数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 41-58

On a duality for locally compact groups

東北大 理　　斎藤和之

§0．まえがき

最近辰馬氏により局所コムパクト群に対する双対定理が、いわゆる淡中双対定理の一般化として証明された。［5］
一方 W. F. Stinespring は［3］の中で作用素環における非可換積分論の応用として，局所コムパクトユニモジュラ群に対する作用素環的な双対定理を証明した。

本講演では，かならずしもユニモジュラでない局所コムパクト群に Stinespring の双対定理を拡張できることを述べよう。［8］

§1．準備

Ωを局所コムパクト Hausdorff 空間とし，μをその上の非負値 Radon 測度とする。
$L^\infty(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ を，それぞれΩ上の複素数値，

本質的有界函数，p 乗可積分函数全体とし，$C_c(\Omega)$ ($C_\infty(\Omega)$) を，Ω 上のコムパクトな台をもつ（∞ で 0 になる）複素数値函数全体とする。

今 G を局所コムパクト群とし，μ をその上の左 Haar 測度とする。Haar 測度の理論によって，任意の x, y ($\in G$) に対して，$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ を満す正値連続函数 Δ が存在し，これはさらに

$$(1) \quad \int_G f(xy)\, d\mu(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x)\, d\mu(x) \qquad (\forall f \in L^1(G))$$

$$(2) \quad \int_G f(x^{-1}) \Delta(x^{-1})\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x)$$

を満す。又 $L^1(G)$ の元 f, g に対して，合成積を

$$(3) \quad (f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\mu(y), \qquad (x \in G)$$

f ($\in L^1(G)$) に対して，f^* を $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ （但し $\bar{a}$ は，複素数 a の共役）と定義すれば，$L^1(G)$ は上の合成積を積とし $f \to f^*$ を対合とする Banach 代数となる。

$L^2(G)$ の元 f，G の元 s, x に対して，

$$\{\lambda(s) f\}(x) = f(s^{-1}x)$$

によって定義された $s \to \lambda(s)$ を G の左正則表現といい，

同様に Banach 代数 $L^1(G)$ の左正則表現 $f \to \lambda(f)$ を

(5) $$\{\lambda(f)g\}(x) = \int_G f(s)g(s^{-1}x)\,d\mu(s), \quad (f \in L^1(G),\ g \in L^2(G))$$

と定義する。

可換の場合と類似な公式

(6) $$\lambda(f) = \int_G f(s)\lambda(s)\,d\mu(s) \qquad (f \in L^1(G))$$

によって $f \to \lambda(f)$ はグローバルなフーリエ変換と考えることができる。(但し(6)は σ-weak 位相の意味での積分である。)

M を $\{\lambda(a),\ a \in G\}$ によって生成された von Neumann 代数とすれば，作用素 $\lambda(f)$ は M に含まれ，M はそれら $\lambda(f)$ が生成する von Neumann 代数である。

今 G が可換と仮定しよう。$L^1(G)$ のスペクトルは G の双対群と呼ばれる局所コムパクト可換群 $\hat{G}$ になり M は $L^\infty(\hat{G})$ を，$L^2(\hat{G})$ 上の積作用素の代数として表現することによって，$L^\infty(\hat{G})$ と空間同型になる。故に M と $L^\infty(\hat{G})$ を同一視する事により，$L^1(G)$ のフーリエ変換は $L^1(G)$ の M への埋め込みになっている。我々はフーリエ変換とその逆変換の次のような図式を得る。

(7) $$L^1(G) \xrightarrow{\ \mathcal{F}\ } L^\infty(\hat{G})$$
$$L^\infty(G) \xleftarrow{\ \hat{\mathcal{F}}\ } L^1(\hat{G}),$$

且つ $\{L^1(G), L^1(G)\}$，$\{L^1(\hat{G}), L^\infty(\hat{G})\}$ がともに Banach 空間として

双対系になっている。

Pontryaginの双対定理は，次の事を主張している。

$L^1(\hat{G})$ (von Neumann algebra $L^\infty(\hat{G})$ の predual) の指標全体のつくる空間 $\hat{\hat{G}}$ は局所コムパクト可換群で，はじめに与えられた G と位相的代数的に同型となる。

一般の場合にもどって，我々は双対対象 $\hat{G}$ は考えられないが情況は図式(7)と同じである事がわかる。実際 M を非可換 L^∞-空間，predual M_* を非可換 L^1-空間と考える。

我々の前半の目的は，predual M_* に左正則表現のテンソル巾を使用して，等距離的対合をもつ可換な半単純Banach代数の構造を入れることである。

G の表現 $x \longrightarrow \lambda(x) \otimes \lambda(x)$ ($\lambda(x)$ のテンソル巾) は左正則表現 $\lambda(x)$ の $\aleph$-fold copy (但し $\aleph$ は $L^2(G)$ の次元) である。すなわち表現 $x \rightarrow \lambda(x) \otimes 1$ (1 は $L^2(G)$ の単位作用素) は表現 $x \rightarrow \lambda(x) \otimes \lambda(x)$ とユニタリ同値である。この同値性を与える $L^2(G \times G)$ の上の特別なユニタリ作用素は，

(8) $$(Wf)(x, y) = f(x, xy) \qquad (f \in L^2(G \times G))$$

によって定義される。

$t (\in M)$ に対して，$\Phi(t) = W^{-1}(t \otimes 1)W$ と定義すると，Φ は，$\Phi(\lambda(x)) = \lambda(x) \otimes \lambda(x)$ $(\forall x \in G)$ を満す M から $M \otimes M$ の中への $*$-

同型写像である。

Gが可換の場合，$f\,(\in L^1(G))$に対して$\lambda(f)$はfのフーリエ変換$\hat{f}$の$L^2(\hat{G})$上の積作用素に相当し，簡単な計算から$\Phi(f)$は，二変数函数$\hat{f}(\hat{x}\hat{y})$の$L^2(\hat{G}\times\hat{G})$上の積作用素に相当する。

$L^1(\hat{G})\ (\equiv L^\infty(\hat{G})_*)$の元$F, H$に対して合成積$F*H$は，

$$(9)\qquad \int_{\hat{G}} (F*H)(\hat{x})\,\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{\mu}(\hat{x}) = \iint_{\hat{G}\times\hat{G}} F(\hat{x})H(\hat{y})\,\hat{f}(\hat{x}\hat{y})\,d\hat{\mu}(\hat{x})\,d\hat{\mu}(\hat{y})$$
$$= \int_{\hat{G}\times\hat{G}} (F\otimes H)(\hat{x},\hat{y})\,\Phi(\hat{f})(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{\mu}\otimes\hat{\mu}(\hat{x},\hat{y})$$

なる式を満す。(但し$\hat{\mu}$は$\hat{G}$上のHaar測度とする。)

この事に注意して，一般の局所コムパクト群Gに対して，我々はM_*の合成積を次のように定義しよう。

<u>定義1</u>．M_*の元F, Hに対して，合成積$F*H$を$(F*H)(t) = (F\otimes H)(\Phi(t))\ (\forall t\in M)$を満す$M_*$の一意な元として定義する。但し$F\otimes H$は，$M_*\hat{\otimes}_{\alpha_0^*}M_*$の元で，$\alpha_0^*$は鶴丸[6]の意味の$\alpha_0$ノルムの随伴クロスノルムとする。

次にCを$L^2(G)$における作用素で，$(Cf)(x) = \overline{f(x)}\ (f\in L^2(G))$を満すものとする。今$M$の元$t$に対して$\tilde{t} = CtC$とすれば，$\widetilde{\lambda(x)} = \lambda(x)$になるから$t \to \tilde{t}$は$M$の共役線型$*$-自己同型写像となる。

<u>定義2</u>．M_*の元Fに対して，$\tilde{F}$を$\tilde{F}(t) = \overline{F(\tilde{t})}$と定義する。

§2. 補助定理.

<u>補助定理 1</u>. M_* は合成積を積とし, $F \to \tilde{F}$ を等距離的対合とする可換な Banach 代数になる。

証明) $\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(x_i)$, α_i は複素数, $x_i \in G\}$ は M において. σ-weak 位相に関して密であるから定義1, 2により主張は, 明らかである。

<u>補助定理 2</u>. M_* の元 F に対して $\hat{F}(x) = F(\lambda(x))$ $(x \in G)$ とすると $\hat{F}$ は G 上の有界連続函数であり $\overline{\hat{F}(x)} = \hat{\tilde{F}}(x)$, 且つ $\widehat{F * H}(x) = \hat{F}(x)\hat{H}(x)$ が成立する。

<u>注意</u>. 今後この可換な Banach 代数 M_* を $L^1(M)$ と書く。

<u>補助定理 3</u>. $L^1(M)$ は. 半単純であり, $S \otimes S = \Phi(S)$, $S = \tilde{S}$ を満す M の元 S と $L^1(M)$ の自己共役な指標 σ の間に $\sigma(F) = F(S)$ $(\forall F \in L^1(M))$ によって与えられる一対一上への対応が存在する。

証明) σ を $L^1(M)$ の自己共役指標とすると σ は自動的に $L^1(M)$ 上の連続線型汎函数となる〔例えば [2]〕から $\sigma(F) = F(S)$ $(\forall F \in L^1(M))$ を満す M の元 S が存在する。

$L^1(M)$ の任意の元 F, H に対して,

$$
\begin{aligned}
(F \otimes H)(\Phi(S)) &= (F * H)(S) = \sigma(F * H) \\
&= \sigma(F)\sigma(H) = F(S)H(S) \\
&= (F \otimes H)(S \otimes S)。
\end{aligned}
$$

従って $\Phi(S) = S \otimes S$。又 $F(\tilde{S}) = \overline{\tilde{F}(S)} = \overline{\sigma(\tilde{F})} = \sigma(F) = F(S)$

より $\tilde{S} = S$ である。

逆に $S\otimes S = \Phi(S)$, $\tilde{S} = S$ と仮定する。今 σ を $\sigma(F) = F(S)$ と定義すると上の逆をたどる事により σ が自己共役指標である事がわかる。

すべての自己共役指標 σ に対して $\sigma(F) = \sigma(H)$ が成立すれば、$\Phi(\lambda(x)) = \lambda(x)\otimes\lambda(x)$, $\widetilde{\lambda(x)} = \lambda(x)$ より $F(\lambda(x)) = H(\lambda(x))$ $(\forall x \in G)$。又 $\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda(x_i)\ \ \alpha_i$ は複素数, $x_i \in G\}$ は M の中で σ-weak 位相に関して密であるから $F = H$。故に $L^1(M)$ の半単純性が証明された。 (証明終り)

補助定理4. $\{F;\ F\in L^1(M),\ \hat{F}\in L^2(G)\} = L^1_2(M)$ と置き、$\mathcal{L}$ を $= \{\hat{F};\ F\in L^1_2(M)\}$ とする。$\mathcal{L}$ は $L^2(G)$ で uniform 位相で密であり $L^\infty(G)$ で弱位相に関して密である。

証明) $L^1(M)$ の元 $W_{f,g}$ $(f, g\in C_c(G))$ を

$$W_{f,g}(a) = (af, g) \qquad (\forall a\in M)$$

と定義すると簡単な計算から $\widehat{W_{f,g}} = g*\overline{\Delta f}$ となり $W_{f,g}\in L^1_2(M)$ である。故に $\{f*g;\ f, g\in C_c(G)\}\subset\mathcal{L}$ であるから、$\mathcal{L}$ は $L^2(G)$ で uniform 位相で密である。

$\mathcal{L}_0$ を $\{f*g;\ f, g\in C_c(G)\}$ によって生成された G 上の連続函数の代数とする。$\mathcal{L}_0$ は自己共役で、G の点を分離するから $C_\infty(G)$ で一様位相で密，従って $L^\infty(G)$ で弱位相で密で

ある。故に$\mathcal{L}$は$L^{\infty}(G)$で弱位相に関して密となる。

(証明終り)

<u>補助定理5</u>. $L_2^1(M)$の元F, Mの元Sに対して$F_S(a)=F(Sa)$ $(\forall\, a\in M)$と定義すると$\hat{F}_S\in L^2(G)$であり$\hat{F}_S=\tilde{S}*\hat{F}$ μ-a.e. である。

証明) $S\in M$よりKaplanskyの定理から$\lambda(f_\alpha)\to S$ (σ-weak位相), $\|\lambda(f_\alpha)\|\leqq\|S\|$なる如き$L^1(G)$の元の有向系$\{f_\alpha\}$を撰べる。今$g\in L^1(G)\cap L^2(G)$とすると

$$
\begin{aligned}
(\tilde{S}*\hat{F},\ g) &= \int_G \hat{F}(x)(S\bar{g})(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_\alpha \int_G \hat{F}(x)((\lambda(f_\alpha))\bar{g})(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_\alpha \int \hat{F}(x)(f_\alpha*\bar{g})(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_\alpha F(\lambda(f_\alpha*\bar{g})) \\
&= F(S\cdot\lambda(\bar{g})) \\
&= \int_G F(S\cdot\lambda(x))\,\bar{g}(x)\,d\mu(x) \\
&= (\hat{F}_S,\ g)\text{。}
\end{aligned}
$$

一方$\hat{F}_S$はG上の有界連続函数であり$\tilde{S}*\hat{F}\in L^2(G)$だから, $\hat{F}_S\in L^2(G)$且つ$\hat{F}_S=\tilde{S}*\hat{F}$ μ-a.e.が成立する。

(証明終り)

さて $\Gamma = \{ S ;\ S \in M,\ \Phi(S) = S \otimes S,\ \hat{S} = S \}$ とすると Γ は，M の単位球の σ-weak 位相に関してコムパクトな部分集合であるから $\hat{G} \equiv \Gamma - \{0\}$ は σ-weak 位相で局所コムパクト部分集合となる。

任意の $f, g\ (\in L^2(G))$ に対して，

$$(10) \qquad (\hat{A}f,\ g) = \int_{\hat{G}} A(a)\, d\mu_{f,g}(a) \qquad (\forall A \in L^1(M))$$

を満す $\hat{G}$ 上の一意な有限 Radon 測度 $\mu_{f,g}$ が存在する。何故ならば，補助定理3から $L^1(M)$ は $C_\infty(\hat{G})$ の一様位相に関して密な部分代数 $\mathcal{C}$ として表現されるから $L(A) = (\hat{A}f, g)$ によって定義される $\mathcal{C}$ の一様位相による連続線型汎函数は $C_\infty(\hat{G})$ 上のそれに一意に連続に拡張できる。故に (10) を満す $\hat{G}$ 上の Radon 測度 $\mu_{f,g}$ が存在する。

補助定理 6. $L_2^1(M)$ の元 E, A, U, V に対して，

$$E(a)\overline{A(a)}\, d\mu_{\hat{U},\hat{V}}(a) = U(a)\overline{V(a)}\, d\mu_{\hat{E},\hat{A}}(a)$$

が成立する。

証明）かってな $L^1(M)$ の元 H に対して，

$$\int_{\hat{G}} H(a)U(a)\overline{V(a)}\, d\mu_{\hat{E},\hat{A}}(a) = \int_{\hat{G}} (H * U * \tilde{V})(a)\, d\mu_{\hat{E},\hat{A}}(a)$$

$$= (\widehat{H * U * \tilde{V}} \cdot \hat{E},\ \hat{A})$$

$$= (\hat{H}\hat{U}\bar{\hat{V}}\hat{E}, \hat{F})$$

$$= (\hat{H}\hat{E}\bar{\hat{F}}\hat{U}, \hat{V})$$

$$= \int_{\hat{G}} H(a)E(a)\overline{F(a)}\, d\mu_{\hat{U},\hat{V}}(a) 。$$

$\mathcal{L}(M)$ が半単純であるから $U(a)\overline{V(a)}\, d\mu_{\hat{E},\hat{F}}(a) = E(a)\overline{F(a)}\, d\mu_{\hat{U},\hat{V}}(a)$ が成立する。

（証明終り）

<u>補助定理7</u>．次の(i)(ii)を満す $\hat{G}$ 上の非負値 Radon 測度 $\hat{\mu}$ が存在する。

(i) $(\hat{E}, \hat{F}) = \int_{\hat{G}} E(a)\overline{F(a)}\, d\hat{\mu}(a)$, $E, F \in L_2^1(M)$,

(ii) $\int_{\hat{G}} H(a)\, d\mu_{\hat{E},\hat{F}}(a) = \int_{\hat{G}} H(a)E(a)\overline{F(a)}\, d\hat{\mu}(a)$, $H \in L^1(M)$ 。

証明）$L_2^1(M)$ の元 F に対して $U_F = \{ s ; s \in \hat{G} , F(s) \neq 0 \}$ とすると，$L_2^1(M)$ が $L^1(M)$ で弱位相で密より $\{ U_F ; F \in L_2^1(M) \}$ は $\hat{G}$ の σ-weak 位相による開被覆である。

各々の $f (\in C_c(U_F))$ に対して，

(11) $$\mu_F(f) = \int_{\hat{G}} \frac{f(a)}{|F(a)|^2}\, d\mu_{\hat{F},\hat{F}}(a)$$

と定義すると U_F 上の非負値 Radon 測度 μ_F ができる。もしも $\hat{G}$ 上の連続函数が，そのコムパクトな台を $U_E \cap U_F$（E,

$\hat{F} \in L_2^1(M)$)の中にもっているとすると補助定理6から $\mu_E(f) = \mu_{\hat{F}}(f)$ である。従って $\{U_{\hat{F}}, \mu_{\hat{F}}, \hat{F} \in L_2^1(M)\}$ はその $U_{\hat{F}}$ への制限が $\mu_{\hat{F}}$ であるような $\hat{\hat{G}}$ 上の非負値Radon測度 $\hat{\mu}$ を定義する。〔例えば [1] 第一章，§3 命題1 参照〕

(11)式により $d\mu_{\hat{E},\hat{F}}(a) = E(a)\overline{\hat{F}(a)}\,d\hat{\mu}(a)$ $(E, \hat{F} \in L_2^1(M))$ が成立。故に(ii)が示された。

$\mu_{\hat{E},\hat{E}}$ なる $\hat{\hat{G}}$ 上の測度が有限であるから E $(\in L_2^1(M))$ の $\hat{\mu}$ に関する2乗可積分性がいえる。又 $L^1(M)$ の半単純性により，$\|H_\alpha\|_\infty \leqq 2$，且つ $\hat{\hat{G}}$ 上のコムパクト収束位相に関して $H_\alpha \to 1$ なる如き $L^1(M)$ の元の有向系 $\{H_\alpha\}$ が存在する。 等式(ii)により，

$$\int_{\hat{\hat{G}}} H_\alpha(a)\,|\hat{F}(a)|^2\,d\hat{\mu}(a) = \int_{\hat{\hat{G}}} H_\alpha(a)\,d\mu_{\hat{F},\hat{F}}(a)$$
$$= \int_G \hat{H}_\alpha(x)\,|\hat{F}(x)|^2\,d\mu(x)。$$

故に $(\hat{F},\hat{F}) = \int_{\hat{\hat{G}}} |\hat{F}(a)|^2\,d\hat{\mu}(a)$ となり (i)が成立する。

（証明終り）

補助定理8．M_P を M の射影作用素全体とすると $M_P \cap P = \{0, 1\}$ である。

証明）M'（M の交換子）$\supset \{\rho(x)\,;\, x \in G \quad x \to \rho(x)$ は G の右正則表現$\}$ であるから $e \in P \cap M_P$ に対して $(1-e)L^2(G) = \mathfrak{M}$ とすると閉部分空間 $\mathfrak{M}$ は右移動に関して不変である。

次に $L^\infty(G)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ を示そう。そのためには補助定理4から $\mathcal{L}_e\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ を示せば充分である。$\widetilde{e^*} = e$ より $F \in L^1_2(M)$ に対して補題5から $e\hat{F} = \widehat{Fe}$ (μ-a.e.) であり $e\hat{F} \in L^\infty(G)$ である。又 $H (\in L^1_2(M))$ に対して,

$$e(\hat{F}\hat{H}) = (e\hat{F})(e\hat{H}) \qquad \mu\text{-a.e.}.$$

何故ならば,

$$\begin{aligned}(F * H)_e(\lambda(x)) &= (F * H)(e\lambda(x)) \\ &= (F \otimes H)(\Phi(e\lambda(x))) \\ &= (F \otimes H)((e\lambda(x)) \otimes (e\lambda(x))) \\ &= F(e\lambda(x)) \cdot H(e\lambda(x)).\end{aligned}$$

故に $e(\hat{F}\hat{H}) = (e\hat{F})(e\hat{H})$ μ-a.e. である。一方 $\mathcal{L}_e$ が $L^2(G)$ で一様位相で密であるから $e(\hat{F}g) = (e\hat{F})eg$ $(\forall g \in L^2(G))$ が成立する。従ってもしも $g \in \mathfrak{M}$ とすると $e\hat{F}g = 0$ すなわち $\mathcal{L}_e\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$。[例えば [7] p.42. 第二章参照] により $e = 1$ 又は 0 である。

(証明終り)

<u>補助定理9</u>. $\hat{\hat{G}}$ の元は M のユニタリ作用素になり, 作用素の積に関して σ-weak 位相で局所コンパクト群である。又 $\hat{\hat{\mu}}$ は, その左Haar測度となる。

証明）$\hat{\hat{G}}$の元s，$L_2^1(M)$の元E，Fに対して，

$$\int_{\hat{\hat{G}}} E(sa)\overline{F(a)}\,d\hat{\hat{\mu}}(a) = (\hat{E}_s, \hat{F}) = (s^*\hat{E}, \hat{F})$$
$$= (\hat{E}, s\hat{F})$$
$$= \int_{\hat{\hat{G}}} E(a)\overline{F(s^*a)}\,d\hat{\hat{\mu}}(a) 。$$

補助定理3によって，$C_c(\hat{\hat{G}})$の元f, gに対して，

(12) $$\int_{\hat{\hat{G}}} f(sa)g(a)\,d\hat{\hat{\mu}}(a) = \int_{\hat{\hat{G}}} f(a)g(s^*a)\,d\hat{\hat{\mu}}(a)$$

が成立する。

次に$\hat{\hat{G}}$の任意のσ-weak位相に関してコムパクトな集合Kに対して$H = \{t;\ t\in\hat{\hat{G}}\ \ st\in K\}$が又$\sigma$-weak位相に関してコムパクトになる事を証明しよう。

まず$s\in\hat{\hat{G}}$に対して，$x\in M \longrightarrow sx\in M$なる写像が一対一で，$\sigma$-weak位相で連続である事を示そう。ある$x\ (\in M)$に対して$sx=0$とすると$s^*sx=0$より$s\geq 0$と仮定して一般性を失なわぬ。（$\hat{\hat{G}}$は積に関して閉じている。）又任意の自然数$n$に対して$s^{1/n}$（$s$の正の$n$乗根）は$\hat{\hat{G}}$の元である。そして$s^{1/n}$は$s$の支持射影作用素$e$に$s$-位相で収束するから$e\in\hat{\hat{G}}$であり，補助定理8により，$e=1$である。故に$x=0$。

この写像がσ-weak位相で連続な事は，明らかであるから，$sH = (s\hat{\hat{G}}\cup\{0\})\cap K$が$\hat{\hat{G}}\cup\{0\}$の$\sigma$位相に関してコムパ

クトな部分集合である事に注意して，Hは $\hat{\hat{G}} \cup \{0\}$ で σ-weak 位相でコムパクトである。又Hの元の有向系 $\{x_\alpha\}$ が0に（σ-weak位相で）収束するなら $Sx_\alpha \to 0\ (\sigma)$ である。しかるに，$st_\alpha \in SH = K$。これは矛盾である。故にHは $\hat{\hat{G}}$ の σ-weak 位相による閉部分集合となる。

今 $C_c(\hat{\hat{G}})$ の元 f の台Kに対して上に述べた事により，$g(t)=1$ $(st \in K)$ $g(s^*t)=1$ $(t \in K)$ なる如き $C_c(\hat{\hat{G}})$ の元 g が存在する。(12)式によって，

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f(st)\, d\hat{\hat{\mu}}(t) = \int_{\hat{\hat{G}}} f(t)\, d\hat{\hat{\mu}}(t) \qquad (\forall f \in C_c(\hat{\hat{G}}))。$$

故に $L^2_\frac{1}{2}(M)$ の元E，Fに対して $\hat{\hat{G}}$ の元 s をとれば，

$$\begin{aligned}(s^*\hat{E},\ s^*\hat{F}) &= \int_{\hat{\hat{G}}} E(sa)\,\overline{F(sa)}\, d\hat{\hat{\mu}}(a)\\ &= \int_{\hat{\hat{G}}} E(a)\,\overline{F(a)}\, d\hat{\hat{\mu}}(a)\\ &= (\hat{E}, \hat{F})\ 。\end{aligned}$$

補助定理4から $(SS^*f,\ g) = (f,\ g)$ $(\forall f, g \in L^2(G))$ が成立するから $SS^* = 1$ 又同様にして $S^*S = 1$ である。故に S はユニタリ作用素で，$\hat{\hat{G}}$ は左Haar測度 $\hat{\hat{\mu}}$ をもつ，作用素の積を群の演算とする σ-weak位相に関する局所コムパクト群である。

（証明終り）

§3. 定理.

定理. (双対定理) 上に構成された局所コムパクト群$\hat{\hat{G}}$は, 最初に与えられた局所コムパクト群 G と位相的, 代数的に同型である。 この同型写像は $x \in G \longrightarrow \lambda(x) \in \hat{\hat{G}}$ により与えられる。

証明) 写像 $x \in G \longrightarrow \lambda(x) \in \hat{\hat{G}}$ が G から $\hat{\hat{G}}$ 上への同型写像である事を示そう。まずこれが G から $\hat{\hat{G}}$ の中への一対一連続な写像であることは知られている。これが位相同型写像であることをいうには, $\hat{\hat{G}}$ 上で σ-weak 位相と s-位相とが一致するから次の事を示せば充分である。 V を G の単位元の任意に与えられたコムパクトな近傍とする。f を $\|f\|_2 = 1$, $supp.(f) \cdot \{supp(f)\}^{-1} \subset V$ なる如く撰ぶ。今 $\|\lambda(a)f - f\|_2 < 1$ ならば $a \in V$ なることが容易に確められる。従ってこの写像が上への写像であることをいえば, 定理の証明は終る。

上の写像による G の像を G' とすると G' は $\hat{\hat{G}}$ の閉部分群である。今 $\hat{\hat{G}}$ 上の非負値 Radon 測度 ν を

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f(s)\,d\nu(s) = \int_G f(\lambda(x))\,d\mu(x) \qquad (f \in C_c(\hat{\hat{G}}))$$

と定義する。$\mathcal{D} = \{ f(s) \,,\ f(s) = F(s)\ \ F \in L^1_2(M) \}$ $\mathcal{D}^2 = \{ \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{g}_i \quad f_i, g_i \in \mathcal{D} \}$ と置く。今 $f \in \mathcal{D}^2$ とすると, $f = \sum_{j=1}^{n} g_j \bar{h}_j$ 但し $g_j(s) = G_j(s)$, $h_j(s) = H_j(s)$, $G_j, H_j \in L^1_2(M)$, $s \in \hat{\hat{G}}$。

$L^1_2(M)$の定義から $f \in L^1(\hat{\hat{G}}, \nu)$ であり，

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f(s)\,d\nu(s) = \int_G f(\lambda(x))\,d\mu(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_G \hat{G}_j(x)\,\hat{H}_j(x)\,d\mu(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\hat{G}_j, \hat{H}_j)\ 。$$

さらに $t \in \hat{\hat{G}}$, $E \in L^1_2(M)$ に対して，補助定理５から $\widehat{Et*} = t\hat{E}$ であるから

$$\int_{\hat{\hat{G}}} f(t*s)\,d\nu(s) = \sum_{j=1}^{n} (t\hat{G}_j, t\hat{H}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\hat{G}_j, \hat{H}_j)$$
$$= \int_{\hat{\hat{G}}} f(s)\,d\nu(s)\ 。$$

〔例えば〔3〕系1.4.〕を ν とその左移動に応用して ν が $\hat{\hat{G}}$ 上の左 Haar 測度となり ν が G' 上に集中しているから $G' = \hat{\hat{G}}$ である。

（証明終り）

注．以上の議論で我々は $\tilde{u} = u$，$u \otimes u = \Phi(u)$ と仮定したが実は，$u \otimes u = \Phi(u)$ のみから u がユニタリ作用素且つ $\tilde{u} = u$ がでてくる。故に $L^1(M)$ の指標はみな自己共役である。くわしい事は略す。

なお P. Eymard〔L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact ; Bull. Soc. math. France, 92 (1964) pp181~236〕

は，$L^1(M)$の逆変換（$\bar{F}\in L^1(M)$に対して$\hat{F}$としたもの）全体のつくる$C_\infty(G)$の部分代数に$L^1(M)$によるノルムを入れ Fourier algebra と名づけ（可換の場合との類似性により$A(G)$と書く），この$A(G)$を使用してG上の調和解析を展開しているのであるがその中で我々の定理を別の方法で導いている。詳細は原論文にゆずる。

以上。

References

[1] N. Bourbaki; Intégration, Paris, (1952).

[2] L. H. Loomis; An introduction to abstract harmonic analysis, New York, (1953).

[3] W. F. Stinespring; Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc., 90(1959), 15-56.

[4] M. Takesaki; A characterization of group von Neumann algebras of locally compact unimodular groups as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem, To appear.

[5] N. Tatsuuma; A duality theorem for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 6(1967), 187-293.

[6] T. Turumaru; On the direct product of operator algebras III, Tôhoku Math. J., 6(1954), 208-211.

[7] A. Weil; L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, (1938).

[8] K. Saitô; On a duality for locally compact groups, To appear in Tôhoku Math. J..