数理解析研究所講究録
第 46 巻 1968 年 55-61

離散分布族の取扱いについて
— Basu-Ghosh 論文をめぐって —

大阪市大　森本治樹

§1. Basu-Ghosh の論文 [1] (以下 B-G [1] と記す) の扱っている問題は、標本空間 $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ の上に想定する分布の族 $\mathcal{P} = \{P\}$ が、離散分布だけから成るという場合である。ここで $\mathfrak{X}$ 自身は離散型空間であると仮定しないので、dominated な分布族に関する結果はそのままでは成立たないが、Burkholder [2] (以下 B [2]) のような、undominated な場合についての一般論の枠内には勿論含まれている。

例えば B-G [1] の Remark 3 は、B [2] の Theorem 4 (($\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ が sufficient σ-field (以下 SSF) で、$\mathcal{N}$ (すべての $\mathcal{P}$-零集合を含む最小の σ-field) が $\mathcal{B}_1$ に含まれるなら、$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ が SSF)) の一部である。何故なら B-G [1] においては $\mathcal{N} = \{\mathfrak{X}, \phi\}$ であるから。

但し Pitcher [3] の枠内には入っていない (P [3] の Th

eorem 参照．B-G [1] の Remark 4 は何かの誤解か？）．
そこで B-G [1] の Theorem 1（因子分解定理）は，dominated な場合から undominated な場合への，ひとつの拡張である．また Theorem 2（最小十分統計量及び σ-field の存在）は undominated な場合への，P [3] とは別の拡張である．但し，これらについては後にもう一度検討することとする．

§2．B-G [1] の Theorem 3 は「すべての SSF が統計量によって induce される」ことを示している．しかしこのことは，一般の σ-field に対しては成立たない．すべての σ-field が inducible であるための必要十分条件は，$\mathfrak{X}$ が離散型であることだからである（Bahadur [4], Theorem 1）．そして inducible でない σ-field は，SSF を含むにもかゝわらず，それ自身は SSF でないということも起りうる．すなわち "Burkholder の pathology" が起りうるのである．このことを見るために次の例を与えよう．

［例］ $\mathfrak{X} = R$，$\mathfrak{A} = \mathfrak{X}$ の部分集合の全体，$\mathcal{P} = \{ P_\theta ; 0 \leq \theta < \infty \}$，$P_\theta(\{\theta\}) = P_\theta(\{-\theta\}) = \frac{1}{2}$ とする．また $\mathcal{B}_0 = \{ A \in \mathfrak{A} \mid A = -A \}$，$\mathcal{B}_1 = \{ A \in \mathfrak{A} \mid {}^\exists B \in \mathcal{B}_0 ; \lambda(B \ominus A) = 0 \}$ とする．但し λ は，R 上の Lebesgue 測度とする．このように定義すれば，問題は B-G [1] の枠内に入

つているばかりでなく，さらに次のようなことが証明できよう．(イ) $\mathcal{B}_0$ は necessary and sufficient（証明は，B-G [1]，Theorem 2 に与えられた n.&s. σ-field の作り方をそのまま用いればよい）．(ロ) $\mathcal{B}_1$ は $\mathcal{A}$ の sub-σ-field で，$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$，$\mathcal{A} \neq \mathcal{B}_1$．(ハ) $\mathcal{B}_1$ は inducible でない（$\mathcal{B}_1$ はすべての1点集合を含むが故に，それが $\mathcal{X}$ 上にもたらす分割は各点分割．従つて Bahadur-Lehmann [5]，Lemma 1 により示される）．(ニ) $\mathcal{B}_1$ は SSF でない（もしも SSF ならば，$\mathcal{P}$ に関し可積分な関数 $f(x)$ に対して $\mathcal{B}_1$ 可測関数 $g(x)$ が存在し，すべての $B \in \mathcal{B}_1$，$P_\theta \in \mathcal{P}$ に対して $\int_B f(x)\, dP_\theta(x) = \int_B g(x)\, dP_\theta(x)$ となる筈である．ところで $f(x) = x$，$B = \{\theta\}$ に取ると左辺 $= \frac{1}{2} f(\theta) = \frac{1}{2}\theta$，右辺 $= \frac{1}{2} g(\theta)$ となる．$B = \{-\theta\}$ に取つても同様なので，併せて $g(x) \equiv x$ となる．しかしこれは明かに $\mathcal{B}_1$ 可測でない）．

§3．それでは，inducible な σ-field とは，どのようなものであろうか？ それは次の定理によつて与えられる．

［定理］$\mathcal{B}$ が inducible であるための必要十分条件は，$\mathcal{B}$ が任意個（可算個を超えることを許す）の和について閉じていることである．

[証明] 統計量 t が $\mathcal{B}$ を induce するとは元来，$\mathcal{B} = \{A\,;\, A \in \mathfrak{A},\ t^{-1}t(A) = A\}$ ということであるが，B-G [1] の設定した条件の下ではすべての集合が $\mathfrak{A}$ に属するので，単に $t^{-1}t(A) = A$ なる A の全体が t によって induce されるということとなる．そこで $\mathcal{B}$ が inducible で，t が $\mathcal{B}$ を induce し，$\mathcal{B} \ni B_\mu$，$\mu \in M$，但し M は任意の index set とすると，$t^{-1}t\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$ が成立つので，$\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \in \mathcal{B}$ でなければならぬ．

逆に $\mathcal{B}$ が inducible であることを示すために，次のような統計量 t を取る．$\mathcal{B}$ が $\mathfrak{X}$ 上にもたらす分割を $\pi(\mathcal{B})$ とする．すなわち $\mathfrak{X} \ni x_1, x_2$ について，${}^\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \ni x_1, x_2$ 又は $B \not\ni x_1, x_2$ が成立つとき $x_1 \sim x_2$ と定義し，こうしてできる同値類の全体を $\pi(\mathcal{B})$，個々の同値類を π_γ ($\gamma \in \Gamma$) とする．そして $x \in \pi_\gamma$ であるとき $t(x) = \pi_\gamma$ とする．この t について，先ず $t^{-1}t(\pi_\gamma) = \pi_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) である．何故なら $x \in t^{-1}t(\pi_\gamma) \Rightarrow t(x) \in t(\pi_\gamma)$ であるが，$t(\pi_\gamma) = \pi_\gamma$ だから $x \in \pi_\gamma$．次に $\mathcal{B}$ から任意の元 B を取ると $B = \sum \pi_\gamma$（同値類 π_γ の，disjoint な和）となっている．故に $t^{-1}t(B) = t^{-1}t(\sum \pi_\gamma) = \sum t^{-1}t(\pi_\gamma) = \sum \pi_\gamma = B$．よって $\{t^{-1}t(A)\} \supset \mathcal{B}$．一方，各 π_γ は $\mathcal{B}$ の元の共通部分として表わされるが故に，假定によって $\mathcal{B}$ に属する．そして $t^{-1}t(A) = A$ ならば，

$A = \sum \pi_\gamma$ の形になっていなければならぬので，$A \in \mathcal{B}$である（証明終）．

§4．それ故，inducible な σ-field とは実は，次の条件をみたす $\mathfrak{X}$ の部分集合族である．（イ）$\mathfrak{X} \in \mathcal{B}$，（ロ）$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$，（ハ）$B_\mu \in \mathcal{B}\ (\mu \in M) \Rightarrow \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \in \mathcal{B}$．このようなものを仮りに"超 σ-field"と呼ぶことにしよう．すると Ω 自身すでに超 σ-field となっていることがわかる．そして Ω 上の確率測度 P とは，次の条件をみたす集合関数であると考えてよい．（ニ）$P(\mathfrak{X}) = 1$，（ホ）$P(A) \geq 0$，（ヘ）$P(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu) = \sum_{\mu \in M} P(A_\mu)$．但し（ヘ）において $\bigcup_{\mu \in M}$ 及び $\sum_{\mu \in M}$ は可算個を超える和になることを許し，右辺については 0 の任意個の和は 0 であると規約しておく．

元来測度論において，完全加法的な集合族に考察を限るのは，超可算和までも集合族の中に取入れると測度がそこまでは拡張できないということが起こるからであろう．しかし P が離散的である限り，そのような心配は要らないわけであって，最初から超 σ-field とその上の超可算加法的測度を用いて理論を構成することは容易である．超 σ-field に関する関数の可測性，積分，Radon-Nikodym 定理などは，超可算加法的測度が実は離散的であるという場合には，$\mathfrak{X}$ 自体が離

散的であるときと同じ位容易に定義し，証明することができる．そして上の定理からわかるように，このような取扱い方を採用するなら，すべての$\mathcal{B}$（超σ-field）はinducibleで，Burkholderのpathologyは消滅するのである．

§5．しかも，このような離散分布族の取扱い方は，何ら珍しいものではない．すでにBlackwell - Girshick［6］は$\mathfrak{X}$を任意の空間，$\mathcal{P}$は離散分布のみから成るものとし，$\mathfrak{X} \supset A$，$\mathcal{P} \ni P$に対して，$P(A) = \sum \{ P(\{x\});\ x \in A,\ P(\{x\}) > 0 \}$と定義している．この$P$が上記の(ニ)，(ホ)，(ヘ)を満足することは明らかである．B-G［6］はσ-fieldも超σ-fieldも表立って与えてはいないが，それは教科書だからでもあるし，第一，すべての集合が可測ならば集合族の概念無しに大概のことは出来るからでもあろう．実際，この問題設定の下でB-G［6］は因子分解定理を証明している．また最小十分統計量の存在を証明する際には，$\mathfrak{X}$が離散的という条件を附しているが，実際上はそれを利用してはいない．これらはB-G［1］のTheorem 1及び2そのものである．

［参考文献］

[1] D. Basu & J. K. Ghosh : Sufficient Statistics in sampling from a finite universe, Proc. 36th Session of Int. Stat. Inst. 1967.

[2] D. L. Burkholder : Sufficiency in the undominated case, Ann. Math. Stat., 32, 1191-1200.

[3] T. S. Pitcher : A more general property than domination for sets of probability measures, Pacific Jour. Math., 15, 597-611

[4] R. R. Bahadur : Statistics and subfields : Ann. Math. Stat., 26, 490-497.

[5] R. R. Bahadur & E. L. Lehmann : Two comments on sufficiency and statistical decision functions : Ann. Math. Stat., 26, 139-141.

[6] D. Blackwell & M. A. Girshick : Theory of games and statistical decisions, John Wiley & Sons, 1954.

追記．§3 の〔定理〕は，一般に $\mathfrak{A}$ が超 σ-field であるという条件のもとで成立つ．しかし，そのような場合は，$\mathfrak{P}$ が離散分布のみから成る場合以外には想像できないように思う．