数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 147-162

I型ファクターの無限テンソル積のファクター型について

阪大基礎工　竹之内脩

H_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$: ヒルベルト空間.

e_ν は H_ν の固定された単位ベクトル.

$H = \prod_\nu \otimes (H_\nu, e_\nu)$: $\prod_\nu \otimes e_\nu$ を含む無限テンソル積 (von Neumann の不完全無限直積).

M_ν は H_ν 上に与えられた I 型ファクター.

$T \in M_\nu$ の H 上への拡大を $\bar{T}$, $\bar{M}_\nu = \{\bar{T} ; T \in M_\nu\}$,

$M = \{\bar{M}_\nu ; \nu = 1, 2, \cdots\}$ から生成された H 上の von Neumann 環.

この M がここでいう無限テンソル積である.

さて, 各 H_ν は M_ν に関して, $H_\nu = H_{\nu 1} \otimes H_{\nu 2}$ とテンソル積に分解され, $M_\nu = B(H_{\nu 1}) \otimes I_{\nu 2}$.

e_ν はこの分解に対応して,

(1) $$e_\nu = \sum_{j=1}^{m_\nu} \lambda_{\nu j}^{1/2} \varphi_{\nu 1 j} \otimes \varphi_{\nu 2 j}$$

と表わされる. ここで,

(2) $$\begin{cases} \lambda_{\nu j} > 0 \quad (\text{すべての } j \text{ について}), \\ \lambda_{\nu 1} \geqq \lambda_{\nu 2} \geqq \cdots, \qquad \sum_{j=1}^{m_\nu} \lambda_{\nu j} = 1. \\ \{\varphi_{\nu 1 j} ; j = 1, 2, \cdots\}, \{\varphi_{\nu 2 j} ; j = 1, 2, \cdots\} \text{ はそれぞれ } H_{\nu 1}, \end{cases}$$

$\quad H_{\nu 2}$ の NCS

とする．（indices は，$n_\nu < \infty$ ならば，$j=1,\cdots,n_\nu$；$n_\nu = \infty$ ならば，$j=1,2,\cdots$ を動くものとする．）(1)のような表わし方はいろいろあるであろうが，集合 $\{\lambda_{\nu 1},\lambda_{\nu 2},\cdots\}$ は，各要素の重複度も含めて一意的に定まる．

そこで，この $\lambda_{\nu 1},\lambda_{\nu 2},\cdots$ の性質を用いて，M のファクター型を分類することができるかどうか問題となる．その答として，

<u>定理</u>

M が I 型 $\overset{(3)}{\rightleftarrows}$ $\sum_\nu (1-\lambda_{\nu 1}) < \infty$.

M が II_1 型 $\rightleftarrows$ すべての $n_\nu<\infty$，無限に多くの $n_\nu > 1$；かつ，

(＊) $$\sum_{\nu,j}\left(\left(\frac{1}{n_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2}\right)^2 < \infty.$$

ここに，$n_\nu = \dim H_{\nu 1}$．また，$\lambda > m_\nu$ のとき，$\lambda_{\nu j}=0$ とする．

M が III 型 $\overset{(5)}{\rightleftarrows}$ $\displaystyle\sum_{\nu,j,k} \lambda_{\nu j}\lambda_{\nu k} \min\left\{\left|\frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}}-1\right|^2, c\right\} = \infty$

ある $c>0$，したがってすべての $c>0$ について．

von Neumann [7] は $\dim H_{\nu 1} = \dim H_{\nu 2} = 2$ $(\nu=1,2,\cdots)$ のとき，

$\lambda_{\nu 1} = 1$ ならば，M は I 型，

$\lambda_{\nu 1} = \lambda_{\nu 2} = 1/2$ ならば，M は II_1 型

を示した．

Pukánsky [6] は $\dim H_{\nu 1} = \dim H_{\nu 2} = 2$ $(\nu=1,2,\cdots)$ のとき，

$\lambda_{\nu 1} = p$，$\lambda_{\nu 2} = q$．$(p,q>0,\ p+q=1,\ p\neq q)$ ならば，

M は III 型

を示した.

Araki [1], Bures [3] は上記 I 型のための必要十分条件を与えた.

Bures [3] は,

$n_1, n_2, \cdots$ が有界のとき, II_1 型のための必要十分条件,

$\lambda_{\nu 1}$ が下に有界, $\lambda_{\nu i}/\lambda_{\nu j}$ が下に有界 (正の数で下からおさえられている) とき, M は III 型.

を示した.

Moore [5] は, 上記 II_1 型のための必要十分条件, および,

$\lambda_{\nu 1}$ が下から正の数でおさえられているとき, III 型のための必要十分条件

を与えた.

記号. 以下, $\sum_\nu$, $\prod_\nu$ は $\nu = 1, 2, \cdots$ にわたる和および積を, $\sum_j$, $\sum_k$ は, $j, k = 1, \cdots, m_\nu$ ($m_\nu < \infty$ のとき), または, $j, k = 1, 2, \cdots$ ($m_\nu = \infty$ のとき) にわたる和を表わす. また, $I(\nu) = \{1, \cdots, m_\nu\}$ ($m_\nu < \infty$ のとき), または $= \{1, 2, \cdots\}$ ($m_\nu = \infty$ のとき).

§1. 一般的準備

Lemma 1. いま, $\dim H_{\nu 1} = \dim H_{\nu 2} = n_\nu = m_\nu$ とする. そのとき, M は, 次のような測度空間 (Ω, μ) と, その上の

可測変換群 G を用いて，von Neumann [8] によって構成されたファクターと空間同型である．（以下，$m_\nu < \infty$ として書く．$m_\nu = \infty$ の場合は容易に書き直すことができる．）

$\Omega_\nu = \{\omega_{\nu j} \; ; \; j = 1, \cdots, m_\nu\}$，　$\mu_\nu(\{\omega_{\nu j}\}) = \lambda_{\nu j}$．

$G_\nu = \{g_{\nu 0}, g_{\nu 1}, \cdots, g_{\nu m_\nu - 1}\}$　$\omega_{\nu j}\, g_{\nu k} = \omega_{\nu (j+k)}$　（$j+k$ は mod m_ν で考える．）

$\Omega = \prod_\nu \Omega_\nu$，　$\mu = \prod_\nu \mu_\nu$，　$G = \prod_\nu{}' G_\nu$（制限直積）

G は，各成分の上に対する G_ν の作用によって，自然に Ω 上の変換群と考える．

（Bures [3], Lemma 5.2, Prop. 5.1）

Lemma 2

$H^{\circ}_{\nu 1} = \overline{\vee}\{\psi_{\nu j} \; ; \; j \in I(\nu)\}$，　$E_{\nu 1} = \mathrm{proj}\,(H^{\circ}_{\nu 1} \otimes H_{\nu 2})$ in H_ν．

とする．$E_{\nu 1} \in M_\nu$．

$\overline{E}_{\nu 1} = E_{\nu 1}$ の H 上への拡張，　$E = \prod_\nu \overline{E}_{\nu 1}$　とする．

$E \in M$，　$EH = \prod_\nu \otimes\, (H^{\circ}_{\nu 1}, e_\nu)$，　$(M)_E = (M)_{E_{\nu 1}}$ の無限テンソル積．

いま，$(M)_E$ のファクター型が知られたとする．（$(M)_E$ は Lemma 1 によって，測度空間から作られるファクターと同型であるから，その型は比較的決定しやすい．）

$(M)_E$ が I 型，II 型，III 型なるに従って，M は，I, II, III 型．

$(M)_E$ が有限型ファクターであるとき，M がまた有限型であるための条件は，すべての $n_\nu < \infty$，かつ $\sum_\nu \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu}\right) < \infty$

証明．最後のところだけ証明すればよい．いずれかの $n_\nu = \infty$ ならば，M が無限型は明らか．以下 $n_\nu < \infty$ とする．

$\sum_\nu \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu}\right) = \infty$ ならば，$\prod_\nu \frac{n_\nu}{m_\nu} = \infty$．そこで，$A_1, A_2, \cdots \subset \{1, 2, \cdots\}$ を，互いに共通部分をもたない有限集合で，$\prod_{\nu \in A_k} \frac{n_\nu}{m_\nu} > 2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ なるものとすれば，$\prod_{\nu \in A_k} \otimes H_{\nu 1}$ は $F_k \in \prod_{\nu \in A_k} \otimes M_\nu$，$\dim \mathcal{R}(F_k) = \prod_{\nu \in A_k} m_\nu$，$F_k \prod_{\nu \in A_k} \otimes E_{\nu 1} = 0$ なる如き射影作用素 F_k を含む．$\overline{G}_k = \overline{F}_k \prod_{\nu \notin A_k} \overline{E}_{\nu 1}$ とすれば，$E, \overline{G}_1, \overline{G}_2$ は互いに直交する M の射影作用素で，互いに同等．故に，M は無限型．

$\sum_\nu \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu}\right) < \infty$ のとき，M はとも角半有限．$(M)_E$ が有限型であるから，E は有限．M の次元関数 d を，$d(E) = \prod_\nu \frac{m_\nu}{n_\nu}$ なる如く定める．ところで，$I = \sum_{(\varepsilon_\nu)} E_{(\varepsilon_\nu)}$ と表わされる．ここに，(ε_ν) は 0 と有限個の 1 をならべた列で，$E_{(\varepsilon_\nu)} = \prod_\nu \otimes \overline{E_{\nu 1}^{(\varepsilon_\nu)}}$，$E_{\nu 1}^{(0)} = E_{\nu 1}$，$E_{\nu 1}^{(1)} = I_{\nu 1} - E_{\nu 1}$ とする．$E_{(\varepsilon_\nu)}$ はすべて有限で，$d(E_{(\varepsilon_\nu)}) = d(E) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{n_\nu - m_\nu}{n_\nu}\right)^{\varepsilon_\nu} = \left(\prod_{\nu : \varepsilon_\nu = 0} \frac{m_\nu}{n_\nu}\right) \times \left(\prod_{\nu : \varepsilon_\nu = 1} \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu}\right)\right)$．これから，$d(I) = 1$ となり，M が有限型であることが知られる．

Lemma 3. $\nu = 1, 2, \cdots$ に対して，$I(\nu)$ の部分集合 $I'(\nu)$ で，

$$\sum_{\nu} \sum_{j\in I'(\nu)} \lambda_{\nu j} < \infty$$

を満たすものを考える．$I'(\nu) = I(\nu)$ なる ν は有限個しかないから，それらは考慮外として，

$$J(\nu) = I(\nu) - I'(\nu) \neq \phi$$

とする．$j \in J(\nu)$ に対して，

$$\lambda'_{\nu j} = \lambda_{\nu j} \Big/ \sum_{k\in J(\nu)} \lambda_{\nu k}, \qquad e'_{\nu} = \sum_{j\in J(\nu)} \lambda'^{1/2}_{\nu j}\, \varphi_{\nu j} \otimes \varphi_{\nu 2 j}$$

とすれば，

$$H = \prod_{\nu} \otimes (H_\nu, e_\nu) = \prod_{\nu} \otimes (H_\nu, e'_\nu).$$

故に，Mはこのような基準ベクトルの変更によって変化しないが，さらに，定理の $\lambda_{\nu j}$ が満たすおのおのの条件(3), (4), (5)も変化しない．

証明．無限テンソル積が一致するための条件は，$\sum_{\nu} (1-(e_\nu, e'_\nu))$ が収束することであるが，この場合，

$$\sum_{\nu} (1-(e_\nu, e'_\nu)) = \sum_{\nu}\Big(1-\sum_{j\in J(\nu)} \lambda_{\nu j}^{1/2} \lambda'^{1/2}_{\nu j}\Big) = \sum_{\nu}\Big(1-\Big(\sum_{j\in J(\nu)} \lambda_{\nu j}\Big)^{1/2}\Big)$$

$$\leqq \sum_{\nu}\Big(1-\sum_{j\in J(\nu)} \lambda_{\nu j}\Big) = \sum_{\nu}\sum_{j\in I'(\nu)} \lambda_{\nu j} < \infty.$$

(3), (4), (5) が変化しないことについて．後に用いるのは，III型条件のときだけであるから，その場合を述べる．十分大な ν に対して，$\sum_{j\in J(\nu)} \lambda_{\nu j} \geqq 1/2$ であるから，このとき，

$$\lambda_{\nu j}\lambda_{\nu k} \leqq \lambda'_{\nu j}\lambda'_{\nu k} \leqq 4\lambda_{\nu j}\lambda_{\nu k} \qquad (j, k \in J(\nu)).$$

そして，

$$\sum_{\nu}\sum_{j,k} \lambda_{\nu j}\lambda_{\nu k} \min\Big\{\Big|\frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1\Big|^2, c\Big\} \leqq \sum_{\nu}\sum_{j,k\in J(\nu)} \lambda'_{\nu j}\lambda'_{\nu k} \min\Big\{\Big|\frac{\lambda'_{\nu j}}{\lambda'_{\nu k}} - 1\Big|^2, c\Big\}$$

$$+ \; 2c \sum_{v} \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} \; + \; c \sum_{v} \Big(\sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} \Big)^2 ,$$

および，

$$\sum_{v} \sum_{j,k \in J(v)} \lambda'_{vj} \lambda'_{vk} \, \min\left\{ \left| \frac{\lambda'_{vj}}{\lambda'_{vk}} - 1 \right|^2 , c \right\} \leqq 4 \sum_{v} \sum_{j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \, \min\left\{ \left| \frac{\lambda_{vj}}{\lambda_{vk}} - 1 \right|^2 , c \right\} .$$

したがって，λ_{vj} について述べた (5) の条件と，λ'_{vj} について述べた (5) の条件は同等．

さて，Lemma 1, 2 と，von Neumann の定理（von Neumann [8]）によって，M のファクター型の分類は，Ω 上の測度に関して次のことを示す問題となる．

I 型 ： μ は本質的には（測度 0 の部分を除いて）discrete な測度である．

II_1 型 ： Ω 上の non-discrete な有限測度 ρ で，G 不変かつ μ と同等なものが存在し，かつ，$\sum_{v} \left(1 - \frac{m_v}{n_v}\right) < \infty$.

III 型 ： Ω 上の σ 有限測度で，G 不変かつ μ と同等なものは存在しない．

そこで，Ω 上の測度の性質を調べる．

Lemma 4. Ω 上の σ 有限測度 ρ が G 不変であるための必要十分条件は，$\forall v \; (=1, 2, \cdots)$ に対して，$\rho = \rho_v \times \rho_v^*$ と表わされることである．ここに，ρ_v は Ω_v の各点に mass 1 を与えるような測度，ρ_v^* は $\Omega_v^* = \prod_{i \neq v} \Omega_i$ 上の測度で，$G_v^* = \prod'_{i \neq v} G_i$ に関して不変なもの． （Moore [5]）

証明 [$\Leftarrow$] p_ν は G_ν 不変. $\therefore$ p は G_ν 不変. G は G_ν で生成されるから, p は G 不変.

[$\Rightarrow$] $X \subset \Omega_\nu^*$ に対し, $p_\nu^*(X) = p(\{\omega_{\nu_j}\} \times X)$ とすればよい.

以下, 簡単のため, $N = 1, 2, \cdots$ に対し,

$$\omega_N = (\omega_\nu;\ 1 \leqq \nu \leqq N), \qquad \omega_N^* = (\omega_\nu\ ;\ \nu > N), \qquad \omega = (\omega_N\, \omega_N^*)$$

$$\Omega_N = \prod_{\nu=1}^{N} \Omega_\nu, \qquad \Omega_N^* = \prod_{\nu>N} \Omega_\nu, \qquad \Omega = \Omega_N \times \Omega_N^*,$$

$$\mu_N = \prod_{\nu=1}^{N} \mu_\nu, \qquad \mu_N^* = \prod_{\nu>N} \mu_\nu, \qquad \mu = \mu_N \times \mu_N^*$$

と書く. また, Ω_N, Ω_N^* 上の関数 $x_N(\omega_N)$, $x_N^*(\omega_N^*)$ は, $\omega = (\omega_N\, \omega_N^*)$ に対し, $x_N(\omega) = x_N(\omega_N)$, $x_N^*(\omega) = x_N^*(\omega_N^*)$ と見做すことによって, Ω 上の関数と考えることができる. このようにして, 例えば, $L^2(\Omega_N, \mu_N)$ は $L^2(\Omega, \mu)$ の閉部分空間と考えることができる.

Lemma 5. 直積測度の定義から, $L^2(\Omega, \mu) = \prod_\nu \otimes (L^2(\Omega_\nu, \mu_\nu), 1)$

$x_\nu \in L^2(\Omega_\nu, \mu_\nu)$, $\|x_\nu\| = 1$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) に対し, $x(\omega) = \prod_\nu x_\nu(\omega_\nu) \in L^2(\Omega, \mu)$ であるための必要十分条件は,

$$\sum_\nu \|1 - x_\nu\|^2 = 2 \sum_\nu (1 - \Re(x_\nu, 1)) < \infty, \quad \text{かつ,} \quad \sum_\nu \Im(x_\nu, 1) \text{ が収束.}$$

証明 $\lim_{N\to\infty} \prod_{\nu=1}^{N} x_\nu = x$. $\therefore$ $(x, 1) = \lim_{N\to\infty} \prod_{\nu=1}^{N} (x_\nu, 1)$. 故に, $\prod_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu, 1)$ は収束. 逆に, この無限乗積が収束ならば,

$$\left\| \prod_{\nu=1}^{N} x_\nu - \prod_{\nu=1}^{N'} x_\nu \right\|^2 = 2\left(1 - \Re \prod_{\nu=N+1}^{N'} (x_\nu, 1)\right) \to 0. \quad (N < N',\ N \to \infty)$$

$\therefore\ x \in L^2(\Omega, \mu)$. $\prod_{\nu=1}^{\infty}(x_\nu, 1)$ の収束は上にあげた条件と同値

Lemma 6. Ω 上の直積測度 $\mu = \prod_\nu \mu_\nu$, $\rho = \prod_\nu \rho_\nu$ が同等であるための必要十分条件は, ($\mu_\nu(\Omega_\nu) = \rho_\nu(\Omega_\nu) = 1$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) とする.)

(6) $$\sum_\nu \left(1 - \int_{\Omega_\nu} \sqrt{\frac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)}\, d\mu_\nu(\omega_\nu)\right) < \infty.$$

現在の場合, $\mu_\nu(\{\omega_{\nu j}\}) = \lambda_{\nu j}$, $\rho_\nu(\{\omega_{\nu j}\}) = \rho_{\nu j}$ として,

(7) $$\sum_\nu \left(1 - \sum_j (\lambda_{\nu j}\, \rho_{\nu j})^{1/2}\right) < \infty. \qquad \text{(角谷 [4])}$$

証明 [$\Leftarrow$] $x_\nu(\omega_\nu) = \dfrac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)$ とすれば, $\sqrt{x_\nu} \in L^2(\Omega_\nu, \mu_\nu)$, $\|x_\nu\| = 1$. (6) は, $\sum_\nu (1 - (\sqrt{x_\nu}, 1)) < \infty$ ということであるから, Lemma 5 により, $y = \prod \otimes \sqrt{x_\nu} \in L^2(\Omega, \mu)$. この $\|y\| = 1$, $y \geqq 0$ (a.e.). 故に, $d\bar{\rho}(\omega) = (y(\omega))^2 d\mu(\omega)$ は Ω 上の σ 有限測度. かつ, $\bar{\rho}(\Omega) = 1$. いま, Ω_N 上の矩形集合 $X_N = \prod_{\nu=1}^{N} X_\nu$ に対しては, $X = X_N \times \Omega_N^*$, $X = X_{N'} \times \Omega_{N'}^*$ ($N \leqq N'$) として,

$$\bar{\rho}(X) = \int_X (y(\omega))^2 d\mu(\omega) = \lim_{N \leqq N' \to \infty} \int_{X_{N'}} x_{N'}(\omega_{N'})\, d\mu_{N'}(\omega_{N'}) = \int_{X_N} x_N(\omega_N)\, d\mu_N(\omega_N)$$

$= \rho_N(X_N) = \rho(X)$. $\therefore\ \bar{\rho} = \rho$. $\therefore\ \rho \prec \mu$. また,

$$\int_{\Omega_\nu} \sqrt{\frac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)}\, d\mu_\nu(\omega_\nu) = \int_{\Omega_\nu} \sqrt{\frac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)}\, \frac{d\mu_\nu}{d\rho_\nu}(\omega_\nu)\, d\rho_\nu(\omega_\nu) = \int_{\Omega_\nu} \sqrt{\frac{d\mu_\nu}{d\rho_\nu}(\omega_\nu)}\, d\rho_\nu(\omega_\nu).$$

故に, μ と ρ の役割は入れかえられる. 故に $\rho \sim \mu$.

[$\Rightarrow$] (6) の級数が発散のとき, ρ, μ が互いに特異であることをいえばよい. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$: $\int_{\Omega_N} \sqrt{\dfrac{d\rho_N}{d\mu_N}(\omega_N)}\, d\mu_N(\omega_N)$

$= \prod_{\nu=1}^{N} \int_{\Omega_\nu} \sqrt{\dfrac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)}\, d\mu_\nu(\omega_\nu) < \varepsilon$. ($\because$ 仮定により, $\prod_{\nu=1}^{\infty} \cdots = 0$.)

$X_N = \{\omega_N ;\ \dfrac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu) \geqq 1\}$ とすれば, $\mu_N(X_N) < \varepsilon$. 一方,

$$\rho_N(X_N^c) = \int_{X_N^c} d\rho_N(\omega_N) = \int_{X_N^c} \frac{d\rho_N}{d\mu_N}(\omega_N)\, d\mu_N(\omega_N) \leqq \int_{X_N^c} \sqrt{\frac{d\rho_N}{d\mu_N}(\omega_N)}\, d\mu_N(\omega_N)$$

$< \varepsilon$. 故に, $X = X_N \times \Omega_N^*$ は, $\mu(X) < \varepsilon$, $\rho(X^c) < \varepsilon$ を満足する. 故に, ρ, μ は互いに特異.

§2. I 型の条件.

$\omega = (\omega_{\nu j_\nu};\ \nu = 1, 2, \cdots)$ に対して, $\mu(\{\omega\}) = \prod_\nu \mu_\nu(\{\omega_{\nu j_\nu}\}) = \prod_\nu \lambda_{\nu j_\nu}$. この値が一番大きくなるのは $j_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ のとき. したがって, μ が本質的に discrete な測度であるための条件は, $\prod_\nu \lambda_{\nu 1} > 0$. すなわち, $\sum_\nu (1 - \lambda_{\nu 1}) < \infty$.

§3. II_1 型の条件.

[$\Rightarrow$] n_ν に関する条件は trivial. ρ を Ω 上の G 不変な有限測度とする. すべての ν について, $m_\nu < \infty$ であるから, Ω_ν と G_ν を同一視して, 有限アーベル群と見ることができる. そうすれば Ω はコンパクト・アーベル群となり, G はその稠密な部分群. これから ρ が Ω のハール測度であることが知られる. (例えば, ρ のフーリエ変換を考えればよい.) $\rho(\Omega) = 1$ としておいてよい. $\rho_\nu(\{\omega_{\nu j}\}) = 1/m_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, m_\nu)$ なる測度 ρ_ν を Ω_ν 上に考えれば, $\rho = \prod_\nu \rho_\nu$ である. 故に, Lemma 6 により, $\sum_\nu \left(1 - \sum_j \left(\frac{\lambda_{\nu j}}{m_\nu}\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2} \sum_\nu \left(\left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2}\right)^2 < \infty$. ($\rho \sim \mu$ であるから) さて, Lemma 2 より, $\sum_\nu \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu}\right)$

$< \infty$. $\therefore \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} \left(\left(\frac{1}{n_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{\nu} \sum_{j=1}^{m_\nu} \left(\left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2}$
$+ \left(\sum_{\nu} \sum_{j} \left(\left(\frac{1}{n_\nu}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{1/2} \right)^2 + \sum_{\nu} \frac{n_\nu - m_\nu}{n_\nu} \right)^{1/2}$
$\leqq \left(\sum_{\nu} \sum_{j} \left(\left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(3 \sum_{\nu} \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu} \right) \right)^{1/2} < \infty$.

[⇐] Lemma 6 によって，μ は上で定めた ρ と同等．さて，$\infty > \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{n_\nu} \left(\left(\frac{1}{n_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j} \right) \geqq \sum_{\nu} \left(1 - \frac{m_\nu}{n_\nu} \right)$ ． $\therefore \frac{m_\nu}{n_\nu} \to 1$．故に，無限に多くの $m_\nu > 1$． したがって ρ は non-discrete．そして，$\rho(\Omega) = 1$．

§4. Ⅲ型の条件．[⇐]

M が半有限であったとする．すなわち，Ω 上に μ と同等な G 不変測度 ρ が存在したとして，

(8) $$\sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \min \left\{ \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1 \right|^2, c \right\} < \infty$$

を示す．

Lemma 4 を繰返して用いることにより，$\rho = \prod_{\nu=1}^{N} \rho_\nu \times \rho_N^*$ と書くことができる．ここで，ρ_ν は Ω_ν 上の各点に mass 1 を与える測度，ρ_N^* は Ω_N^* 上の G_N^* 不変測度である．ここで，各 ρ_ν および ρ_N^* は，μ_ν および μ_N^* と同等な測度となる，$\chi(\omega) = \frac{d\rho}{d\mu}(\omega)$，$\chi_\nu(\omega_\nu) = \frac{d\rho_\nu}{d\mu_\nu}(\omega_\nu)$，$\chi_N^*(\omega_N^*) = \frac{d\rho_N^*}{d\mu_N^*}(\omega_N^*)$ とおいて，任意の実数 t に対し，関数 $\chi^t(\omega)$, $\chi_\nu^t(\omega_\nu)$, $\chi_\nu^{*N}(\omega_N^*)$ を，$\exp(2\pi i t(\cdot))$ の $(\cdot)$ にそれぞれ $\chi(\omega)$, $\chi_\nu(\omega_\nu)$, $\chi_N^*(\omega_N^*)$ を代入したものとして定義する．そうすれば，$\chi^t(\omega) = \prod_{\nu=1}^{N} \chi_\nu^t(\omega_\nu) \cdot \chi_N^{*t}(\omega_N^*)$.

これらの関数は，すべて $L^2(\Omega, \mu)$ に属する単位ベクトルと見なすことができる．

P_N を $L^2(\Omega)$ の $L^2(\Omega_N)$ 上への射影作用素とすれば，
$P_N(\chi^t) = \left(\prod_{\nu=1}^{N} \chi_\nu^t\right) \cdot (\chi_N^{*t}, 1)$．そして，$\lim_{N\to\infty} P_N(\chi^t) = \chi^t$ (強)．
$\therefore \lim_{N\to\infty} \| P_N \chi^t \| = \lim_{N\to\infty} |(\chi_N^{*t}, 1)| = 1$．よって，$\nu$ が大きければ，$(\chi_\nu^t, 1) \neq 0$ となり，$\alpha_\nu^t (\chi_\nu^t, 1) > 0$ なる $\alpha_\nu^t = \exp(2\pi i t \beta_\nu^t)$ を定めることができる．$\gamma_N^t = \left(\prod_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^t\right)^{-1} (\chi_N^*, 1)$ とすれば，N が大きければ，γ_N^t は一定の偏角をもつことになる．$\delta^t = \overline{\gamma_N^t}/|\gamma_N^t|$ とおけば，$\prod_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^t \chi_\nu^t = |\gamma_N^t|^{-1} P_N(\delta^t \chi^t) \to \delta^t \chi^t$．
故に，Lemma 5 より，$\sum_\nu \| 1 - \alpha_\nu^t \chi_\nu^t \|^2 < \infty$．ここで，$\chi_\nu(\omega_j) = 1/\lambda_{\nu j}$ なることを用いれば，

$$\sum_\nu \sum_j \lambda_{\nu j} \left| \exp(2\pi i t (\beta_\nu^t - \log \lambda_{\nu j})) - 1 \right|^2 < \infty \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が得られたことになる．

$$\therefore \sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{k} \left| \exp(2\pi i t (\log \lambda_{\nu j} - \log \lambda_{\nu k})) - 1 \right|^2$$
$$\leqq 2 \sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \left(\left| \exp(2\pi i t (\beta_\nu^t - \log \lambda_{\nu j})) - 1 \right|^2 + \left| \exp(2\pi i t (\beta_\nu^t - \log \lambda_{\nu k})) - 1 \right|^2 \right)$$
$$4 \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \left| \exp(2\pi i t (\beta_\nu^t - \log \lambda_{\nu j})) - 1 \right|^2 < \infty$$

ところで，$2 \sum_\nu \xi_\nu (1 - \cos t \eta_\nu) = \sum_\nu \xi_\nu | \exp i t \eta_\nu - 1 |^2$ ($\xi_\nu > 0$) がすべての実数 t について収束であることと，$\sum_\nu \xi_\nu \min\{|\eta_\nu|^2, c\}$ がすべての $c > 0$ について収束であることとは同等であるから，$\sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \min\{|\log \lambda_{\nu j} - \log \lambda_{\nu k}|^2, c\}$ は $c > 0$ について収束，したがって，これはまた，(8) と同値である．

詳くは，Moore [5]，竹之内 [9].

§5. III型の条件．[⇒]

(8) が成立っているとき，M が半有限であることを示す．まず，

$$(9) \qquad \exists\, \varepsilon > 0 : \quad \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} \geqq \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \cdots ;\ j, k \in I(\nu))$$

が成立っている場合を考える．このときは，(8) において c との min をとる必要がなく，

$$\sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1 \right|^2 < \infty$$

が主張されることになる．いま，2乗平均偏差に関して，平均値のまわりのそれが最小であることを利用すれば，

$$\begin{aligned}
\infty > \sum_{\nu, j, k} \lambda_{\nu j} \lambda_{\nu k} \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1 \right|^2 &= \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \sum_{k=1}^{m_\nu} \lambda_{\nu k} \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - 1 \right|^2 \\
\geqq \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \sum_{k} \lambda_{\nu k} \left| \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} - m_\nu \lambda_{\nu j} \right|^2 &= \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \sum_{k} \lambda_{\nu j} \frac{\lambda_{\nu j}}{\lambda_{\nu k}} \left| m_\nu \lambda_{\nu k} - 1 \right|^2 \\
\geqq \varepsilon^2 \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \sum_{k} \frac{1}{m_\nu} \left| (m_\nu \lambda_{\nu k})^{1/2} - 1 \right|^2 & \\
= \varepsilon^2 \sum_{\nu, j} \lambda_{\nu j} \left| \left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{1/2} - \lambda_{\nu j}{}^{1/2} \right|^2. &
\end{aligned}$$

(ここで，(9) より，$\lambda_{\nu j} \geqq \varepsilon / m_\nu$ が得られることを用いた。)

故に，II_1 型条件から，Lemma 2 の $(\mathrm{M})_\varepsilon$，したがって M が半有限ファクターであることが知られた．

よって，一般の場合に，(9) が成立つように問題を変形できればよい．

まず，§4 の最後の数行から，(8) と，

$$\sum_{v,j,k} \lambda_{vj} \lambda_{vk} \left| \exp\left(2\pi i t\left(\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}\right)\right) - 1\right|^2 < \infty \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

が同値であることになる．そこで，

$$\varphi_v^t = |\varphi_v^t| \exp\left(-2\pi i \beta_v^t\right) = \sum_k \lambda_{vk} \exp\left(-2\pi i t \log \lambda_{vk}\right)$$

とおくと，これから，

$$(10) \qquad \sum_{v,j} \lambda_{vj} \left| \exp\left(2\pi i t\left(\beta_v^t - \log \lambda_{vj}\right)\right) - 1\right|^2 < \infty \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

が導びかれる．

ここで，$t = 1/3$ として，この t に対して，

$$I'(v) = \left\{ j \,;\, \left| \exp\left(2\pi i t\left(\beta_v^t - \log \lambda_{vj}\right)\right) - 1\right| \geqq \frac{1}{2} \right\}$$

を考えれば，(10) から，

$$\sum_v \sum_{j \in I'(v)} \lambda_{vj} < \infty .$$

したがって，Lemma 3 を用いて，$I'(v)$ に属するものは除いてしまって，

$$\left| \exp\left(2\pi i t\left(\beta_v^t - \log \lambda_{vj}\right)\right) - 1\right| < \frac{1}{2} \quad (v = 1, 2, \cdots;\ j \in I(v))$$

が成立っているものとしておくことができる．このとき，

$$\left| \exp\left(2\pi i t\left(\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}\right)\right) - 1\right| < 1$$

であるから，適当な整数 n_{jk} に対して，

$$\left| 2\pi t\left(\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}\right) - 2 n_{jk} \pi \right| < \frac{\pi}{3}$$

が成立つ．$t = 1/3$ としていたのであったから，

$$\left| \left(\log \lambda_{vj} - \log \lambda_{vk}\right) - 3 n_{jk} \right| < \frac{1}{2} .$$

これから，$\{\lambda_{vj} \,;\, j \in I(v)\}$ はいくつかの組 $\{\lambda_{vj} \,;\, j \in I(v,p)\}$ $(p = 1, \cdots, l_v)$ に類別され，

(11)　同じ組の中では　$|\log \lambda_{\nu j} - \log \lambda_{\nu k}| < 1$,

違う組の間では　$|\log \lambda_{\nu j} - \log \lambda_{\nu k}| > 1$

が成立つことになる．この組の中で，有限個の ν を除いては，

$$\sum_{j \in I(\nu, p_\nu)} \lambda_{\nu j} \geqq \frac{1}{3}$$

を満たす p_ν が存在することが (8) を用いて知られる．この $I(\nu, p_\nu)$ を考えれば，やはり (8) を用いて，

$$\sum_{\nu} \sum_{j \notin I(\nu, p_\nu)} \lambda_{\nu j} < \infty.$$

したがって，Lemma 3 によって，$\{\lambda_{\nu j} ; j \in I(\nu, p_\nu)\}$ だけ考えればよいことになるが，このときは，(11) によって (9) が成立っていることになるから，既に示したところによって，M は半有限である．

詳細は，竹之内 [9]．

References

[1] H. Araki: A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field, Journal of Math. and Phys., Vol. 4 (1963), pp. 1343-1362.

[2] H. Araki and E. J. Woods: A classification of factors, To appear.

[3] D. J. C Bures: Certain factors constructed as infinite tensor products, Comp. Math., Vol. 15 (1963), pp. 169-191.

[4] S. Kakutani: On equivalence of infinite product measures, Ann. Math., Vol. 49 (1948), pp. 214-224.

[5] C. C. Moore: Invariant measures on product spaces, Proc. of the Fifth Berkeley Symposium, 1967. Vol. II, Part 2, pp. 447-459.

[6] L. Pukánsky: Some examples of factors, Publ. Math. Debrecen, Vol. 4 (1956), pp. 135-156.

[7] J. von Neumann: On infinite direct products, Collected Papers, Vol. 3, pp. 323-399.

[8] J. von Neumann: On rings of operators III, Collected Papers, Vol. 3, pp. 161-228.

[9] O. Takenouchi: On type classification of factors constructed as infinite direct products, To appear.