数理解析研究所講究録
第46巻 1968年 88-107

Invariance Theory と modified minimax Principle について

早大理工学部　草間時武

序　これは Oscar Wesler : Invariance Theory and a modified minimax Principle A.M.S の紹介である.

§1. 統計的問題 $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P, A, \mathcal{A}, L)$ とは

i) Z は実験のすべての可能な結果の全体, $\mathcal{B}$ は Z の部分集合のなす σ-field, Ω はパラメーター空間, P は $\mathcal{B}\times\Omega$ で定義された関数で $\omega\in\Omega$ を fix すると P_ω は $(Z, \mathcal{B})$ 上の prob measure になるとする. $(Z, \mathcal{B}, \Omega, P)$ を標本空間という.

ii) A は行動空間で $\mathcal{A}$ は A の部分集合のなす σ-field である.

iii) 損失関数 L は $\Omega\times A$ で定義された関数で ω を fix すると $L(\omega, a)$ は非負の $\mathcal{A}$-可測関数になるとする.

$(\mathcal{G}, \gamma_Z, \gamma_\Omega, \gamma_A)$ は次の性質をみたすとき統計的問題の

許容群 または統計的問題は群 $\mathcal{G}$ の下で不変という.

i) $\mathcal{G}$ は群である.

ii) γ_Z は $\mathcal{G}$ の Z から Z の上への 1:1, かつ $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$ 可測な変換の全体への同型写像, γ_Ω は $\mathcal{G}$ の Ω から Ω の上への 1:1 変換の全体への同型写像, γ_A は $\mathcal{G}$ の A から A の上への 1:1, かつ $\mathcal{Q}$-$\mathcal{Q}$ 可測な変換の全体への同型写像とする. $g \in \mathcal{G}$ に対して $\gamma_Z(g)$, $\gamma_\Omega(g)$, $\gamma_A(g)$ をそれぞれ g_Z, g_Ω, g_A で表わすことにする.

iii) $g \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $P(g_Z B \mid g_\Omega(\omega)) = P(B \mid \omega)$

iv) $g \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$ に対して $L(g_\Omega(\omega), g_A(a)) = L(\omega, a)$

$\mathcal{Q} \times Z$ 上で定義され $[0, 1]$ を値域とする関数 $\varphi(T \mid z)$ が z を fix すると $(A, \mathcal{Q})$ 上の prob. measure となり T を fix すると z の $\mathcal{B}$-可測関数となるとき確率化された決定関数といわれる. Φ で確率化された決定関数の全体を表わす.

$\omega \in \Omega$ と $\varphi \in \Phi$ に対して危険関数

$$\rho(\omega, \varphi) = \int_Z \int_A L(\omega, a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_\omega(z)$$

が定義される.

$g \in \mathcal{G}$ に対して $\varphi \in \Phi$ から $g_\Phi \varphi \in \Phi$ を次のように作ることができる.

$$(g_\Phi \varphi)(T \mid z) = \varphi(g_A T \mid g_Z(z))$$

このとき $\rho(w,\ g_\Phi \varphi) = \rho(g_\Omega(w),\ \varphi)$ がなりたつ.

これは次の計算でわかる.

$$\rho(w,\ g_\Phi \varphi) = \int_Z \int_A L(w,\ a)\, d g_\Phi \varphi(a \mid z)\, dP_w(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(w,\ a)\, d\varphi(g_A(a) \mid g_Z(z))\, dP_w(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(w,\ g_A^{-1}(a))\, d\varphi(a \mid g_Z(z))\, dP_w(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(w),\ a)\, d\varphi(a \mid g_Z(z))\, dP_w(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(w),\ a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_w g_Z^{-1}(z)$$

$$= \int_Z \int_A L(g_\Omega(w),\ a)\, d\varphi(a \mid z)\, dP_{g_\Omega(w)}(z)$$

$$= \rho(g_\Omega(w),\ \varphi)$$

$\varphi\ (\in \Phi)$ は $g_\Phi \varphi = \varphi$ がすべての $g\ (\in \mathcal{G})$ でなりたつとき不変 (invariant) であるという. すなわち

$$\varphi(g_A T \mid g_Z(z)) = \varphi(T \mid z)$$

がすべての g, z, T でなりたつことである. このときあきらかに $\rho(\omega\ \varphi) = \rho(\omega\ g_\Phi \varphi) = \rho(g_\Omega(\omega), \varphi)$ がなりたつ.

$\omega \in \Omega$ に対して $S_\omega = \{ g_\Omega(\omega) \mid g \in \mathcal{G} \}$ とかく. 任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して $S_\omega = S_{\omega'}$ か $S_\omega \cap S_{\omega'} = \phi$ がなりたつ. 何故ならば $S_\omega \cap S_{\omega'} \neq \phi$ とする. $\omega_1 \in S_\omega \cap S_{\omega'}$ を一つとると $\omega_1 = g_{1\Omega}(\omega) = g_{2\Omega}(\omega')$ となる $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ が存在する. $\tilde{\omega} \in S_\omega$ に対して $\tilde{\omega} = \tilde{g}_\Omega(\omega) = \tilde{g}_\Omega g_{1\Omega}^{-1} g_{2\Omega}(\omega')$ だから $\tilde{\omega} \in S_{\omega'}$. 故に $S_\omega \subset S_{\omega'}$. 同様にして $S_{\omega'} \subset S_\omega$ $\therefore S_\omega = S_{\omega'}$.

このことから Ω はたがいに素な集合の和となる. これを $\Omega = \bigcup_{s \in S} \Omega_s$ とかく. $\omega \in \Omega_s$ とすると $\Omega_s = \{ g(\omega) \mid g \in \mathcal{G} \}$ である. Ω_s を orbit という. φ が不変ならば一つの orbit 上で危険関数は一定である.

§2. $\varphi, \psi \in \Phi$ がすべての $s \in S$ で

$$\sup_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) \leqq \sup_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \psi)$$

となるとき φ は ψ と modified minimax sense において

少なくとも同程度に良い (at least as good as) という。
本文においては「同程度によい」「許容性」「完全類」等の言葉は modified minimax sense において使うことにする。
この節では §1 のおぜん立ての他に P_ω が $(Z, \mathcal{B})$ 上の σ-有限な測度 ν によって dominate されている場合を考える。
Halmos - Savage の定理により ν を P_ω $(\omega \in \Omega)$ と equivalent な測度と假定してさしつかえない。すなわちすべての $\omega \in \Omega$ で $P_\omega(B) = 0$ ならば $\nu(B) = 0$ と假定する。
不変な φ の定義において

$$\varphi(g_A T / g_z(z)) = \varphi(T/z)$$

がすべての z においてなりたたなくても ν に関してほとんどすべての z でなりたてばよい。(危険関数は変らないから)。上の等式がなりたたぬような z の集合が g に依存してもよい φ をほとんど不変な決定関数という。ほとんど不変な決定関数の全体を Φ^*, 不変な決定関数の全体を Φ^{**} で表わす。
$\mathcal{C}$ を $\mathcal{G}$ 上の σ-field とする。$(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ 上の prob measure の net $\{\mu_\alpha\}$ が漸近的右不変であるとは、すべての $C \in \mathcal{C}$ と $g \in \mathcal{G}$ に対して

$$\lim_\alpha \{\mu_\alpha(Cg) - \mu_\alpha(C)\} = 0$$

となることである。

一般化されたHunt-Steinの定理

$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \Omega, P, A, \mathfrak{A}, L)$ を $\mathcal{G}$ によって不変な統計的問題とする.

i) Aは可分, 局所コンパクトな距離空間, $\mathfrak{A}$ は A のコンパクト集合から生成された σ-field, $L(\omega, a)$ は a に関して連続, すべての $\tau < \infty$ で $\{a \mid L(\omega, a) \leqq \tau\}$ はコンパクトとする.

ii) $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ 上に漸近的右不変な prob measure の net $\{\nu_\alpha\}$ が存在する

このとき Φ^* は modified minimax sense において本質的完全である. 更につけくわえて

iii) $\mathcal{G}$ は局所コンパクト, σ-コンパクトな位相群, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{G}$ のコンパクト集合から生成されているとする.

このとき Φ^{**} は modified minimax sense において本質的完全である (この部分の証明は省略する)

証明 $\varphi \in \Phi$ を一つ考える. φ とすくなくとも同程度によい $\varphi^* \in \Phi^*$ をみつければよい. 先ず $\sup_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) < m_s$ $(< \infty)$ と假定してさしつかえない. 何故なら $\sup_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) < \infty$ なる orbit のみに着目してそこで φ の改良 φ^* をつくれば当然 $\sup_{\omega \in \Omega_s} \rho(\omega, \varphi) = \infty$ なる orbit では

$\sup_{\omega \in \Omega_S} \rho(\omega, \varphi^*) \leqq \sup_{\omega \in \Omega_S} \rho(\omega, \varphi)$ がなりたつからである.

数段階にわけて証明しよう

A) $\rho(\omega, g_\Phi \varphi) = \rho(g_\Omega(\omega), \varphi)$ であるから $\sup_{\omega \in \Omega_\Delta} \rho(\omega, g_\Phi \varphi)$

$= \sup_{\omega \in \Omega_\Delta} \rho(\omega, \varphi)$ がなりたつ.

すべての α に対して

$$\varphi_\alpha(T \mid z) = \int_{\mathcal{G}} \varphi(g_A(T) \mid g_Z(z))\, d\mu_\alpha(g)$$

と定義する.

$$\rho(\omega, \varphi_\alpha) = \int_Z \int_A L(\omega, a)\, d\varphi_\alpha(a \mid z)\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_0^\infty \varphi_\alpha(\{a \mid L(\omega, a) > h\} \mid z)\, dh\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_Z \int_0^\infty \int_{\mathcal{G}} \varphi(g_A\{a \mid L(\omega, a) > h\} \mid g_Z(z))\, d\mu_\alpha(g)\, dh\, dP_\omega(z)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_0^\infty \varphi(g_A\{a \mid L(\omega, a) > h\} \mid g_Z(z))\, dh\, dP_\omega(z)\, d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_0^\infty g_\Phi \varphi(\{a \mid L(\omega, a) > h\} \mid z)\, dh\, dP_\omega(z)\, d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \int_Z \int_A L(\omega, a)\, dg_\Phi \varphi(a \mid z)\, dP_\omega(z)\, d\mu_\alpha(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \rho(w, g_{\Phi}\varphi)\, d\mu_{\alpha}(g)$$

$$= \int_{\mathcal{G}} \rho(g_{\Omega}(w), \varphi)\, d\mu_{\alpha}(g)$$

$$\leqq \sup_{g \in \mathcal{G}} \rho(g_{\Omega}(w), \varphi)$$

$$= \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi) \qquad (\Omega_s \text{ は } w \text{ のぞくする orbit})$$

故に $\displaystyle \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi_\alpha) \leqq \sup_{w' \in \Omega_s} \rho(w', \varphi) \qquad s \in S$

φ_α は φ と少くとも同程度に良い.

B) すべての有界な $\mathcal{B}$-可測関数の全体 $L^\infty(\nu)$ は ν-可積分関数全体 $L^1(\nu)$ の共軛空間であり $L^\infty(\nu)$ に次の近傍系による位相（弱＊位相）を導入したとき $L^\infty(\nu)$ の単位球 $\{\varphi \mid \|\varphi\| \leqq 1\}$ はコンパクトとなる。(Alaoglu)

$$V(\varphi \mid f_1, \cdots f_n, \varepsilon) = \left\{ \varphi' \;\middle|\; \left| \int_Z \varphi(x) f_i(x)\, d\nu(x) - \int_Z \varphi'(x) f_i(x)\, d\nu(x) \right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots n \right\}.$$

$\mathcal{K}$ を A のコンパクト集合の全体とする $K \in \mathcal{K}$ に対して $\varphi(K \mid z)$ は z の関数とみて $L^\infty(\nu)$ の単位球 $\mathcal{V}$ にぞくする. $\varphi(K \mid z)$ を $L^\infty(\nu)$ の元とみたとき φ_K とかくことにする. $\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$ で φ を代表させる, すなわち φ_K

をφの座標とみると$\{\varphi_K \mid K \in \mathcal{K}\}$はコンパクト集合$\mathcal{V}$の$\mathcal{K}$の濃度だけの直積（チコノフの定理によりコンパクト）の中の元と考えることができる．故に$\{\varphi_\alpha\}$をコンパクト集合におけるnetと考えてその集積点$\bar{\varphi}$が存在する．$\bar{\varphi}$は$K \in \mathcal{K}$に対して$L^\infty(\nu)$（正確には$\mathcal{V}$）を定める．

$\bar{\varphi}$が$\{\varphi_\alpha\}$の集積点であるから有限個の$f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^1(\nu)$と有限個の$K_1, \cdots, K_m \in \mathcal{K}$と$\varepsilon > 0$に対して$\alpha_0$が存在して$\alpha > \alpha_0$ならば

$$\left| \int_Z \varphi_\alpha(K_i \mid z) f_j(z) d\nu(z) - \int_Z \bar{\varphi}(K_i \mid z) f_j(z) d\nu(z) \right| < \varepsilon$$

$i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

がなりたつ．

$\bar{\varphi}$は決定関数とはかぎらない。

$\bar{\varphi}$の性質として

1) $K_1 \subset K_2$ ならば $\bar{\varphi}_{K_1} \leqq \bar{\varphi}_{K_2}$ (a.e. ν)

2) $K_1 \cap K_2 = \phi$ ならば $\bar{\varphi}_{K_1 \cup K_2} = \bar{\varphi}_{K_1} + \bar{\varphi}_{K_2}$ (a.e. ν)

3) $\bar{\varphi}_K \leqq 1$

がなりたつ．この三つの性質は$\varphi \in \Phi$ならば勿論なりたつ．

今2)を証明しておく．

f を $\in L^1(\nu)$ かつ $f(z)>0$ ($\forall z\in Z$) なる関数とする．ν が σ-有限な測度だからかかる f は存在する．

$$g(z)=f(z)[\bar{\varphi}(K_1\cup K_2\mid z)-\bar{\varphi}(K_1\mid z)-\bar{\varphi}(K_2\mid z)]$$

とすると $f\in L^1(\nu)$，[　　] は有界だから g．$\in L^1(\nu)$ である．

$$\int_Z g(z)[\bar{\varphi}(K_1\cup K_2\mid z)-\bar{\varphi}(K_1\mid z)-\bar{\varphi}(K_2\mid z)]\,d\nu(z)$$
$$-\int_Z g(z)[\varphi_\alpha(K_1\cup K_2\mid z)-\varphi_\alpha(K_1\mid z)-\varphi_\alpha(K_2\mid z)]\,d\nu(z)$$
$$\longrightarrow 0$$

ところが $\varphi_\alpha(K_1\cup K_2\mid z)-\varphi_\alpha(K_1\mid z)-\varphi_\alpha(K_2\mid z)=0$ だから

$$\int_Z g(z)[\bar{\varphi}(K_1\cup K_2\mid z)-\bar{\varphi}(K_1\mid z)-\bar{\varphi}(K_2\mid z)]\,d\nu(z)$$
$$=0$$

$g(z)$ を定義にもとづいて書きなおして

$$\int_Z f(z)[\bar{\varphi}(K_1\cup K_2\mid z)-\bar{\varphi}(K_1\mid z)-\bar{\varphi}(K_2\mid z)]^2\,d\nu(z)=0$$

$f(z)>0$ だから

$$\bar{\varphi}(K_1\cup K_2\mid z)=\bar{\varphi}(K_1\mid z)+\bar{\varphi}(K_2\mid z)\qquad(a.e.\ \nu)$$

$\bar{\varphi}$ から $\varphi^*\in\Phi$ を作ることを考える．

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{K}$ の可算部分集合で

i) $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{R}$ なら $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{R}$

ii) 任意の開集合 U に対して可算個の $K_1, K_2, \cdots \in \mathcal{R}$ が存在して $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^{\circ}$ かつ $K_i \subset U$ $(i=1,2,\cdots)$.

かかる $\mathcal{R}$ の存在は次のようにして証明できる.

Aは可分だから稠密な可算集合 $\{a_i \mid i=1,2,\cdots\}$ が存在する. a_i の ε 近傍 $V_\varepsilon(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_\varepsilon(a_i)}$ がコンパクトなものの全体を $E_1, E_2, \cdots$ とし　　. $\overline{E}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ を $\cap$ や $\cup$ や (　　) で有限回の操作で結びつけたものの全体を $\mathcal{R}$ とすれば $\mathcal{R}$ はあきらかに i) をみたしている. O を任意の開集合とする. O にふくまれる a_i に対して a_i の ε 近傍 $V_\varepsilon(a_i)$ で ε が有理数, $\overline{V_\varepsilon(a_i)}$ がコンパクト, かつ $\overline{V_\varepsilon(a_i)} \subset O$ となるものの全体を $S_1, S_2, \cdots$ とすると $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である. その理由は q を O の任意の点とする. $\overline{V_\varepsilon(q)}$ はコンパクト, $\overline{V_\varepsilon(q)} \subset O$ なる ε をとり $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ なる有理数と $V_r(q) \ni a_j$ なる a_j に対して $V_r(a_j)$ を考えると $\overline{V_r(a_j)} \subset \overline{V_\varepsilon(q)} \subset O$, $q \in V_r(a_j)$ である. $V_r(a_j)$ は $S_1, S_2, \cdots$ の中にぞくするから $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ である. $\overline{V_r(a_j)} \in \mathcal{R}$ であるから ii) が証明された.

Aの任意の開集合Uに対して

$$\varphi^*(U \mid z) = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathcal{R}}} \overline{\varphi}(R \mid z)$$

と定義する. $\mathcal{R}$ は可算集合だから $\varphi^*(U|z)$ は $\mathcal{B}$-可測である. 任意の集合 W に対しては

$$\varphi^*(W|z) = \inf_{\substack{U\supset W \\ U=\text{open}}} \varphi^*(U|z)$$

と定義する. φ^* を $\mathfrak{A}$ に限定すると z を fix したとき $\varphi^*(\cdot|z)$ は $\mathfrak{A}$ 上の **測度** となり, z に関して $\mathcal{B}$-可測になる. コンパクト集合 K に対しては $\varphi_K^* \geqq \overline{\varphi}_K$ $[\nu]$ であることを示そう. U を $K\subset U$ なる任意の開集合とする. U は $U=\bigcup_{R_i\subset U} R_i^\circ$ と書ける. $K\subset\bigcup_{R_i\subset U} R_i^\circ$ であるから $K\subset\bigcup_{i=1}^{n} R_i^\circ$ となる n が存在する. ここに $R_i\in\mathcal{R}$ である. したがって $K\subset\bigcup_{i=1}^{n} R_i = R\in\mathcal{R}$ がなりたち $\overline{\varphi}_K \leqq \overline{\varphi}_R$ $[\nu]$ がなりたつ. 一方 $R\subset U$ であるから $\varphi_U^* = \sup_{\substack{R'\subset U \\ R'\in\mathcal{R}}} \overline{\varphi}_{R'} \geqq \overline{\varphi}_R \geqq \overline{\varphi}_K$ $[\nu]$. A が距離空間であるから, $K=\bigcap_j U_j\downarrow$ となる開集合列 U_j が存在する. 故に $\varphi_K^* = \lim_{j\to\infty} \varphi_{U_j}^*$.

したがって前の不等式もつかって

$$\varphi_K^* = \lim_{j\to\infty} \varphi_{U_j}^* \geqq \overline{\varphi}_K \quad [\nu] \quad \text{がなりたつ}$$

次に $\varphi^*(A|z)=1$ $[\nu]$ であることを証明しよう. $\omega\in\Omega_0$ とし $K=\{a\,;\,L(\omega,a)\leqq m_5/\varepsilon\}$ とすると

$$\int_Z \varphi_\alpha(K|z)\,dP_\omega(z) \geqq 1-\varepsilon$$

がなりたつ　その理由は $\rho(\omega, \varphi_\alpha) \leqq m_s$ だから

$$\int_Z \int_{K^c} L(\omega, a)\, d\varphi_\alpha(a \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq m_s$$

故に

$$\frac{m_s}{\varepsilon} \int_Z \varphi_\alpha(K^c \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq m_s$$

故に

$$\int_Z \varphi_\alpha(K^c \mid z)\, dP_\omega(z) \leqq \varepsilon$$

一方

$$\int_Z \varphi_\alpha(A \mid z)\, dP_\omega(z) = 1$$

故に

$$\int_Z \varphi_\alpha(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

$dP_\omega(z) = p(z \mid \omega)\, d\nu(z)$,　$P(\cdot \mid \omega) \in \mathcal{L}^1(\nu)$　であることと

$\bar{\varphi}$ は φ_α の極限点であることから

$$\int_Z \bar{\varphi}(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

K はコンパクトであるから　$\varphi^*_K \geqq \bar{\varphi}_K$　$[\nu]$　したがって

$$\int_Z \varphi^*(K \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1 - \varepsilon$$

したがって

$$\int_Z \varphi^*(A \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1-\varepsilon$$

εは任意だから

$$\int_Z \varphi^*(A \mid z)\, dP_\omega(z) \geqq 1$$

一方 Aは閉集合だから $\varphi^*(A \mid z) = \sup_{R \in \mathcal{R}} \bar{\varphi}(R \mid z)$
$\leqq 1$. 故に

$$\varphi^*(A \mid z) = 1 \quad [P_\omega]$$

νは$\{P_\omega : \omega \in \Omega\}$とequivalentであるから

$$\varphi^*(A \mid z) = 1 \quad [\nu]$$

C) B)でφ^*が決定関数であることがわかった. 次にφ^*がφとmodified minimax senseにおいて$\underbrace{\varphi\text{と同程度}}_{\text{少なくとも}}$によいことを証明しよう.

$$\rho(\omega, \varphi^*) = \int_0^\infty \int_Z \varphi^*(\{a : L(\omega, a) > h\} \mid z)\, p(z \mid \omega)\, d\nu(z)\, dh$$

$$= \int_0^\infty \int_Z [1-\varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z)]\, p(z \mid \omega)\, d\nu(z)\, dh$$

$$= \lim_{H \to \infty} \int_0^H \int_Z [1-\varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} \mid z)]\, p(z \mid \omega)\, d\nu(z)\, d$$

$$= \lim_{H\to\infty} \left(H - \int_0^H \int_Z \varphi^*(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} | z) p(z|\omega) d\nu(z) dh \right)$$

$$= \lim_{H\to\infty} \left(H - \int_0^H \lim_\alpha \int_Z \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} | z) p(z|\omega) d\nu(z) dh \right)$$

$$\leqq \lim_{H\to\infty} \lim_{\alpha} \left(H - \int_0^H \int_Z \varphi_\alpha(\{a ; L(\omega, a) \leqq h\} | z) p(z|\omega) d\nu(z) dh \right)$$

$$= \lim_{H\to\infty} \lim_\alpha \int_0^H \int_Z [1 - \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) \leqq h\} | z)] p(z|\omega) d\nu(z) dh$$

$$\leqq \lim_\alpha \int_0^\infty \int_Z \varphi_\alpha(\{a : L(\omega, a) > h\} | z) p(z|\omega) d\nu(z) dh$$

$$= \lim_\alpha \rho(\omega, \varphi_\alpha) \quad \leqq \quad \sup_{\omega' \in \Omega_0} \rho(\omega', \varphi)$$

Ω_0 は ω のぞくする orbit である.

したがって φ^* は modified minimax sense において φ と少なくても同程度によいことがわかった.

あとは φ^* がほとんど不変であることを証明することだけである.

そのために次の Lemma を証明する.

Lemma　g を fix するとすべての g' の有界可測関数 f に

対して

$$\lim_{\alpha}\int_{g'\in G}\psi(g')[d\mu_\alpha(g'\cdot g^{-1})-d\mu_\alpha(g')]=0$$

証明　$|\psi|\leqq 1$として証明してさしつかえない．Mを正整数とし　$[-1,\ 1]$　を長さ$\frac{1}{M}$　の小区間に分割する．
積分の定義から

$$\Big|\int_{g'\in G}\psi(g')[d\mu_\alpha(g'\cdot g^{-1})-d\mu_\alpha(g')]$$

$$-\sum_{k=-M}^{M}\frac{k}{M}\Big[\mu_\alpha\Big\{\Big(g' : \frac{k}{M}\leqq\psi(g')<\frac{k+1}{M}\Big)g^{-1}\Big\}$$

$$-\mu_\alpha\Big\{g' : \frac{k}{M}\leqq\psi(g')<\frac{k+1}{M}\Big\}\Big]\Big|$$

$$\leqq\Big|\int_{g'\in G}\psi(g')\,d\mu_\alpha(g'\cdot g^{-1})-\sum_{k=-M}^{M}\frac{k}{M}\Big[\mu_\alpha\Big\{\Big(g' : \frac{k}{M}\leqq\psi(g')<\frac{k+1}{M}\Big)g^{-1}\Big\}\Big]\Big|$$

$$+\Big|\int_{g'\in G}\psi(g')\,d\mu_\alpha(g')-\sum_{k=-M}^{M}\frac{k}{M}\mu_\alpha\Big\{g' : \frac{k}{M}\leqq\psi(g')<\frac{k+1}{M}\Big\}\Big|$$

$$\leqq\frac{1}{M}+\frac{1}{M}=\frac{2}{M}.$$

$$\left[\mu_\alpha\left\{\left(g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\right)g^{-1}\right\} - \mu_\alpha\left\{g' : \frac{k}{M} \leqq \psi(g') < \frac{k+1}{M}\right\}\right]$$

は $\{\mu_\alpha\}$ が漸近的右不変だから $\underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$ である.

したがって

$$\limsup_\alpha \left| \int_{g' \in G} \psi(g')[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] \right| \leqq \frac{2}{M}$$

M は任意の正整数だから

$$\lim_\alpha \left| \int_{g' \in G} \psi(g')[d\mu_\alpha(g' \cdot g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] \right| = 0$$

これで Lemma の証明は終った.

まずコンパクトな K に対して

$$\bar{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) = \bar{\varphi}(K \mid z) \quad [\nu]$$

がなりたつことを証明しよう. そのためにはすべての $f \in L^1(\nu)$ に対して

$$\int_Z [\bar{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) - \bar{\varphi}(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい. $\bar{\varphi}$ は φ_α の極限点であるから

$$\lim_\alpha \int_Z [\varphi_\alpha(g_A K \mid g_z(z)) - \varphi_\alpha(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

を証明すればよい　　　φ_α の定義から

$$\lim_\alpha \Big[\int_Z \int_G \varphi(g_A' g_A K \mid g_z' g_z(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z)$$

$$- \int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z) \Big]$$

$$= \lim_\alpha \Big[\int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g' g^{-1}) f(z) d\nu(z)$$

$$- \int_Z \int_G \varphi(g_A' K \mid g_z'(z))\, d\mu_\alpha(g') f(z) d\nu(z) \Big]$$

$$= \lim_\alpha \int_G \int_Z \varphi(g_A' K \mid g_z'(z)) f(z) d\nu(z) [d\mu_\alpha(g' g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')]$$

$\psi(g') = \int_Z \varphi(g' K \mid g_z'(z)) f(z) d\nu(z)$ は g' の可測関数

であり $|\psi(g')| \leq \int_Z |f(z)| d\nu(z) < \infty$ だから Lemma

を用いて

$$\lim_\alpha \int_G \int_Z \varphi(g_A' K \mid g_z'(z)) f(z) d\nu(z) [d\mu_\alpha(g' g^{-1}) - d\mu_\alpha(g')] = 0$$

故に

$$\lim_{\alpha} \int_{Z} [\varphi_\alpha(g_A K \mid g_z(z)) - \varphi_\alpha(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\int_{Z} [\bar{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) - \bar{\varphi}(K \mid z)] f(z) d\nu(z) = 0$$

故に

$$\bar{\varphi}(g_A K \mid g_z(z)) = \bar{\varphi}(K \mid z) \quad [\nu]$$

この結果によって

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) = \varphi^*(K \mid z) \quad [\nu]$$

を証明する. U を開集合, L をコンパクト集合, $K \subset U \subset L$ とする. $\varphi^*_U = \sup_{\substack{R \subset U \\ R \in \mathfrak{R}}} \bar{\varphi}_R \leqq \bar{\varphi}_L \ [\nu]$ だから $\varphi^*_K \leqq \varphi^*_U \leqq \bar{\varphi}_L \leqq \varphi^*_L \ [\nu]$.

また

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \leqq \bar{\varphi}(g_A L \mid g_z(z)) = \bar{\varphi}(L \mid z)$$
$$\leqq \varphi^*(L \mid z) \quad [\nu]$$

同様に

$$\varphi^*(K \mid z) \leqq \bar{\varphi}(L \mid z) = \bar{\varphi}(g_A L \mid g_z(z))$$
$$\leqq \varphi^*(g_A L \mid g_z(z)) \quad [\nu]$$

$\{L_n\}$ を $K = \cap L_n \downarrow$ かつ $K \subset U_n \subset L_n$ なる開集合 U_n が存在するようなコンパクト集合列とすると上の二つの不

等式から

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \leqq \varphi^*(K \mid z) \leqq \varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) \quad [\nu]$$

したがって

$$\varphi^*(g_A K \mid g_z(z)) = \varphi^*(K \mid z) \quad [\nu]$$

すべての $g \in \mathcal{G}$ に対して $\varphi^*(g_A S \mid g_z(z)) = \varphi^*(S \mid z)$ $[\nu]$ となる S 全体を $\mathfrak{A}^*$ とすると $\mathfrak{A}^*$ は単調クラスとなる。すなわち $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$, $S_n \in \mathfrak{A}^*$ なら $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{A}^*$ となる. $\mathfrak{A}$ は K をふくむ最小の単調クラス $\mathfrak{M}(K)$ であり $K \subset \mathfrak{A}^*$ であるから $\mathfrak{M}(K) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$. これと $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(K)$ より $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. 故に任意の $S \in \mathfrak{A}$ に対して $\varphi^*(g_A S \mid g_z(z)) = \varphi^*(S \mid z)$ $[\nu]$ となる.

この等式の除外集合が S に無関係にとれることの証明は省略する.