．補題1から α から β への *special* ランダム写像が存在し $\forall \theta$ に対し $W_\theta \sigma' M P_\theta \leqq W_\theta \sigma' Q_\theta + \|W\| \varepsilon(\theta)$．従って $\forall \theta$ に対し $\frac{W_\theta}{\|W\|}\sigma'(MP_\theta - Q_\theta) \leqq \varepsilon(\theta)$．一般に $\forall \delta \in (0, 1)$, $\forall \theta \in \Theta$, $\exists \varphi_\theta \in F$, $|\varphi_\theta| \leqq J$: $\varphi_\theta(MP_\theta - Q_\theta) \geqq (1-\delta)\|MP_\theta - Q_\theta\|$．故に $(1-\delta)\|MP_\theta - Q_\theta\| \leqq \varepsilon(\theta)$．$\delta$ が任意であるから $\|MP_\theta - Q_\theta\| \leqq \varepsilon(\theta)$．(1) ⇒ (3)：$F^*$ を F の Riesz dual とする．$\mathcal{L}(\beta)$ が F^* の *band* であるから G が存在し $F^* = \mathcal{L}(\beta) + G$ (直和) と書ける．π と $\pi'(= I - \pi)$ をそれぞれ F^* から $\mathcal{L}(\beta)$ と G の上への射影とする．$\|MP_\theta - Q_\theta\| = \|\pi M P_\theta - Q_\theta\| + \|\pi' M P_\theta\| \leqq \varepsilon(\theta)$．$\|\pi' M P_\theta\| = \|MP_\theta\| - \|\pi M P_\theta\| = \|P_\theta\| - \|\pi M P_\theta\|$．$\lambda$ を $\mathcal{L}(\beta) \ni \lambda \geqq 0$, $\|\lambda\| = 1$ とする．$\forall \nu \geqq 0$, $\nu \in \mathcal{L}(\alpha)$ に対し $M_1 \nu = \pi M \nu + (\|\nu\| - \|\pi M \nu\|)\lambda$ とする．M_1 は $\mathcal{L}(\alpha)$ 全体へ拡張されかつ (3) の (i), (ii) をみたす．(3) ⇒ (1) は明らか．(終)

<u>定義</u> 7．α と β とを実験とする．β に対する α の *deficiency* は数

$$\delta(\alpha, \beta) = \inf_M \sup_{\theta \in \Theta} \|MP_\theta - Q_\theta\|,$$

M は $\mathcal{L}(\alpha)$ から $\mathcal{L}(\beta)$ への定理2(3)の条件をみたす写像の全てを

動く，である．定理2から定義6と定義7とは同等である．

$\delta(\alpha,\beta)+\delta(\beta,\alpha)=\Delta(\alpha,\beta)$ は実験の class の上に pseudo metric を定義する．$\Delta(\alpha,\beta)=0$ ならば二つの実験 α と β とは同等であるという．

<u>定理</u>3．次の(1)～(3)は同等である．

(1) $\delta(\alpha,\beta)=0$．

(2) $\mathcal{L}(\alpha)$ から $\mathcal{L}(\beta)$ への正値線形写像 D が存在し $\forall\theta\in\Theta$ に対し $DP_\theta=Q_\theta$ である．

(3) $M(\beta)$ から $M(\alpha)$ への正値線形写像 D が存在し $JD=J$ かつ $\forall u\in M(\beta)$, $\forall\theta\in\Theta$ に対し $(uD)P_\theta=uQ_\theta$ である．

証明．(1)と(2)とが同等であることは定理2から出る．(2)と(3)とが同等であることは(2)の D と(3)の D とが adjoint であることから出る．（終）

§5．十分性．

<u>定義</u>8．$\beta=\{\Theta, F, \mathcal{G}, \{Q_\theta\}\}$，$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\beta)$ そして $M=M(\beta)$ とする．α が β の部分実験であるとは $\alpha=\{H,\{P_\theta;\theta\in\Theta\}\}$，$H$ は M の恒等元 I を含む $w(M,\mathcal{L})$ closed 線形部分束であり，$\{P_\theta\}$ は $\{Q_\theta\}$ の H への制限，である．$w(M,\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ により M に導入された弱位相である．すなわち，$f_0\in M$ の近傍 U は $U_{n,\varepsilon}(f_0)=\{f\in M;|\lambda_i f_0-\lambda_i f|<\varepsilon,\ \lambda_i\in\mathcal{L},\ i=1,2,\cdots,n\}$ である．

<u>命題</u>3．M_1 を M の線形部分空間とする．D を $ID=I$ かつ $\forall\theta$

$\in \textcircled{H}$, $\forall v \in M$ に対し $(vD)Q_\theta = vQ_\theta$ となる M から M_1 の中への正値線形写像とする．そのとき M から M_1 の部分集合 H の上への正値線形射影 Π が存在し

(1) $I\Pi = I$ かつ $\forall \theta \in \textcircled{H}$, $\forall v \in M$ に対し $v\Pi Q_\theta = vQ_\theta$.

(2) $H = M\Pi$ は $w(M, L)$ 位相に対し M における閉集合である.

(3) H は M の真部分束かつ部分環である．さらに $\forall u \in H$, $\forall v \in M$ に対し $(v\Pi)u = (vu)\Pi$.

(4) Π は H により一意的にきまる．

略証．D を仮定された性質をもつ写像とする．D^n と $D_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D^k$ も同じ性質をもつ．列 $\{D_n\}$ は $M \times L$ 上の各点収束の位相に関してコンパクトであり，従って少なくとも一つの cluster 点 Π をもつ．すなわち，$\Pi = \lim_n D_n$．$D\Pi = \Pi D = \Pi$ であり，命題の要請を満足する．(終)

<u>定義</u> 9．β を実験とする．$M(\beta)$ の closed subalgebra H が十分であるとは $M(\beta)$ から H の上への正値線形射影 Π が存在して $I\Pi = I$ かつ $\forall \theta \in \textcircled{H}$, $\forall v \in M(\beta)$ に対し $(v\Pi)Q_\theta = vQ_\theta$ となるときである．

<u>命題</u> 4．$\mathcal{K}$ を $M(\beta)$ の十分な closed subalgebras の全体とする．$\mathcal{K}$ は一つの最小元をもつ．

<u>命題</u> 5．pairwise な十分性と十分性とは同等である．

<u>命題</u> 6．H が十分な環 H_1 を含む閉じた環であれば，H は十

分である．

βを実験とし，Hを$M(\beta)$の最小十分な部分環とする．$\{\Theta, H, \{Q_\theta\}\}$を$\beta$の<u>minimal equivalent form</u>という．実際，$\alpha = \{\Theta, H, \{Q_\theta\}\}$とすれば，$\Delta(\alpha, \beta) = 0$である．

<u>命題</u> 7．$\alpha = \{\Theta, E, \mathfrak{X}, \{P_\theta\}\}$と$\beta = \{\Theta, F, \mathcal{Y}, \{Q_\theta\}\}$を二つの実験とする．$\hat{\alpha} = \{\Theta, G, \{P_\theta\}\}$と$\hat{\beta} = \{\Theta, H, \{Q_\theta\}\}$をそれぞれのminimal equivalent formとする．$\Delta(\alpha, \beta) = 0$である必要十分条件は対応：$P_\theta \longleftrightarrow Q_\theta$が$\mathcal{L}(\hat{\alpha})$の正の元を$\mathcal{L}(\hat{\beta})$の正の元に写す対応が$\mathcal{L}(\hat{\alpha})$から$\mathcal{L}(\hat{\beta})$への同型対応にまで拡張できることである．

§ 6．Halmos and Savage の十分とここで定義された十分との関係．

Zは命題 2 に定義された集合である．$Z \times \Theta$を考える．Z上に$C(Z)$の元を可測にさせる最小のσ-field $\mathfrak{U}$を与える．$\mathfrak{B}$をHにより生成されたσ-fieldとする．$\mathfrak{C}$をΘ上の関数$\theta \to uP_\theta$, $u \in C(Z) = M$が可測となるΘの部分集合から成る最小のσ-fieldとする．

μを$\mathfrak{C}$上の任意のσ-additive確率測度とする．$Q * \mu$を次の式により$\mathfrak{U} \times \mathfrak{C}$上に定義された確率測度とする．

$$g[Q*\mu] = \int [f Q_\theta]\, \gamma(\theta)\, \mu(d\theta),$$

ただし$g = f\gamma$, $f \in M$, γ: 有界$\mathfrak{C}$-可測関数．

$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}\times\mathbb{H}$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}\times\mathbb{H}$, $\mathfrak{C}=Z\times\mathfrak{C}$ という記号を用いる.

$P=Q*\mu$ は $\{Z\times\mathbb{H}, \mathfrak{U}\times\mathfrak{C}\}$ 上の確率変数 z と θ との同時分布である.

H（あるいは $\mathfrak{B}$）を与えたとき確率変数 z が θ と無関係であるとは $A\in\mathfrak{U}$ ならば $P[A|\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}]=P[A|\mathfrak{B}]$ a.e. となることである. 条件付期待値を用いてそれは次のように書ける. $u\in M$ ならば $\int E[u|\mathfrak{B}]f\gamma\, dP=\int uf\gamma\, dP$ for $\forall$ bounded $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$-measurable f と $\forall$ bounded $\mathfrak{B}$-measurable γ.

H が定義 9 の意味で十分とすると, M から H の上への射影 Π が存在し $\forall u\in H$, $\forall v\in M$ に対し $(uv)\Pi=(v\Pi)u$ となる. 従って, $(v\Pi)uQ_\theta=(vu)Q_\theta$. これから任意の $\mathfrak{C}$ 上の確率測度 μ と任意の有界 $\mathfrak{C}$-可測関数 γ に対し $\int(v\Pi)uQ_\theta\gamma(\theta)\mu(d\theta)=\int(vu)Q_\theta\gamma(\theta)\mu(d\theta)$ が出る. P の定義から $u\gamma\, dP=uQ_\theta\gamma\,\mu(d\theta)$ であり, $v\Pi=E[v|\mathfrak{B}]$ とすれば, $\int E[v|\mathfrak{B}]u\gamma\, dP=\int vu\gamma\, dP$ となる. すなわち H を与えたとき z と θ と独立である.

逆に, $u\in M$ ならば $\int E[u|\mathfrak{B}]f\gamma\, dP=\int uf\gamma\, dP$ とする. そのとき, $\Pi: u\longrightarrow E[u|\mathfrak{B}]$ とすれば Π は要求される性質をもつ.

§7. 二三の注意.

1). σ-完備なベクトル束と σ-field との濃度は等しい. 工藤弘吉教授により証明が与えられた.

2) Blackwell, D. (1951): *Comparison of experiments* では有限個の測度を取扱っているが LeCam の方法を用いて拡張($\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$への)は可能である. Morse, N. and Sacksteder, R. (1966): *Statistical isomorphism* はこの事実に近いことを行っているようだ.

3) 2)と LeCam の結果の対応をはっきりさせるためには定義5のランダム写像と $T(E:x)$, $E \in \mathcal{B}$, $x \in \mathfrak{X}$ との対応(表現)を考えることが必要である. それには Farrell, R. H. (1967): *Weak limits of sequences of Bayes procedures in estimation theory* の appendix が参考になる.

4) LeCam の十分はノルム環の部分環として定義されているから, ノルム環の理論を用いてもっとすっきり十分を定義できると思っている.

LeCam の論文を読むのに草間時武先生にお世話になった.