数理解析研究所講究録
第 47 巻 1968 年 20-29

等方的相関のある複数の乱れの場の同時スペクトル表現

京大 工　小 倉 久 直

ま え が き

こゝでは2ケの乱れの場の同時表現を取扱うが3ケ以上の場合も同様である。以下では乱れの場（random field）を単に乱場と書くことにする。物理工学的に興味があるのは，2種のベクトル，2種のスカラ，およびベクトルとスカラの場合の3つである。これらを統一して扱うためにこゝでは一般的に2種のℓ－ベクトル場を考える。ℓ－ベクトルとは，3次元回転群の重みℓの既約表現空間D_{ℓ}に属する（$2\ell+1$）次元ベクトルを意味し，したがって空間回転にさいし既約表現行列による変換をうける。$\ell=0$はスカラ，$\ell=1$はベクトルに対応する。また共変量を$\overline{\ell}$－ベクトル等と記す。ℓ－ベクトル函数に関する必要な公式は附録に与えた。

§1　一様なℓ次元乱場

一様（homogeneous）なℓケの成分をもつ乱場は，スペクトル密度が絶対連続な場合には，ℓケのℓ次元直交彷徨測度による移動平均の形に書くことができる：

$$I_i(x)=\int f_i(x-x')\,dB(x',\omega)=\sum_{\alpha=1}^{\ell}\int f_i^{\alpha}(x-x')\,dB^{\alpha}(x',\omega) \tag{1.1}$$

$i=1,2\cdots,\ell$。直交彷徨測度$B(A)$は，$E<B^{\alpha}(A)>=0$，$E<\overline{B^{\alpha}(A_1)}B^{\beta}(A_2)>=\delta_{\alpha\beta}m(A_1\cap A_2)$等の性質をもつ。（$E<>$は期待値，$m(A)$は集合Aの測度，$\delta_{\alpha\beta}=1$，$\alpha=\beta$，$=0$，$\alpha\neq\beta$，$\omega$は確率パラメタ）

ℓ次元移動平均は次のようにスペクトル表現ができる：

$$I_i(x)=\int e^{2\pi i(x\cdot y)}\,dM_i(y,\omega),\ i=1,2,\cdots,\ell \tag{1.2}$$

$$E<\overline{M_i(S)}M_j(S')>\int_{S\ S'}F_{ij}(y)dy \tag{1.3}$$

$$F_{ij}(y)\equiv\sum_{\alpha=1}^{\ell}\overline{F_i^{\alpha}(y)}F_j^{\alpha}(y) \tag{1.4}$$

こゝに$M_i(S)$一つのℓ次元直交彷復測度，$F_{ij}(y)$はスペクトル密度行列で非負定値エルミット，$F_i^{\alpha}(y)$は$f_i^{\alpha}(x)$のFourier変換である。相関函数行列$R_{ij}(x)$のスペクトル表現は

$$R_{ij}(x)=\int F_{ij}(y)e^{-2\pi i(x\cdot y)}\,dy \tag{1.5}$$

で与えられ，又逆変換が成立する。

$$F_{ij}(y)=\int R_{ij}(x)e^{2\pi i(x\cdot y)}\,dx \tag{1.6}$$

§2　等方的相関のある2つの等方乱場

2つのℓ_1－ベクトル乱場$\mathrm{II}_{\ell_1}(x)$とℓ_2－ベクトル乱場$\mathrm{II}_{\ell_2}(x)$はそれぞれ$(2\ell_1+1)$および$(2\ell_1+1)$および$(2\ell_2+1)$ケの成分をもつが，これらはまた直和空間$D_{\ell_1}+D_{\ell_2}$の中の$(2\ell_1+1)+(2\ell_2+1)$次元ベクトルである。この相関函数は，直積空間

$$\overline{[D_{\ell_1}+D_{\ell_2}]}\times[D_{\ell_1}+D_{\ell_2}]=\overline{D}_{\ell_1}\times D_{\ell_2}+\overline{D}_{\ell_2}\times D_{\ell_1}+\overline{D}_{\ell_1}\times D_{\ell_2}+\overline{D}_{\ell_2}\times D_{\ell_2}, \tag{2.1}$$

の中のテンソルである。$\mathrm{II}_{\ell}(x)'$の成分は$\vec{x}$のまわりの微小回転に関するD_{ℓ}の$(2\ell+1)$ケのカノニカル基底に関してとることにし，これをカノニカル成分とよぶことにする。(2.1)の右辺の各部分空間$\overline{D}_{\lambda}\times D_{\mu}$ $(\lambda,\mu=\ell_1,\ell_2)$における相関テンソルの成分を

$$R^{\lambda\mu}_{\dot{m}n}(x)=E<\mathrm{II}_{(\lambda)m}(x+x')\,\mathrm{II}_{(\mu)n}(x')> \tag{2.2}$$

$(m=-\lambda,\cdots,\lambda,\ n=-\mu,\cdots,\mu)$で定義する。但し$\dot{m}$は共変成分をあらわす。相互相関

テンソルが等方テンソル場（空間回転に関し不変）であるとき，2つの乱場の間に等方的相関があるとよぶ。以下では等方的相関のある2つの等方乱場を取扱う。したがってその相関テンソルは直積空間（2.1）における等方テンソル場である。等方テンソル場の一般形およびそのFourier変換を考察し，（1.5）（1.6）に適用すれば次の結果がえられる。

定理1.（相関テンソルのスペクトル分解）等方相関のある等方なℓ_1 およびℓ_2－ ベクトル乱場の相関テンソルならびにスペクトル密度テンソルは，（2.1）の各部分直積空間における等方な$\overline{\lambda}\times\mu$－テンソル場であって，カノニカル成分であらわせば対角行列の形に書かれる：

λ，$\mu=\ell_1$，ℓ_2，

$$R^{\lambda\mu}_{\dot{m}n}(x)=\delta_{mn}R^{\lambda\mu}_{n}(r),\quad r=|x|,\quad m=-\lambda,\cdots\lambda \tag{2.3}$$

$$F^{\lambda\mu}_{\dot{m}n}(y)=\delta_{mn}\,F^{\lambda\mu}_{n}(t),\quad t=|y|,\ n=-\mu,\cdots\mu. \tag{2.4}$$

但し$F^{\lambda\mu}_{n}$は添字$\lambda\mu$に関して非負エルミットであり，$F^{\lambda\lambda}_{n}(t)\geq 0$，$F^{\lambda\mu}_{n}(t)=\overline{F^{\mu\lambda}_{n}}(t)$，更に$R^{\lambda\mu}_{m}(r)=(-1)^{\lambda-\mu}R^{\mu\lambda}_{-m}(r)$ の関係がある。相関テンソルは次のようにスペクトル表現ができ，また逆変換が成立する：

$$R^{\lambda\mu}_{m}(r)=4\pi\sum_{n=-L}^{L}\int_{0}^{\infty}\overline{j^{\mu\lambda}_{mn}(2\pi tr)}\,F^{\lambda\mu}_{n}(t)t^2\,dt, \tag{2.5}$$

$$m=-L,\cdots L,\ L=\min\{\lambda,\mu\}$$

$$F^{\lambda\mu}_{n}(t)=4\pi\sum_{m=-L}^{L}\int_{0}^{\infty}j^{\mu\lambda}_{mn}(2\pi tr)\,R^{\lambda\mu}_{m}(r)r^2\,dr. \tag{2.6}$$

$$n=-L,\cdots L.$$

乱場自身は次のように表現される。導出は§4でのべる。

定理2.（乱場のスペクトル分解）上記の2つの乱場の同時スペクトル表現は

$$\mathrm{I\!I}_{(\lambda)}(r,\theta,\varphi)=\sqrt{4\pi}\sum_{n=-\lambda}^{\lambda}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell}\int_{0}^{\infty}J^{\ell S}_{(\lambda)n}(2\pi tr,\theta,\varphi)\,dM^{\ell S}_{(\lambda)n}(t,\omega), \tag{2.7}$$

$$\lambda=\ell_1,\ \ell_2$$

で与えられる。こゝに$M^{\ell S}_{(\lambda)n}$ (△) は半直線T，$0 \leqq t < \infty$ 上の彷徨スペクトル測度であり，次の関係をもつ。(△はT上の区間)

$$E < M^{\ell S}_{(\lambda)n}(\triangle) > = 0 \tag{2.8}$$

$$E < \overline{M^{\ell S}_{(\lambda)n}(\triangle)} M^{\ell' S'}_{(\mu)n'}(\triangle') > = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\triangle} F_n^{\lambda\mu}(t) t^2 dt$$

相関テンソルは（2.2）に（2.7）を用いて計算できる。（2.8）ならびにテンソル型加法定理（A．8）を用いれば（2.5）が再現される。

§3　2.3の等方的相関のある乱れの場

はじめにのべた物理工学的に興味のある3つの場合は，上の結果でℓ_1，$\ell_2 = 0.1$を入れればえられる。その時$J^{\ell S}_{(1)n} \equiv J^{\ell S}_n$ はベクトル調和函数，$J^{\ell S}_{(0)0} \equiv J^{\ell S}$ はスカラ調和函数である。相関のある2つのベクトル乱場（$\ell_1 = \ell_2 = 1$）の例は黒体輻射の場における電場と磁場の場合である。この時，$\mathbb{I}_2 = \nabla \times \mathbb{I}_1$の形であるが，$\det F_{ij} = 0$であって6次元乱場$\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2$は退化している。2つのスカラ乱場（$\ell_1 = \ell_2 = 0$）の例には，大気中の温度場と密度場の場合等がある。こゝではベクトル＝スカラ（$\ell_1 = 1$，$\ell_2 = 0$）の場合のみをいくらか具体的に書下しておく。

$$I(r, \theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{n=-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{S=-\ell}^{\ell} \int_0^\infty J^{\ell S}_n (2\pi t r, \theta, \varphi) \, dM^{\ell S}_n(t, \omega) \tag{3.1}$$

$$I(r, \theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{S=-\ell}^{\ell} \int_0^\infty J^{\ell S}(2\pi t r, \theta, \varphi) \, dM^{\ell S}(t, \omega) \tag{3.2}$$

$$E < \overline{M^{\ell S}_n(\triangle)} M^{\ell' S'}_{n'}(\triangle') > = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\triangle\cap\triangle'} |F_n(t)|^2 t^2 dt \tag{3.3}$$

$$E < \overline{M^{\ell S}_n(\triangle)} M^{\ell' S'}(\triangle') > = \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\triangle\cap\triangle'} |F(t)|^2 t^2 dt \tag{3.4}$$

$$E<\overline{M_n^{\ell S}(\triangle)}\, M^{\ell' S'}(\triangle')>=\delta_{no}\delta_{\ell\ell'}\delta_{SS'}\, 4\pi\int_{\triangle\ \triangle'} F^{12}(t)\, t^2 dt \tag{3.5}$$

この時，相関テンソルは（3.9）の形をしており，各成分は

$$R_m(r)=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^\infty \overline{j^1_{mn}\ (2\pi t r)}\ |F_n(t)|^2\ t^2\ dt \tag{3.6}$$

$$R(r)=4\pi\int_0^\infty j_0\ (2\pi t r)\ |F(t)|^2 t^2 dt \tag{3.7}$$

$$M(r)=4\pi\int_0^\infty j_1(2\pi t r)\ F^{12}(t) t^2 dt \tag{3.8}$$

$$[R^{\lambda\mu}_{mn}] = \left(\begin{array}{ccc|c} R_{-1} & & & \\ & R_0 & & -M \\ & & R_1 & \\ \hline & \overline{M} & & R \end{array}\right) \tag{3.9}$$

のように表現される。相関のあるベクトル＝スカラの例としては，大気中の速度場と温度場などがある。退化した4次元乱場の例には，$\mathbb{I}_1=\nabla I_2$または$I_2=\nabla\cdot\mathbb{I}_1$がある。それらのスペクトル密度行列はそれぞれ次の形を有している。

$$\left(\begin{array}{cc|c} O & & \\ & |2\pi t F|^2 & 2\pi t\ |F|^2 \\ & O & \\ \hline & 2\pi t\ |F|^2 & |F|^2 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} |F_{-1}|^2 & & & \\ & |F_0|^2 & & -2\pi t\ |F_0|^2 \\ & & |F_1|^2 & \\ \hline & -2\pi t\ |F_0|^2 & & |2\pi t F_0|^2 \end{array}\right) \tag{3.10}$$

§4　スペクトル表現の導出

乱場のスペクトル表現（2.7）は$p\equiv(2\ell_1+1)+(2\ell_2+1)$次元移動平均より導くことができる。紙面の都合上要点のみをのべる。添字αに関するp次元ベクトル空間をV_Ω，mに関するそれをV_Rと記す。その時（1.4）（2.4）から

$$F^{\lambda\mu}_{mn}(y)=\sum_{\alpha=1}^{p} F^{\lambda\alpha}_m(y) F^{\mu\alpha}_n(y)=\delta_{mn} F^{\lambda\mu}_n(t) \tag{4.1}$$

を満足するpケのp次元ベクトル函数$\{F_m^{\lambda\alpha}(y),\ \alpha=1\cdots p\}$は$V_R\times V_\Omega=(D_{\ell_1}+D_{\ell_2})\times\overline{(D_{\ell_1}+D_{\ell_2})}$における等方テンソル場

$$F_m^{\lambda\alpha}(y)\equiv G_{m\alpha}^{\lambda\mu}(y)=\delta_{m\alpha}G_m^{\lambda\mu}(t),\ \mu=\ell_1,\ \ell_2,\ \alpha=-\mu,\cdots,\mu \tag{4.2}$$

とみなすことにより定まる。この時の不定性はωの保測変換に吸収されるので移動平均の形は変えない。この時，$F_n^{\lambda\mu}(t)=\sum_{\nu=1,2}\overline{G_n^{\lambda\nu}(t)}G_n^{\mu\nu}(t),\ \lambda,\mu=1.2$となる。（4.2）のFourier変換$f_{m\alpha}^{\lambda\mu}(x)$も亦$\lambda\times\bar{\mu}$－テンソル場であって，$f_{m\dot{\alpha}}^{\lambda\mu}(x)=\delta_{m\alpha}f_m^{\lambda\mu}(r),\ \lambda,\mu=1,2$ 又はℓ_1，ℓ_2，とおけば

$$f_m^{\lambda\mu}(r)=4\pi i^{\lambda-\mu}\sum_{n=-L}^{L}\int_0^\infty j_{mn}^{\mu\lambda}(2\pi tr)\ G_n^{\lambda\mu}(t)t^2dt \tag{4.3}$$

以下，因子$i^{\lambda-\mu}$は$G^{\lambda\mu}$と$F^{\lambda\mu}$の中に吸収する。移動平均を求める$\rho=\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos\Theta}$とおいて加法定理（A．8）を適用し，p次元彷徨測度B(△)による積分を項別に行えば（2.7）をうる。但し，彷徨スペクトル測度M(△)は，B(△)による積分をI（　）と記せば，

$$M_{(\lambda)n}^{\ell S}(\triangle)=I\left(E_{(1)n}^{\ell S}(\triangle)f^{1\lambda}+E_{(2)n}^{\ell S}(\triangle)f^{2\lambda}\right),\ \lambda=1,2 \tag{4.4}$$

$$E_{(\mu)n}^{\ell S}(\triangle)f^{\lambda\mu}\equiv(4\pi)^{\frac{3}{2}}\int_\triangle J_{(\mu)n}^{\ell S}(2\pi tr,\theta,\varphi)\ G_n^{\lambda\mu}(t)t^2dt \tag{4.5}$$

で与えられ，（A．7）の関係を用いれば（4.4）（4.5）から（2.8）の性質をもつことが容易に示される。

§5　ベクトル乱場

（2.3）～（2.8）においてℓ_2を考慮しなければ，単独のℓ_1－ベクトル乱場のスペクトル表現が与えられていることになる。こゝでは$\ell_1=1$のベクトルの場合の結果のあらましを考察する。

相関テンソルのスペクトル表現は，$R_{\dot{m}n}(x)=\delta_{mn}R_n(r)$ とおくとき，0でないカノニカル成分は（$m=-1$，0，1）

$$R_m(r)=4\pi\sum_{n=-1}\int_0^\infty \overline{j^1_{mn}\ (2\pi t r)}\ |F_n(t)|^2 t^2 dt \tag{5.1}$$

またスペクトル密度テンソルは，$F_{\dot{m}n}(y)=\delta_{mn}|F_n(t)|^2$ として

$$|F_n(t)|^2=4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^\infty j^1_{mn}\ (2\pi t r)\ R_m(r)r^2 dr\ ,\ n=-1\ ,\ 0\ ,\ 1 \tag{5.2}$$

で与えられる。もし縦，横および歪の3つの相関函数 $R_\ell=R_{rr}$，$R_t=R_{\theta\theta}$，$R_s=R_{\varphi\theta}$ を用いれば，$R_{\pm 1}=R_t\pm iR_s$，$R_0=R_\ell$ であって

$$R_\ell(r)=4\pi\int_0^\infty j'_\ell\,|F_0(t)|^2 t^2 dt+2\int_0^\infty \frac{j_\ell}{r}\left[|F_1(t)|^2+|F_{-1}(t)|^2\right] t\,dt$$

$$R_t(r)=2\int_0^\infty \frac{j_\ell}{r}|F_0(t)|^2 t\,dt+\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \left[2j_0-j_2\right]\left[|F_1(t)|^2+|F_{-1}(t)|^2\right] t^2 dt$$

$$R_s(r)=2\pi\int_0^\infty j_\ell\ (2\pi t r)\left[|F_{-1}(t)|^2-|F_1(t)|^2-|F_1(t)|^2\right] t^2 dt \tag{5.3}$$

の形に書直される。こゝで球Bessel函数 j_ℓ の引数は $2\pi t r$ である。この表現は特に $|F_{-1}|^2=|F_1|^2$ つまり $R_s=0$ の場合にはYaglomの求めたものと一致する。

ベクトル乱場自身のスペクトル表現は（3.1）（3.3）で与えられる。（A．10)の関係により，$n=0$はirrotationalな部分，$n=-1$，1はsolenoidalな部分であり，且つ（3.3）によってそれらの間の相関は存在しないことがわかる（Obkhov）。したがって，（5.1）または（5.3）における $n=0$，± 1，の項はそれぞれの部分の相関テンソルの表現を与えている。

（3.1）に（A.10)を項別に適用すれば直ちに $\nabla\times\mathbb{I}$ のスペクトル表現がえられるが，これと $\mathbb{I}$ との相関テンソルは再び等方テンソルであって $E\langle\nabla\times\mathbb{I},\ \mathbb{I}\rangle=M_{\dot{m}n}(r)=\delta_{mn}M_n(r)$ とお

けば

$$M_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} n \int_0^\infty \overline{j^1_{mn}(2\pi t r)}\ 2\pi t\ |F_n(t)|^2 t^2 dt \tag{5.4}$$

あるいは（5.3）に対応して

$$\begin{aligned} M_\ell(r) &= 4\pi \int_0^\infty \frac{j_\ell}{r} \left[|F_1(t)|^2 - |F_{-1}(t)|^2 \right] t^2 dt \\ M_t(r) &= \frac{4\pi^2}{3} \int_0^\infty \left[2j_0 - j_2 \right] \left[|F_1(t)|^2 - |F_{-1}(t)|^2 \right] t^3 dt \\ M_s(r) &= -4\pi^2 \int_0^\infty j_\ell (2\pi t r) \left[|F_1(t)|^2 + |F_{-1}(t)|^2 \right] t^3 dt \end{aligned} \tag{5.5}$$

の表現が与えられる。直ちに明らかなように $R_s = 0$ ，つまりⅡの相関テンソルが反転不変の場合には，$\nabla \times$ Ⅱ とⅡとの相関は歪相関しか存在しない。尚，この $\nabla \times$ Ⅱ とⅡの例は §3 でふれたベクトル＝ベクトルの場合の特別な例になっている。

等方ベクトル乱場は，以下の様に球面上に一様分布するランダム位相 ψ を導入することにより簡単な形に表現できる。カノニカル成分（$m = -1.0.1$）であらわせば

$$I_m(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\ Y_\ell^m (\Theta - \psi) \int_0^\infty j^\ell_{mn}(2\pi t r)\ dM_n(t, \omega) \tag{5.6}$$

$$E < M_n(\triangle) M_{n'}(\triangle') > = \delta_{nn'}\ 4\pi \int_{\triangle \cap \triangle'} |F_n(t)|^2 t^2 dt \tag{5.7}$$

こゝに $\Theta - \psi$ は $\Theta = (\theta, \varphi)$ と $\Psi = (\alpha, \beta)$ との角度差を表わし，$M_n(\triangle)$ と Ψ は統計的に独立である。全く同様な表現が等方スカラ乱場に対しても成立するが，こゝでは省略する。

附　録　　ℓ －ベクトル函数の諸公式

一般球Bessel函数（$(\ell - m \ell' m | \ell \ell' L0)$ 等はClebsch-Gordan 係数）

$$j^{\ell\ell'}_{mn}(r) = \sum_{L=|\ell-\ell'|}^{\ell+\ell'} i^{L-\ell+\ell'} (-1)^{m+n} (\ell - m \ell' m | \ell \ell' L0)(\ell - n \ell' n | \ell \ell' L0)\ j_L(r) \tag{A.1}$$

$$j^{\ell\ell'}_{mn} = j^{\ell\ell'}_{nm} = j^{\ell\ell'}_{-m-n} = (-1)^{\ell\ell'} j^{\ell\ell'}_{mn} = \overline{j^{\ell\ell'}_{m-n}} \quad (A.2)$$

一般Hankel変換，逆変換

$$f_m(r) = 4\pi \sum_{n=-L}^{L} \int_0^{\infty} F_n(t)\, j^{\ell\ell'}_{mn}(2\pi t r)\, t^2\, dt, \quad m=-L,\cdots L. \quad (A.3)$$

$$F_n(t) = 4\pi \sum_{m=-L}^{L} \int_0^{\infty} f_m(r)\, \overline{j^{\ell\ell'}_{mn}(2\pi t r)}\, r^2\, dr, \quad n=-L,\cdots L \quad (A.4)$$

ℓーベクトル球面調和函数（カノニカル成分，$T^{\ell}_{sm}(\mathcal{G})$ は既約表現行列要素）

$$P^{\ell' S}_{(\ell)n}(\theta,\varphi) = \left\{\sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}}\,\delta_{nm} T^{\ell'}_{sm}(\mathcal{G}),\ m=-\ell,\cdots\ell\right\} \quad \begin{array}{l} \ell' = 0.1.2,\cdots \\ s = -\ell'\cdots\ell' \\ n = -\ell\cdots\ell \end{array} \quad (A.5)$$

ℓーベクトル立体調和函数

$$J^{\ell' S}_{(\ell)n}(r.\theta.\varphi) = \sum_{t=-\ell}^{\ell} j^{\ell'\ell}_{nt}(r) P^{\ell' S}_{(\ell)t}(\theta,\varphi) \quad (A.6)$$

$$(4\pi)^2 \int_0^{\infty}\int_{S_3} (J^{\ell' S'}_{(\ell)n'}(2\pi t' r, \mathcal{G}) \cdot J^{\ell'' S''}_{(\ell)n''}(2\pi t'' r, \mathcal{G})\, d\omega r^2 dr$$
$$= \delta_{n'n''}\,\delta_{\ell'\ell''}\,\delta_{ss''} \frac{\delta(t'-t'')}{(t')^2} \quad (A.7)$$

テンソル型加法定理（$\ell_1 \times \overline{\ell_2}$ ーテンソル）（$e_{(\ell)t}(r)$: rまわりのカノニカルベクトル）

$$\sum_{t=-L}^{L} j^{\ell_2\ell_1}_{nt}(r)\, e_{(\ell_1)t}(r)\, \overline{e_{(\ell_2)t}(r)} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell} J^{\ell S}_{(\ell_1)n}(r_1, \mathcal{G}_1)\, J^{\ell S}_{(\ell_2)n}(r_2\, \mathcal{G}_2)$$

(A.8)

$r = r_1 - r_2$，$r_1 = (r_1, \mathcal{G}_1)$，$r_2 = (r_2, \mathcal{G}_2)$，$n = -L\cdots L$．$\mathcal{G}$：回転

ベクトル調和函数（$\ell = 1$）

$$J^{\ell S}_{(1)n}(kr,\theta\varphi) \equiv J^{\ell S}_{n}(kr,\theta\varphi), \quad j^{\ell 1}_{mn}(r) \equiv j^{\ell}_{mn}(r) \quad (m, n = -1, 0, 1) \quad (A.9)$$

$$\nabla J = k J_0 \;,\; \nabla \cdot J_n = -\delta_{on} k J \;,\; \nabla \times J_n = n k J_n \tag{A.10}$$

スカラ調和函数（$\ell = 0$）

$$J^{\ell S}_{(0)0}(kr, \theta, \varphi) \equiv J^{\ell S}(kr, \theta, \varphi) = Y^{S}_{\ell}(\theta, \varphi)\; j_{\ell}(kr) \tag{A.11}$$

$Y^{S}_{\ell}(\theta, \varphi)$ は球面上で規格化したスカラ球面調和函数