

## 数値実験—円柱を過ぎる定常流

愛媛大 教育 高石 頼三郎

### §1. はしがき

円柱を過ぎる一様流について、Navier-Stokes 方程式を数値的に取扱った論文は多数ある。しかしながらこれ等の論文では、明記されてゐない莫や、まだ十分に鮮明されてゐない莫もあるように思われるので将来の研究の資料として数値実験を行つてゐる。今迄に得られた結果について報告する。これらの中には当然と存されるものや、又数学的に十分説明のつかないものも含まれてゐるが、いわば台所の裏まじさうけだして記載することにした。この計算には愛媛大学計算機室の「HIPAC 103 Digital Computer」を使用した。本稿は浮動小数点莫については10進換算11桁の計算を行なう。

### §2. 基礎方程式とその変換

$\Psi$ : Stream function,  $L$ : Vorticity,  $R$ : Reynolds number.  
 $\Psi = y + \psi$ ,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  とおくと normalized N.S. eqn.

7.1

は

$$\frac{\partial(\psi, \xi)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{2}{R} \Delta \xi = 0, \quad (2.1)$$

$$\xi = -\Delta \psi. \quad (2.2)$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおき KAWAGUTI<sup>1)</sup> に従って

$$X = 1/r, Y = (2/\pi)\theta, \quad (2.3)$$

の変換を行なう。流れの対称性から、写像の関係は図1で示される。

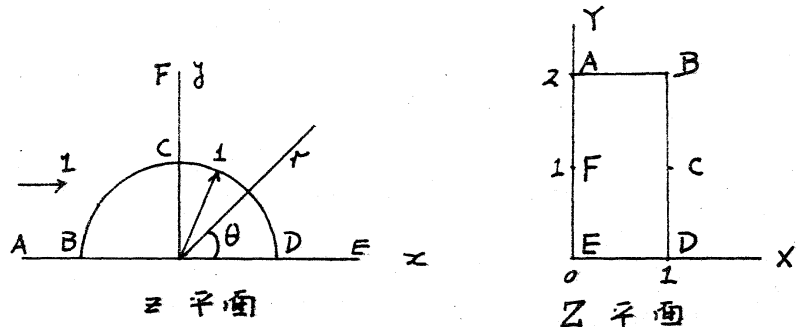


図 1

KAWAGUTI の変換は等角写像では... 此の変換後の微分方程式が複雑となり、又物体近傍の流線の明細を知るためには、細か... mesh に分割する必要がある等の難点はあるが、一方  $x \rightarrow \infty$  の境界条件が簡単に表現できる利点がある。APELT<sup>2)</sup> 等の変換では上記の難点は除かれるが  $r$  が十分大きいところの境界条件に extrapolation を用いることが必要となり、若干のあ... ま... が残る。特にこの点を考慮して KAWAGUTI 変換を選んだ。

mesh const.  $h$  も KAWAGUTI と同様 0.1 とした。

従って差分方程式も全く同じになる。計算の手順も KAWAGUTI  
と同じである。以下簡単のため、特に必要あるものの外は数  
式の記載を省略し  $\kappa(\cdot, \cdot)$  によって引用することとする。

### §3. 境界条件

$$\zeta(1, Y) = -200\psi(0.9, Y) - 222 \sin(\pi Y/2) + O(h), \quad \kappa(3.9):(3.1)_a$$

又は

$$\zeta(1, Y) = 50\psi(0.8, Y) - 400\psi(0.9, Y) + 382\psi(1, Y) + O(h^2), \quad (3.1)_b$$

$$\psi(1, Y) = -\sin(\pi Y/2), \quad \kappa(3.4):(3.2)$$

$$\zeta(0, Y) = 0, \quad \kappa(3.11):(3.3)$$

$$\psi(0, Y) = -Cd/2 \cdot (1 - Y/2), \quad \kappa(3.10):(3.4)_a$$

又は

$$\psi(0, Y) = 0. \quad (3.4)_b$$

ここから

$$\text{drag coeff.} \quad Cd = Cdp + Cdf, \quad (3.5)$$

$$\text{pres. drag coeff.} \quad Cdp = -\frac{\pi^2}{R} \int_0^2 \left\{ \int_Y^2 \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial X} \right]_{x=1} dY \right\} \cos(\pi Y/2) dY, \quad (3.6)$$

$$\text{frict. drag coeff.} \quad Cdf = -\frac{2\pi}{R} \int_0^2 \zeta(1, Y) \sin(\pi Y/2) dY. \quad (3.7)$$

### §4. 実験の主要実

- 1) 境界条件 (3.4)<sub>a</sub> は IMAI<sup>3)</sup> によって導かれたものであるが、半無限流体系のばあゝゝには類似の式が導かれてゝゝゝのゝ (3.4)<sub>b</sub> とおゝゝゝときと比較する。

- 2) KAWAGUTI は Wake の外で  $L > 0$  と仮定するとき物理的理  
 由からこれを  $L = 0$  とおく。しかし  $L > 0$  と仮定することは誤  
 差の累積によるものでこれを 0 とおくことは、誤差をある  
 量に定よせることになるのではなからと仮定  $L > 0$  のま  
 まに計算して比較する。
- 3) 数値計算においては使用する微分公式が結果に著しい影  
 響を及ぼす。式 (3.6)  $[2\frac{1}{2}x]_{x=L}$  の計算に BICKLEY の  
 の  $n$  次微分公式 ( $n=2, 3, 4, \dots, 7$ ) を用い結果を比較する。
- 4) (3.1)a は  $O(h)$  の誤差をもつ。  $O(h^2)$  の誤差の (3.1)b を  
 用いるときどうなるか検討する。

以上を考慮して、次の 4 つのばあいに分けた。

Case A:  $\psi(0, Y)$  として (3.4)a, Wake 外の  $L > 0$  を 0 とおく。

Case B:  $\psi(0, Y)$  として (3.4)b, Wake 外の  $L > 0$  を 0 とおく。

Case C:  $\psi(0, Y)$  として (3.4)a, Wake 外の  $L > 0$  をそのままと  
 する。

Case D:  $\psi(0, Y)$  として (3.4)b, Wake 外の  $L > 0$  をそのまま  
 とする。

なお式 (3.6) の  $\int_Y^2 \dots dY$  の計算には BICKLEY の 5 区間積分  
 公式と WEDDLE の 6 区間積分公式と組合わせ、又式 (3.6),  
 (3.7) の  $\int_0^2 \dots dY$  の計算には一貫して BICKLEY の 5 区間積  
 分公式を使用した。

§5. 実験の経過および注意した点

1) 先づ Case A, R=10, n=7 について,  
内部点の生成値として

$$\begin{aligned} \zeta(X, Y) = & -(11.7608 X^5 - 5.4504 X^7 - 0.2544 X^9) \sin(\pi Y/2) \\ & - (4.9068 X^2 - 24.5220 X^6 + 13.0688 X^8) \sin \pi Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(X, Y) = & -(2.2377 X - 1.4701 X^3 + 0.2271 X^5 + 0.0053 X^7) \sin(\pi Y/2) \\ & - (1.2267 - 2.8618 X^2 + 2.0435 X^4 - 0.4084 X^6) \sin \pi Y, \end{aligned}$$

を用いた。収束後の  $\zeta, \psi$  を生成値として、逐次 R の小さい方向、大きい方向への計算を行った。ただし R=60 より R=100 の計算には先づ R=80 とおき、収束に達する前に R=100 に変更して Reynolds 数の激変によって生ずる発散を防いだ。

2) 他のばあいについては 1) で計算した相対応する R の収束値を生成値として使用した。1) で未計算の R については 1) の方法を併用した。

3) Relaxation parameter  $\alpha, \beta$  を用いた。

$$\zeta(\text{新}) = \zeta(\text{旧}) + \alpha \{ \zeta(\text{計算値}) - \zeta(\text{旧}) \},$$

$$\psi(\text{新}) = \psi(\text{旧}) + \beta \{ \psi(\text{計算値}) - \psi(\text{旧}) \},$$

とした。

4) 繰返の回数: Cd は一種の減衰振動曲線となる。Cd が極値をとったばあいの  $\zeta, \psi, Cd$ , 繰返しの回数を引継いで 3回計算機に記憶させておいて

- (1) 才1回は KAWAGUTI に従って振中が等比級数的に減少するものと仮定し、
- (2) 才2回以後は振中が直線的に減少するものと仮定して、 $\sigma$  の収束するであろう値を計算し、これを新しい公差値として計算を行った。この方法は収束の加速には極めて有効であり又引續く極値によって収束の状態を判定することができた。
- 5) Case A,  $R=100$ ,  $n=3$ ; Case C; Case D については  $\kappa(6.1)$ ,  $\kappa(6.2)$  を組合わせて  $(0.9, 0.2)$ ,  $(0.9, 0.3)$  の座標をもつ円柱に接した2翼における Reynolds 数  $RM(X, Y)$  を計算し、これが  $|RM(X, Y)/R - 1| < \epsilon$ , ( $\epsilon = 10^{-5}$ ) に達したときを収束と判定した。

### §6. 結果および考察

1) Case A, Case B, Case D について (3.1)a を用いたのはあいの  $R$ ,  $Cd$ ,  $n$  の関係と、それぞれ表 1(A), 1(B), 1(D) に示す。いずれのばあいにも

(1)  $R$  が小さい間は  $n$  と  $Cd$  とはあまり関係しない。

(2)  $R$  が増すに従って  $n$  による  $Cd$  の変化が大きくなる。

その原因は  $R$  の増加と共に物体後方の乱れが大きくなるためと考えられる。当然 mesh 数にも関係するであろう。従ってこれ等の結果から  $n$  の最適値を早急に決めることは出

来るが差分式の精度を考慮して、以後の計算では  $n=3$  とおこなうとした。

R \ n	Cd						$\alpha$	$\beta$
	2	3	4	5	6	7		
4	4.744	4.721	-	-	-	4.730	0.5	.
10	2.957	2.919	-	-	-	2.927	0.3	.
20	2.184	2.132	-	-	-	2.152	0.3	.
30	1.863	1.803	-	-	-	1.833	0.3	.
40	1.622	1.562	-	-	-	1.641	0.2	0.7
60	1.369	1.318	-	-	-	1.340	0.1	0.5
100	-	1.126	-	-	-	0.757	0.05	0.4

表 1(A)

R \ n	Cd						$\alpha$	$\beta$
	2	3	4	5	6	7		
4	5.076	5.049	5.057	5.059	5.055	5.059	0.7	.
10	3.104	3.109	3.109	3.125	3.119	3.112	0.7	.
20	2.273	2.216	2.200	2.232	2.251	2.239	0.4	0.7
30	1.872	1.810	1.769	1.739	1.843	1.859	0.34	0.65
40	1.622	1.562	1.498	1.513	1.578	1.659	0.3	0.9
60	1.277	1.228	1.133	1.097	1.121	1.196	0.23	0.8
100	1.170	1.155	1.016	0.833	0.790	0.747	0.1	0.58

表 1(B)

R \ n	Cd					
	2	3	4	5	6	7
0.5	20.391	20.383	20.385	20.384	20.385	20.384
4	5.072	5.044	5.053	5.054	5.051	5.054
10	3.118	3.074	3.079	3.095	3.090	3.083
20	2.280	2.222	2.206	2.239	2.257	2.245
30	1.953	1.889	1.845	1.875	1.922	1.944
40	1.768	1.703	1.629	1.641	1.702	1.765
60	1.569	1.514	1.391	1.342	1.374	1.467
100	1.389	1.382	1.215	1.050	0.930	0.868

表 1(D) ; 本表は表 3(D)より抽出,  $\alpha, \beta$  は同表に全じ。

2) Case A,  $n=3$

について  $R: Cd$   
 曲線が  $R=100$   
 において他の  
 ばあ...と若干  
 相異している  
 よう見受けら  
 れたので収束  
 不十分と存之  
 $\alpha, \beta$  を変更  
 して計算を続  
 行したところ、  
 $Cd$  の値に急激  
 な変化を来じ  
 た。§5.5) の  
 判定条件のも

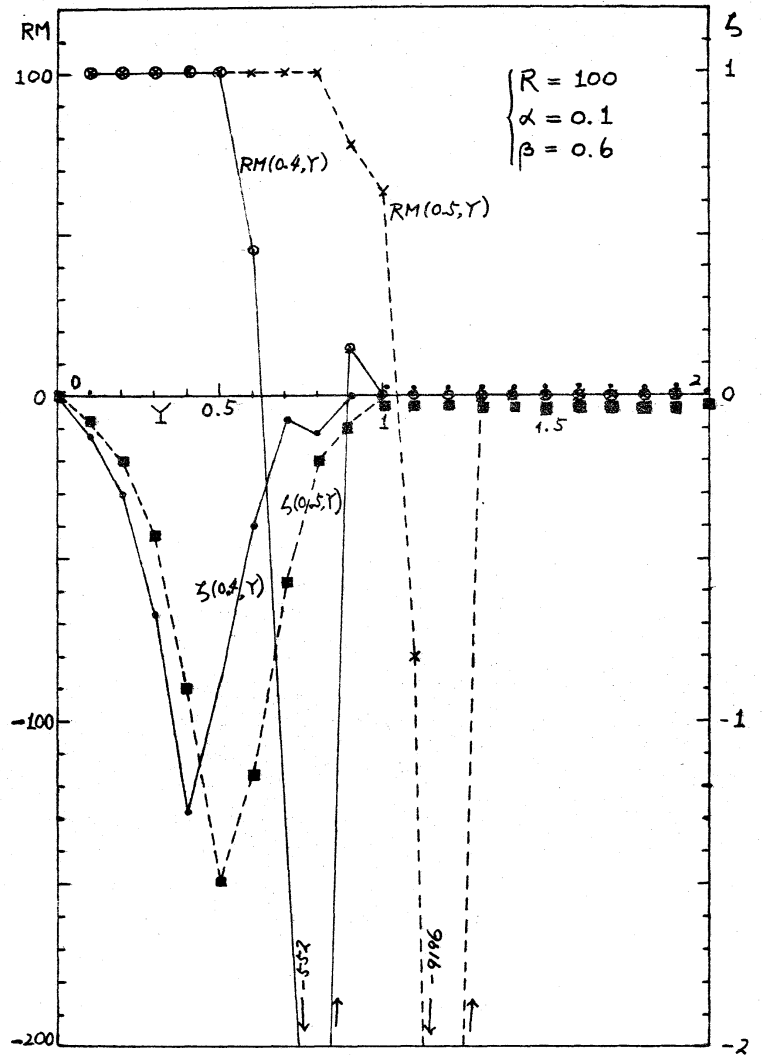


図 2-1

$\alpha$	$\beta$	$Cd$ 収束値	収束前の $Cd$ の極値			$RM(X, Y)$ の 平均値
0.1	0.6	1.16871	1.1687442	1.1686949	1.1687163	- 8.84567
0.04	0.4	1.24565	1.2456361	1.2456560	1.2456468	57.46952

表 2



とに相異なす $\alpha$ ,  
 $\beta$ を用い、収束し  
 た  $Cd$  の値、収束  
 前の引籠く3回  
 の  $Cd$  の極位、  
 収束したときの  
 内部格子差にお  
 ける  $RM(X, Y)$  の  
 平均値を表すに、  
 又  $X=0.4$  およ  
 び  $0.5$  の断面に  
 おける  $\zeta$ ,  $RM$  対  
 $Y$  の関係を図2-1,  
 2-2 に折線が  
 ラフで示す。

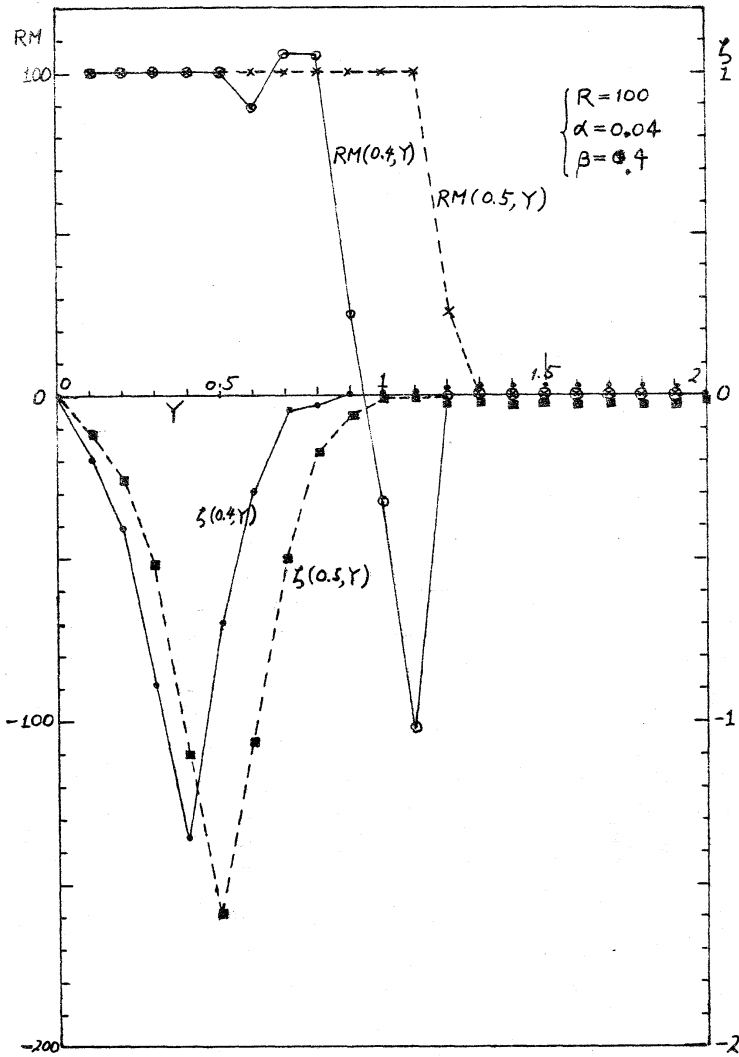


図 2-2

これらの資料

が wake の外の  $\zeta > 0$  と  $0$  とお... 互の誤差がこれらの差  
 に集積し、その集積の仕方が  $\alpha, \beta$  によって変化し、 $Cd$  の値に  
 関係する。従ってこの方法によるときは解の一意性は失われ  
 るのではな... かと推定せられる。以後  $\zeta > 0$  とそのまま計  
 算する Case C, Case D に限ることとする。

3) Case C, Case D について  $n=3, R=0.5, 1, 2, \dots, 100$  の計算結果を表 3(C), 3(D) に示す。

(1) 収束の判定には §5.5) を用いた。

(2) R 欄の (40) は (3.1)b を、その他は (3.1)a を使用した。両者の差は僅少である。

(3) Cd の  $\alpha, \beta$  に対する依存性を調べるために、収束後  $\alpha \rightarrow \alpha - 4d\alpha$ ,

$$\beta \rightarrow \beta - 4d\beta$$

とおいこ 50 回の計算を行ったが Cd の変化は生じなかった。

(4) 図 3(C), 3(D) は  $R=100$  のばあいの  $X=0.4, 0.5$  断面における RM

対 Y を折線グラフで示した。(図 2-1, 2-2 と比較参照)

R	RM(X, Y)									
	$\alpha$	$\beta$	$d\alpha$	$d\beta$	Cd	Cap/Cdf	平均値	最大値 (座標)	最小値 (座標)	
0.5	0.55	0.95	0.05	0.05	17.080	1.007	0.50000	0.50004(.8, 1.1)	0.49996(.5, 1.1)	
1	0.6	1	0.05	0.05	11.054	1.023	1.00000	1.00084(.9, 1.2)	0.99989(.6, 1.1)	
2	0.6	1	0.05	0.05	7.261	1.055	1.99999	2.00016(.7, 1.2)	1.99978(.8, 1.2)	
4	0.6	0.9	0.05	0.05	4.719	1.118	4.00000	4.00000(.8, 1.2)	3.99991(.9, .1)	
6	0.5	1	0.05	0.05	3.782	1.177	6.00000	6.00001(.9, 1.2)	5.99999(.9, .3)	
8	0.4	1	0.05	0.05	3.269	1.233	8.00005	8.00764(.8, .2)	7.99941(.9, .3)	
9	0.4	1	0.05	0.05	3.083	1.260	9.00000	9.00009(.9, .3)	8.99997(.9, .3)	
10	0.4	0.8	0.05	0.05	2.928	1.286	10.00000	10.00049(.7, .1)	9.99997(.8, .1)	
15	0.3	1	0.03	0.05	2.417	1.408	15.00016	15.02414(.6, .1)	14.99773(.7, .3)	
20	0.2	0.8	0.02	0.05	2.133	1.520	19.99997	20.00058(.9, .1)	19.99657(.8, .1)	
25	0.14	0.65	0.02	0.05	1.950	1.626	25.00004	25.00220(.5, .2)	24.99801(.8, .1)	
30	0.14	0.8	0.01	0.05	1.819	1.727	30.00000	30.00022(.8, .5)	29.99970(.9, .2)	
40	0.1	0.8	0.01	0.05	1.641	1.921	39.99994	40.00373(.7, .1)	39.99192(.6, .4)	
(40)	0.1	0.8	0.01	0.05	1.639	1.915	40.00018	40.03482(.6, .4)	39.99492(.8, .5)	
45	0.06	0.8	0.005	0.05	1.580	2.015	45.00016	45.04071(.4, .2)	44.98496(.8, .2)	
60	0.06	0.8	0.005	0.05	1.459	2.298	59.99994	60.00200(.8, .2)	59.98881(.7, .5)	
100	0.04	0.6	0.005	0.05	1.331	3.069	100.00018	100.02587(.8, .6)	99.99819(.8, .2)	

表 3(C)

(5) 図4に表3(C),3(D)のR対Cd曲線とTRITTON<sup>8)</sup>の実験, TOMOTIKA-AOI<sup>5)</sup>によるOSEEN<sup>4)</sup>の近似と差を示した。又同図には  $Cd_p/Cd_f$ ,  $\left\{ \frac{Cd(\text{Case D})}{Cd(\text{Case C})} - 1 \right\} \times 100$  とRとの関係を示してある。

CdはCase Dの方がCase Cより大で、その割合はRと共に減少しR=0.5で19.4%, R=100で3.8%である。又OSEEN<sup>4)</sup>の近似が妥当と考えられるRの範囲ではCase DはOSEEN<sup>4)</sup>の近似より大きく、Case Cは小さくなっている。これに対して

(A) Case CとCase Dは全く別の問題と取扱っている。

R	α	ρ	dx	dB	Cd	Cd/Cd <sub>f</sub>	RM(X,Y)	
							平均値	最大値(座標)
0.1	0.6	1	0.05	0.05	20.383	1.009	0.50000	0.49859(.7, 1.1)
1	0.6	1	0.05	0.05	12.614	1.026	1.00000	1.00013(.8, 1.2)
2	0.6	1	0.05	0.05	7.956	1.060	2.00001	2.00001(.8, 1.2)
4	0.6	1	0.05	0.05	5.044	1.124	4.00000	4.00013(.8, 1.1)
6	0.5	1	0.05	0.05	4.007	1.185	6.00000	6.00010(.9, 1.3)
8	0.4	1	0.05	0.05	3.446	1.242	7.99997	8.00117(.8, 1.1)
9	0.4	0.8	0.05	0.05	3.243	1.269	8.99999	9.00178(.8, 1.2)
10	0.4	0.8	0.05	0.05	3.074	1.295	10.00001	10.00063(.8, 1.3)
15	0.3	0.8	0.03	0.05	2.524	1.418	14.99993	15.00363(.7, 1.3)
20	0.2	0.8	0.02	0.05	2.222	1.531	20.00000	20.00201(.9, 1.5)
25	0.14	0.8	0.02	0.05	2.208	1.639	24.99997	25.00303(.9, 1.5)
30	0.14	0.8	0.01	0.05	1.889	1.741	30.00000	30.00124(.8, 1.5)
40	0.1	0.8	0.01	0.05	1.703	1.937	39.99997	40.00591(.8, 1.5)
(40)	0.1	0.8	0.01	0.05	1.700	1.930	40.00009	40.00907(.8, 1.5)
45	0.06	0.8	0.005	0.05	1.638	2.033	45.00001	45.00170(.8, 1.5)
60	0.06	0.8	0.005	0.05	1.514	2.320	59.99990	60.00303(.9, 1.5)
100	0.04	0.6	0.005	0.05	1.382	3.105	100.00000	100.00183(.8, 1.5)

表 3(D)

(B) Case C  
 と Case D は mesh  
 数を増加すれば  
 同一の Cd を與え  
 る。  
 この 2 説があ  
 る。  $R=0.5$ , mesh  
 const.  $h=0.05$  へ  
 ついて計算した  
 結果  
 Case C:  $Cd=17.406$   
 Case D:  $Cd=19.193$   
 となり (B) 説を  
 支持してゐるよ  
 うに見受けられ  
 る。

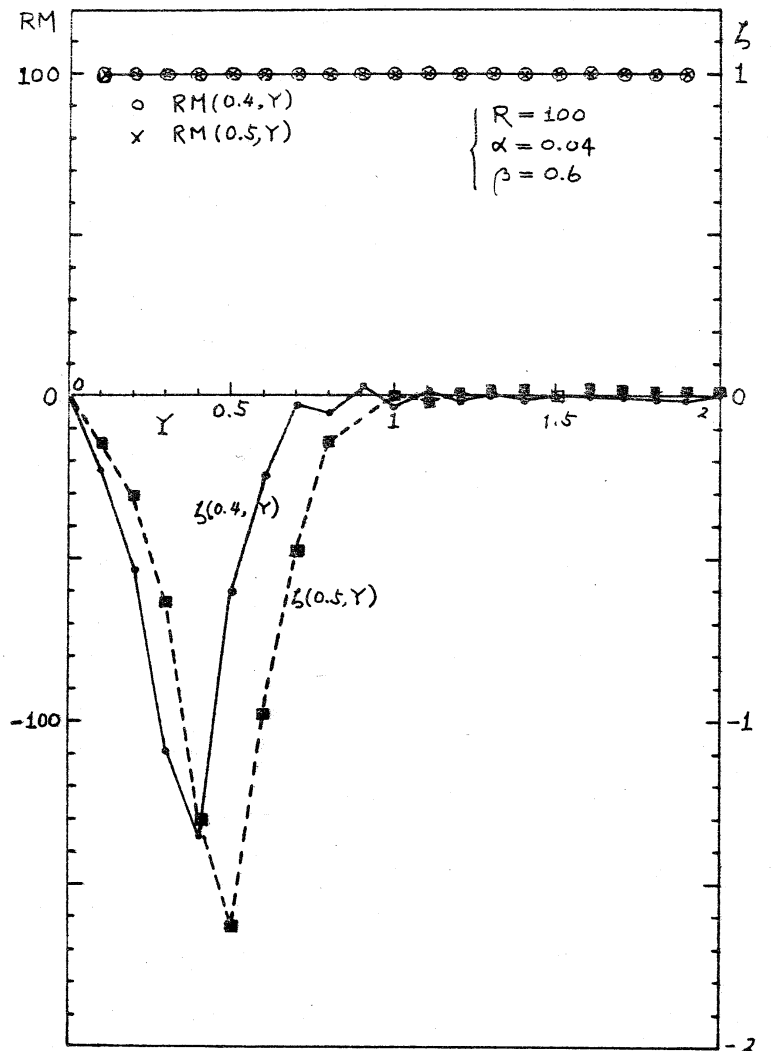


図 3 (C)

- (6)  $Cd_p / Cd_f$  については Case C, Case D について大差がない。
- (7) 表 3 (C), 3 (D) には内部格子数 171 個についての  $RM(X, Y)$  の平均値,  $RM(X, Y)$  の最大値, 最小値およびそれらが現われる座標  $(X, Y)$  を示してある。これらの値より判断して収束は十分であると考えられる。

4) 図5に  
 $R$  対  $\Psi(0.9, 0.1)$   
 の関係を示す。  
 曲線が  $R$  軸を切  
 る点が定常渦を  
 生じる限界  
 Reynolds 数と異  
 なるものと考へ  
 られるが case C,  
 case D とは  $R \approx 9.4$   
 となり TANEDA<sup>6)</sup>  
 の実験と一致し  
 ぬ。  $\Psi(0.9, Y)$   
 を正弦フーリエ  
 級数と表わし  
 $\Psi(0.9, 0.01)$  を求

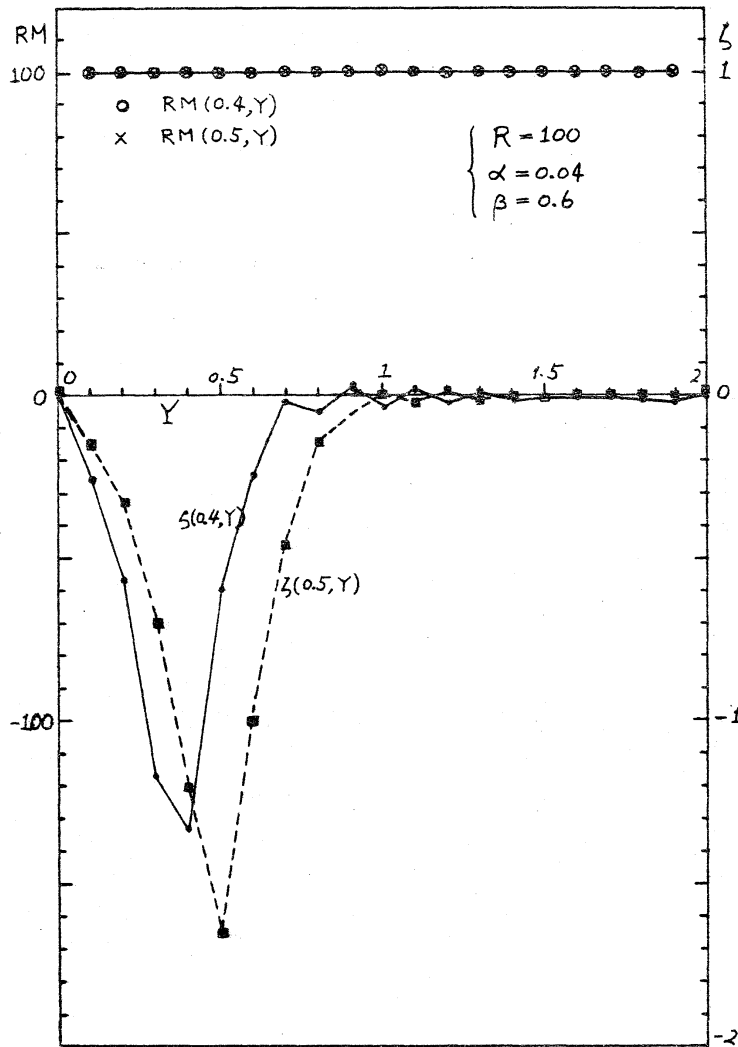


図 3 (D)

の同様の考察を行つたが変化は生じなかつた。実験との相異  
 は mesh の粗さによるものと考へられる。

5) 図6に  $R$  対  $C_p(1.2) - 1$  を図示。TAKAMI<sup>7)</sup> の結果と異  
 一致しない。

6) 図7に  $R$  対  $C_p(1.0)$  を図示。  $R \approx 35$  付近に極小値を

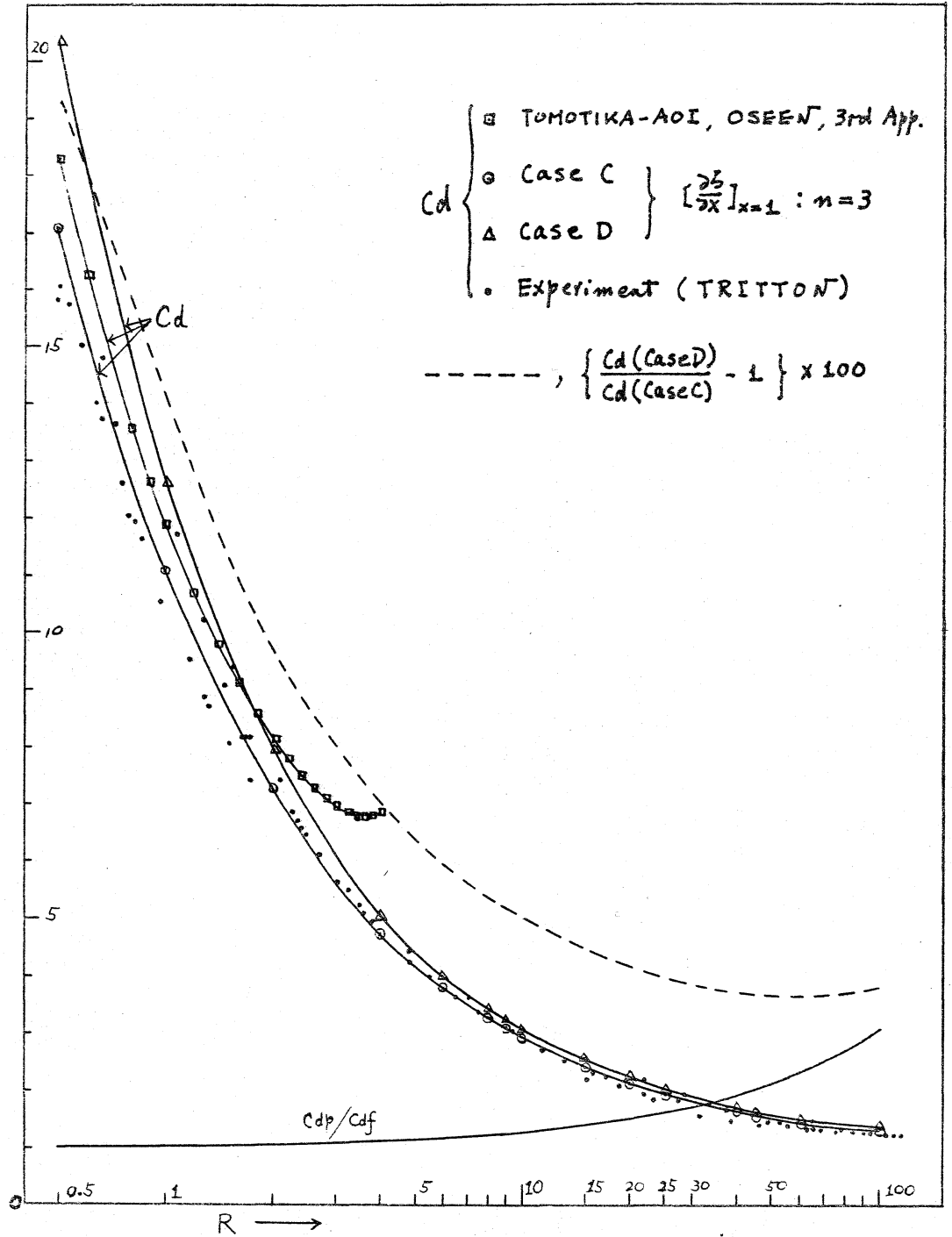


図 4

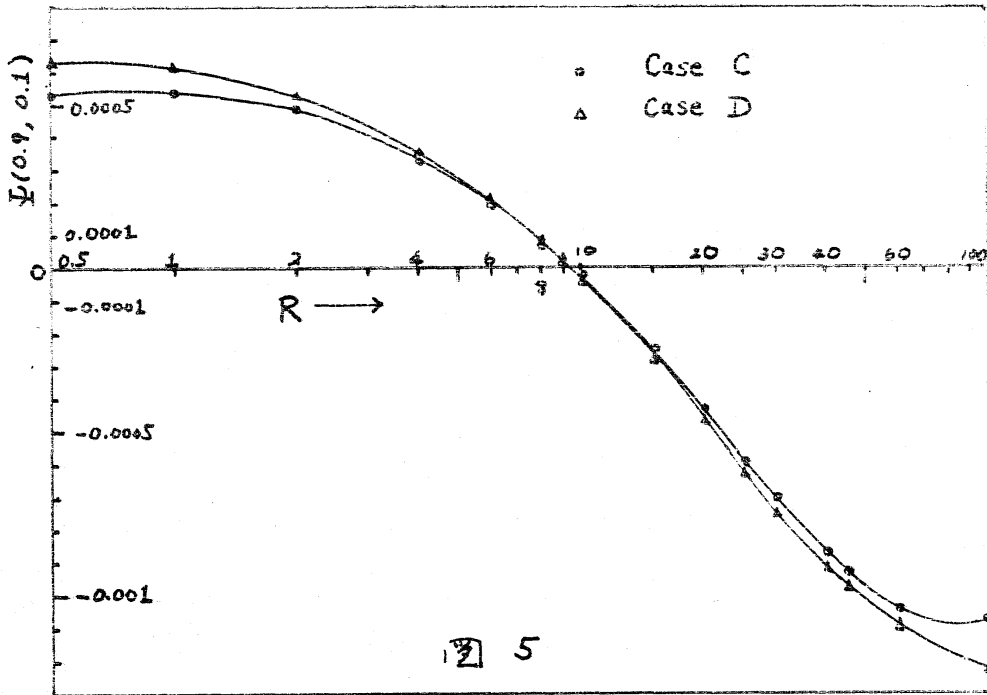


图 5

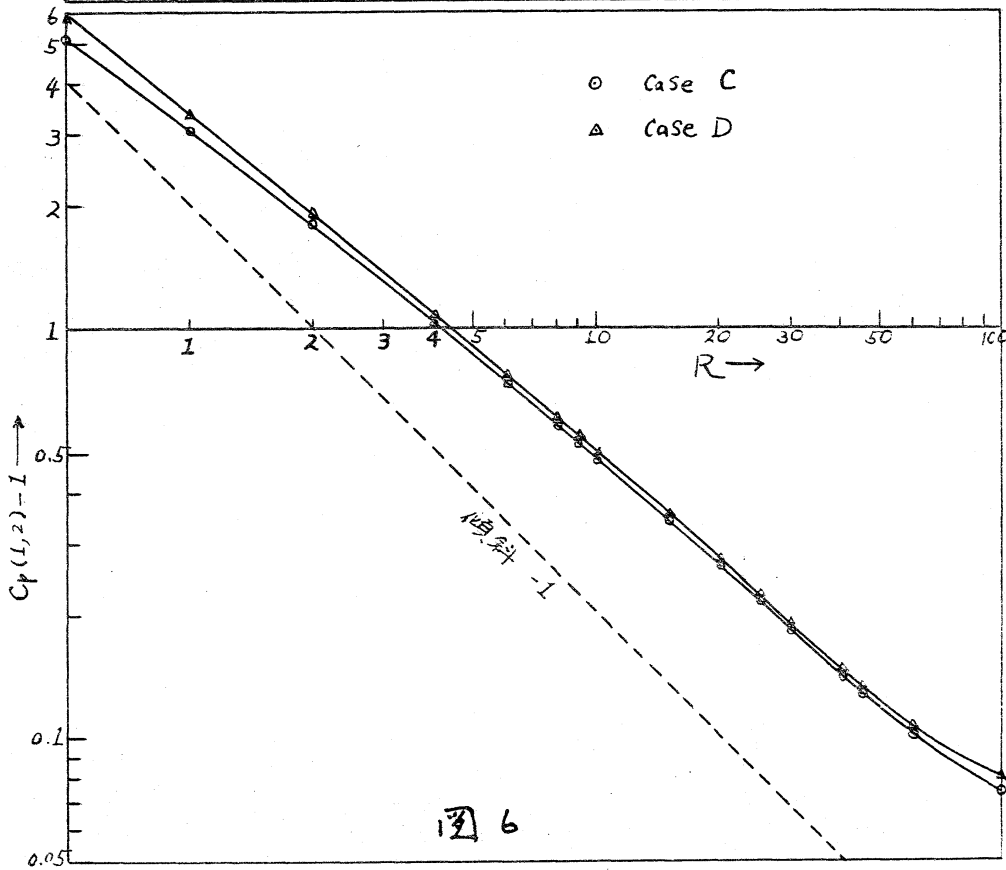


图 6

ち  $R$  の増加と共に再び増加し TAKAMI の結果と相異してゐる。  
 mesh の粗さによる原因するのじあるう。

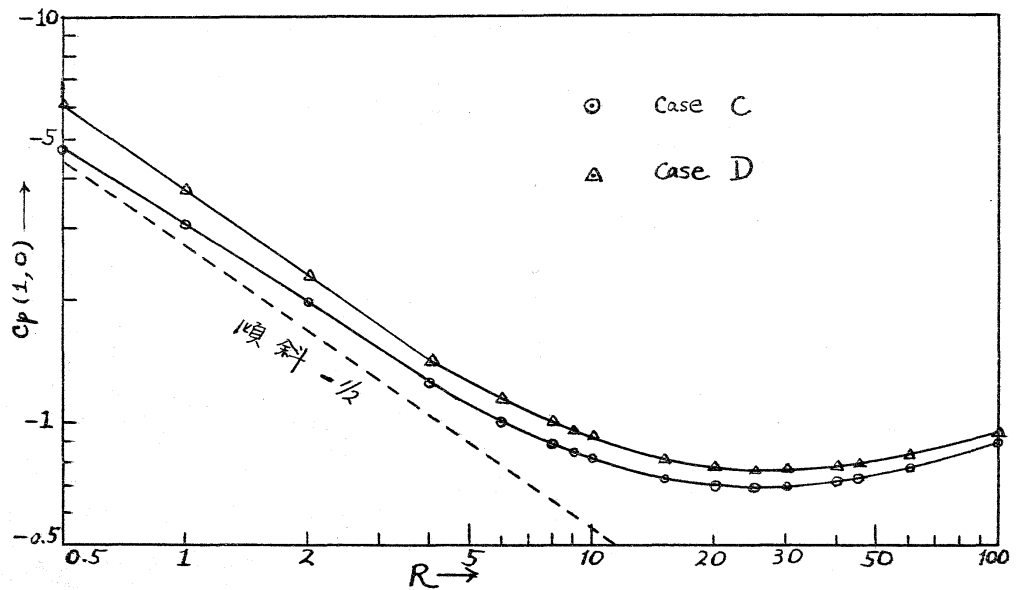


図 7

以上の実験がう早急に確定した結論を得ることは出来な  
 が

- (1) wakeの外では  $> 0$  となったとき  $0$  とおく Case A, Case B  
 の方法には 1, 2 の問題がある。
- (2) 数値計算においては高精度の微分公式を使用するより  
 も差分近似式と同精度の式を使用すべきじあるう。
- (3) N.S. equ. は  $R=100$  においても定常解をもつじあるう。
- (4)  $\psi(0, Y)$  として (3.4) a, (3.4) b の何れを用いても同一の  
 結果を得るのじあるう。

と予想される。(3), (4)については更に mesh 数を増して確認



する必要がある。

この論文は 1966年12月のシンポジウムで Dr. KAWAGUTI に、  
又 1967年7月のシンポジウムで Dr. TAKAMI に代読して……に  
……に講演を補足訂正したものである。

計算に対しては滞米中であつた Dr. KAWAGUTI より屢々有益な  
助言を……にでき、又 Dr. TAKAMI よりもシンポジウムの  
前後にわたつて屢々有益な助言や情報の伝達を……に……に。  
両博士に深甚の謝意を表する次第である。

### 文 献

- 1) M. KAWAGUTI ; J. Phys. Soc. Japan , 8 (1953)
- 2) C. J. APELT ; A.R.C. Tech. Rep. R. & M. No. 3175 (1961)
- 3) I. IMAI ; Proc. Roy. Soc. London, A208 (1951)
- 4) W. G. BICKLEY ; Math. Gazette , 23 (1939)
- 5) S. TOMOTIKA and T. AOI ; Quart. J. Mech. App. Math. 3 (1950)
- 6) S. TAVEDA ; J. Phys. Soc. Japan , 11 (1956)
- 7) H. TAKAMI ; 数理解析研究所講究録 NO. 24 (1967)
- 8) D. J. TRITTON ; J. Fluid Mech. 6 (1959)