数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 142-146



# C*-代数のtensor積上のC*-normの非一様性

東北大 教養　岡安隆照

C*-代数のtensor積上のC*-normはcross normであるがそれらについて，少なくともα-norm ([8]; 又[4], [7]) に関する限り，R. Schatten [5] の意味で一様にcrossであるという大方の予想があったようであるが，実はそうでないということがわかったのでここに報告したい．

一般にBanach空間E, Fの代数的なtensor積E⊙Fの上のnorm $\|\cdot\|_\beta$ は，それが

$$\|x\otimes y\|_\beta = \|x\|\,\|y\|,\quad \forall x\in E,\ \forall y\in F$$

を満すときcross normであるといわれ，更にE, Fの任意の有界な線型写像 $\rho, \sigma$ についてE⊙F上の線型写像

$$(\rho\otimes\sigma)\left(\sum_i x_i\otimes y_i\right) = \sum_i \rho(x_i)\otimes\sigma(y_i)$$

が有界で，$\|\rho\otimes\sigma\|_\beta \leqq \|\rho\|\,\|\sigma\|$ を満すとき一様にcrossであるといわれる[5].

Hilbert空間 $H$ 上の有界な線型作用素の全体 $B(H)$ を $H$ の一つの完全正規直交系 $\{e_\xi\}_{\xi\in I}$ に関して行列表現する。又もう一つの Hilbert 空間 $K$ 上に作用している $C^*$-代数を $A$，それが生成する von Neumann 代数を $M$ とする。周知の通り $M$ と $B(H)$ の von Neumann 代数 tensor 積 $M\otimes B(H)$ を $M$ の作用素を要素とする有界な行列（$\{e_\xi\}$ に関する）の全体とみなし，特に $x\in M$ と $y=(\lambda_{\xi\eta})\in B(H)$ に対して $x\otimes y$ を Kronecker 積 $(\lambda_{\xi\eta}x)$ とみなすことが出来る（例えば[1]）。又 $A$ と $B(H)$ の $\alpha$-tensor 積 $A\hat{\otimes}_\alpha B(H)$ は $M\otimes B(H)$ の中に埋めこまれているとしてよい（$\|\cdot\|_\alpha=\|\cdot\|$）。$\iota$ を $A$ の恒等写像，$\tau$ を $B(H)$ の"転置"とすると，後者は周期2の逆自己同型写像で，$A\odot B(H)$ 上の写像 $\iota\otimes\tau$ は $A$ の作用素を要素とする行列の転置になる。そして次の事柄がわかる：

<u>定理1.</u> (1°) $A$ が可換なら $\iota\otimes\tau$ は $A\odot B(H)$ の逆自己同型，従ってその norm は 1.

(2°) $H$ が有限次元（$\neq 1$ 次元），$A$ が非可換で恒等作用素を含むなら $\iota\otimes\tau$ は $A\odot B(H)=A\hat{\otimes}_\alpha B(H)$ 上有界でその norm は 1 より大である。

(3°) $H, K$ 共無限次元で，$A=B(K)$ ならば $\iota\otimes\tau$ は $A$

$\odot B(H)$ 上の非有界線型写像である.

(2°)-(3°) は考えている $\alpha$-norm が一様に cross でないことを意味している. のみならず (3°) は2つの有界な線型写像の tensor 積が $\alpha$-norm に関して非有界になることすらあるということを示している.

証明の方針を述べる. (1°) は容易, (2°) は有限行列の一様収束が各要素の一様収束と同値であることと, 次に述べる定理2から知られる. (3°): $K$ の一つの完全正規直交系 $\{e'_\varphi\}_{\varphi\in J}$ に関して $B(K)$ を行列表現する. $I, J$ 共正整数列 $\{1,2,\cdots\}$ を含んでいるとしてよい. そこで

$$x^{(k)} = \begin{array}{c} \qquad\quad\;\; k \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array}, \quad t^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & \\ \vdots & \\ x^{(n)} & 0 \\ 0 & \\ \vdots & \end{pmatrix}, \quad k, n = 1, 2, \cdots$$

とおくと各 $n$ について $t^{(n)} \in A \odot B(H)$ で $\|t^{(n)}\| = 1$ かつ $\|(\iota \otimes \tau)(t^{(n)})\| = \sqrt{n}$. 従って $\|\iota \otimes \tau\| = \infty$.

<u>定理2.</u> $A, B$ を共に非可換な $C^*$-代数で identity をもつもの, $\|\cdot\|_\beta$ を $A \odot B$ の $C^*$-norm, $\pi, \rho$ をそれぞれ $A$, $B$ の周期2の自己同型写像, 逆自己同型写像とするとき, $A$

$A \odot B$ の線型写像 $\pi\otimes\rho$ は $\|\cdot\|_\beta$ に関して（非有界であるか有界であっても）norm $\|\pi\otimes\rho\|_\beta$ は1より大である．

証明: $\pi\otimes\rho$ が有界ならば $A\hat{\otimes}_\beta B$ 上に連続的に拡張されて，それを又 $\pi\otimes\rho$ と書くとき，$1 \leqq \|\pi\otimes\rho\|_\beta < \infty$. 今 $\|\pi\otimes\rho\|_\beta = 1$ とすると $\pi\otimes\rho$ は isometry になり，Kadison の定理 [3] により $C^*$-同型写像である．しかるに仮定から互いに非可換な $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ があるが，$t = x_1\otimes y_1 + x_2\otimes y_2 \in A\odot B$ に対して $(\pi\otimes\rho)(t^2) \neq [(\pi\otimes\rho)(t)]^2$ なる矛盾が得られる．

なお定理1の(2°)で α-norm と ν-norm ([2]; 又 [4], [7]) は等しいから ν-norm にも一様に cross でないものがあることになる．又定理1の(3°)で $A = B(K)$ を，無限に多くの互いに直交している同値な射影作用素を含む $C^*$-代数でおきかえても同様である．

# 文献


[1] J. Dixmier, Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[2] A. Guichardet, On the tensor products of C*-algebras, Doklady Akad. Nauk, 160(1965), 986-989.

[3] R. V. Kadison, Isometries of operator algebres, Ann. Math., 54(1951), 325-338.

[4] T. Okayasu, On the tensor products of C*-algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 325-331.

[5] R. Schatten, The theory of cross-spaces, Princeton, 1950.

[6] M. Takesaki, On the cross-norm of the direct product of C*-algebras, Tôhoku Math. J., 16(1964), 111-122.

[7] M. Takesaki. C*-algebra のテンソル積とその表現, 講究録 5(1965 年 5 月), 1-18.

[8] T. Turumaru, On the direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J., 4(1952), 242-251.