数理解析研究所講究録
第53巻 1968年 114-165

Group prescheme 係数の cohomologies について.

京大理　宮西正直

Introduction. この小論で，我々は prescheme X 上の X-group prescheme G を係数とする幾つかの Grothendieck cohomologies について触れよう。X 上の Brauer 群 $Br(X)$ を調べるためには $H^2(X_{\acute{e}t}, G_m)$（2nd étale cohomology）が大事であるが，我々は $G = G_{m,X}$ のみならず，一般の group prescheme について，$X_{\acute{e}t}$ のみならず，他の topology とも眺め，それらの topology に関する cohomologies と比較する。そのために §1 に於いて，Grothendieck topology の定義及び簡単な諸結果を思い出す。§2 に於いては，具体的な G について各 cohomology を比較した結果を示す。§3 に於いては X 上の各 topology での cohomological dimension について種々の結果を紹介する。§4 に於いては，SGAA 等に於いて知られている重要な étale cohomology に関する結果及び group prescheme に関する結果を与える。

§1. Grothendieck topology の定義及びその topology に

関する cohomology について、特に Leray spectral sequence, Hochschild-Serre の spectral sequence 又は Giraud の gerbe, lien 等の紹介.

§2 group prescheme 係数の各 cohomologies の比較.

§3. Cohomological dimension について.

§4. Etale cohomology についての重要な結果について.

その結果の豊富さ，又古典的な結果を包含することに於いても Etale cohomology は，他の cohomologies に較べて中心的である．しかしより新しく，一般的な結果は (fppf)- 又は (fpqc)- cohomology に求められる必要があると考える．その意味に於いて，§2，§3 の結果は不足であり，更に refine されねばならない。特に §3 の結果を prescheme X 上の (fppf)- 又は (fpqc)- topology で考えられた結果に拡張することについては，別の機会に取り上げたいと思う．

§1. Grothendieck topology の定義及びその topology に関する cohomology. 特に Leray Spectral Sequence, Hochshild-Serre Spectral Sequence 及び Giraud の gerbe, lien の紹介.

これらの結果は文献が豊富であるから，原則として証明は与えない.

1.1. Grothendieck topology T は category $\mathrm{Cat}\,T$ 及び coverings の集合 $\mathrm{Cov}\,T$ より成り，次の条件を満たす：

(i) ϕ : isomorphism $\in \mathrm{Cat}\,T \Longrightarrow \{\phi\} \in \mathrm{Cov}\,T$.

(ii) $\{U_i \longrightarrow U\}_i$, $\{V_{ij} \longrightarrow U_i\}_j \in \mathrm{Cov}\,T \Longrightarrow \{V_{ij} \longrightarrow U\}_{ij} \in \mathrm{Cov}\,T$

(iii) $\{U_i \longrightarrow U\}_i \in \mathrm{Cov}\,T$, $V \longrightarrow U \in \mathrm{Cat}\,T \Longrightarrow \exists\ U_i \times_U V \in \mathrm{Cat}\,T$

かつ $\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_i \in \mathrm{Cov}\,T$.

prescheme X 上の (fpqc)-topology (resp. (fppf)-topology, étale topology, étale finite topology, Zariski topology) は次の 2 種の open coverings によって生成される：

1) $\{U_\lambda \longrightarrow X\}_\lambda$: open set U_λ から X への open immersion $U_\lambda \longrightarrow X$ の集合で，$\bigcup U_\lambda = X$ を満たす.

2) $\{V_i \xrightarrow{f_i} U\}_i$: flat, quasi-compact (resp. flat, of finite presentation, étale, étale finite, ϕ) morphism f_i の有限集合で $\bigcup f_i(V_i) = U$.

この時上記の topologies の間には (fpqc) $\geqslant$ (fppf) $\geqslant$ (étale) $\geqslant$ (étf) $\geqslant$ (Zariski) なる関係がある。但し $\geqslant$ はその左辺の topology が右辺のものより細かい事を示す。X に上記の topology を付けかえた時 X を (fpqc)- (resp. (fppf)-, étale, (étf)-, Zariski) site と呼び, X_{pq} (resp. X_{pf}, X_{et}, X_{etf}, X_{zar}) で表わす。

X_{pq} (resp. X_{pf}, X_{et}, X_{etf}, X_{zar}) 上の集合 (group, abel 群, ring) の sheaf とは, X_{pq} (resp. X_{pf}, X_{et}, X_{etf}, X_{zar}) より, category (Sets) ((Gp), (Ab), (Rings)) への contravariant functor F で, 上記 1), 2) の集合の族に対して,

a) $$F(X) \longrightarrow \prod_\lambda F(U_\lambda) \rightrightarrows \prod_{\lambda,\mu} F(U_\lambda \cap U_\mu) \quad : \text{exact}$$

b) $$F(U) \longrightarrow \prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(V_i \times_U V_j) \quad : \text{exact}$$

を満たすものである。X_{pq} 上の集合の sheaves のなす category を $X_{pq}^{\sim}$, abel groups の sheaves のなす category を $X_{pq}^{\sim,ab}$, X_{pq} 上の rings ($\ni 1$) の sheaf A について, A-modules の sheaves のなす category を $X_{pq}^{\sim,A}$ と表わしたりする。X_{pf}, X_{et} 等についても同様の記号を使う。

例えば, X_{pq} 上の (Sets)-valued contravariant functor G について, G より次の様にして, (Sets)-valued sheaf aG が作られる:

$$LG(U) = \varinjlim_{\substack{\{U_\alpha \to U\} \\ \text{open covering}}} \operatorname{Ker}\Big(\prod_\alpha G(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} G(U_\alpha \times_U U_\beta)\Big), \quad aG = L(LG).$$

(LG を G の separated presheaf という時がある.)

この時, functor $G \longmapsto aG$ は finite projective limits 及び inductive limits と可換である.

1.2. $f : X \longrightarrow Y$ を preschemes の morphism とする. 例えば (fpqc)-topology について, sites X_{pq}, Y_{pq} の間に sites の morphism $f_{pq} : X_{pq} \longrightarrow Y_{pq}$, $(Y' \xrightarrow[fpqc]{} Y) \longmapsto (Y' \times_Y X \to X)$ がある, (cf. SGAA, III, 2.7). 従って X_{pq}, Y_{pq} 上の, 例えば, abelian sheaves の topos の間に direct image functor f_*, inverse image functor f^* が定まる;

$$X_{pq}^{\sim,ab} \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} Y_{pq}^{\sim,ab} .$$

具体的には, 次の様にかける;

$$f_*(F)(Y') = F(X \times_Y Y'), \quad F \in X_{pq}^{\sim,ab}, \quad Y' \in \mathrm{Cat}(Y_{pq}),$$

$$f^*(G)(X') = \varinjlim_{\{V_\lambda \to Y\} \in J(X'/Y)} \mathrm{Ker}\left(\prod_\lambda G(V_\lambda) \rightrightarrows \prod_{\lambda,\mu} G(V_\lambda \times_Y V_\mu) \right)$$

但し, $G \in Y_{pq}^{\sim,ab}$, $J(X'/Y)$ は $\mathrm{Cov}(Y_{pq})$ の open covering $\{V_\lambda \to Y\}$ で $\left\{ \begin{tikzcd} V_\lambda \times_Y X \arrow[r] & X \\ X' \arrow[u] \arrow[ur] \end{tikzcd} \right\}$ となるもののなす category.

f^*, f_* は互いに adjoint な pair をなす. (fpqc)-topology 以外の topology でも, 同様の事柄が成立する.

又 X_{pq}, X_{pf}, X_{et}, X_{etf}, X_{Zar} の間にも sites の morphisms

が考えられる．例えば，X_{pl}, $X_{\acute{e}t}$ について言えば，

$$p : X_{pl} \longrightarrow X_{\acute{e}t}$$

（étale topology での open covering を自然に (fppf)-topology の open covering とみる morphism．）がある．従って

$$X_{pl}^{\sim, ab} \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} X_{\acute{e}t}^{\sim, ab}$$

が考えられる．$X_{pl}^{\sim, ab} \ni F$ と $p_* F$ と同一視することにより，自然に étale sheaf と考えられる．同様にして，X上の各種の sheaves に対して，次の inclusions がある．

$(Sch/_X) \subseteq$ (fpqc-sheaves) $\subseteq$ (fppf-sheaves) $\subseteq$ (étale sheaves) $\subseteq$ (étf-sheaves) $\subseteq$ (Zariski sheaves)．

上段左の inclusion は (fpqc)-morphism が preschemes の morphisms のなす fibre category について effective descent morphism であることによる．

1.3. Cohomologies. $X_{pq}^{\sim, ab}$, $X_{pl}^{\sim, ab}$, $\cdots$, $X_{Zar}^{\sim, ab}$ を考える．例えば $X_{pq}^{\sim, ab}$ について，これが generator を持ち，(filtered) inductive limits が exact functor である abelian category であることは容易に見られるから，十分に多くの injective objects をもつ category である．従って $F \in X_{pq}^{\sim, ab}$ は injective resolutions をもつ．この時 functor $F \rightsquigarrow F(X)$ の q-th right derived functor を $H^q(X_{pq}, F)$ とかく．

morphism $f : X \longrightarrow Y$ について, direct image functor $f_* : X_{pq}^{\sim,ab} \longrightarrow Y_{pq}^{\sim,ab}$ は $X_{pq}^{\sim,ab}$ の injective object I を $Y_{pq}^{\sim,ab}$ の acyclic object $f_* I$ (i.e. $H^q(Y_{pq}, f_* I) = 0$, $\forall q > 0$) に移す, (cf. SGAA. V, 3.8 & 3.9). 今 $F \in X_{pq}^{\sim,ab}$ について, functor $F \longmapsto f_* F$ の q-th right derived functor を $R^q f_{pq,*} F$ と書く. $R^q f_{pq,*} F$ は presheaf $Y' \longmapsto H^q((X \times_Y Y')_{pq}, F)$ の associated sheaf である. 上記の acyclicity に関する事柄を使えば, composite morphism $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ について, Leray の spectral sequence

(I) $\quad E_2^{p,q} = R^p g_{pq,*} R^q f_{pq,*} F \Longrightarrow R^*(gf)_{pq,*} F, \quad F \in X_{pq}^{\sim,ab},$

が得られる. 又同様に spectral sequence

(II) $\quad E_2^{p,q} = H^p(Y_{pq}, R^q f_{pq,*} F) \Longrightarrow H^*(X_{pq}, F), \quad F \in X_{pq}^{\sim,ab}$

の存在もわかる.

次に Čech cohomology を定義しよう. 上と同様に X_{pq} を例にとって, $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \longrightarrow X\}$ をその open covering とする. この時, semi-simplicial complex

$$\prod_\lambda F'(U_\lambda) \rightrightarrows \prod_{\lambda,\mu} F'(U_\lambda \times_X U_\mu) \rightrightarrows \prod_{\lambda,\mu,\nu} F'(U_\lambda \times_X U_\mu \times_X U_\nu) \rightrightarrows \cdots\cdots$$

を考える. 但し F' は X_{pq} の (Ab)-valued contravariant functor である. この complex の q-th cohomology を $H^q(\mathfrak{U}, F')$ と書こう. $\check{H}^q(X_{pq}, F') = \varinjlim_{\mathfrak{U} \in \mathrm{Cov}(X)} H^q(\mathfrak{U}, F')$ によって定義し, F' の q-th Čech cohomology と呼ぶ. この時 Čech cohomology と ordinary cohomology の間に,

次の spectral sequence が存在する，

(III) $E_2^{p,q} = \check{H}^p(X_{pq}, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^*(X_{pq}, F)$

但し $F \in X_{pq}^{\sim, ab}$, $\mathcal{H}^q(F)$ は X_{pq} 上の $X' \rightsquigarrow \mathcal{H}^q(F)(X') = H^q(X'_{pq}, F)$ なる contravariant functor である，(cf. SGAA, V, 2.5). Spectral sequence (III) は spectral sequence

(III') $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^*(X_{pq}, F)$

の inductive limit として得られる．(III') に於いて，$\mathfrak{U}$ が 1 つの morphism $Z \longrightarrow X$ から成り，更に Z が X 上 pre-group scheme G の principal homogeneous space (i.e. ∃ G の action $\sigma : G \times Z \to Z$, such that $(\sigma, pr_2) : G \times Z \xrightarrow{\sim} Z \times_X Z$) であれば，(III') は次の spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(G_Z, \mathcal{H}^q(F)_Z) \Longrightarrow H^*(X_{pq}, F)$$

となる．但し $H^p(G_Z, \mathcal{H}^q(F)_Z)$ は group functor G_Z の cohomology, (cf. SGAD, I). 特に G が abstract finite group であれば，Hochshild-Serre の spectral sequence

(III'') $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(Z_{pq}, F)) \Longrightarrow H^*(X_{pq}, F)$

が得られる．

(III) から写像 $\Phi^p : \check{H}^p(X_{pq}, \mathcal{H}^0(F)) \longrightarrow H^p(X_{pq}, F)$ が導かれるが，定義自身により Φ^0 が，又 $a\mathcal{H}^0 = id_{X_{pq}^{\sim, ab}}$ かつ a が exact functor であることにより $a\mathcal{H}^p = 0$，従って Φ^1 がそれぞれ isomorphism となる．Φ^2 はこの時 monomorphism となる．

又 $\mathcal{H}^i(F)=0$, $0<i<n$ が成立するならば, Φ^p $(0\leq p\leq n)$ が isomorphism, Φ^{n+1} が monomorphism となるのは明らかである.

次に X 上の 2 つの sites の cohomologies を結ぶ spectral sequence を与えよう. 例として, $X_{pe} \xrightarrow{p} X_{et}$ を取り上げよう. この時 p_* は $\tilde{X}_{pe}^{ab}$ の acyclic object を $\tilde{X}_{et}^{ab}$ の acyclic object に移す, (cf. SGAA, V, 3.3). $F\in \tilde{X}_{pe}^{ab}$ について $(p_*F)(X) = F(X)$ であるから, composite functor の spectral sequence より spectral sequence,

$$\text{(IV)} \qquad E_2^{p,q} = H^p(X_{et}, R^q p_* F) \Longrightarrow H^*(X_{pe}, F)$$

が得られる. 1.3 に於いて X_{pq}, $X_{pe} \xrightarrow{p} X_{et}$ について述べられた定義と結果は, X_{pq}, X_{pe}, X_{et}, X_{etf}, X_{zar} 及びこれらの可能な任意の pair について成立する事柄である.

1.4. Strict henselization と étale sheaf の geometric fibre について.

Henselian local ring 及び local ring の henselization, strict henselization については, EGA, IV, §18 に詳述されているので以下では, 後に必要な記述のみにとどめる.

1.4.1. A を local ring, $\mathfrak{m}$ をその maximal ideal とする.

(i) 先ず次の条件は同値である.

(イ) A : henselian local ring, i.e. 任意の finite A-algebra

B は local components の product.

(ロ) $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$, $k = A/\mathfrak{m}$ とする. 任意の étale morphism $g : S' \longrightarrow S$ について, $S'_0 = S' \times_S S_0$ とする. この時,

$$\Gamma(S'/S) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S'_0/S_0).$$

但し morphism $X \longrightarrow Y$ について, $\Gamma(X/Y)$ で X の Y-sections 全体を表わす.

(ハ) (Hensel の lemma). 任意の A-係数 1 変数 monic polynomial $F \in A[T]$ について, F_0 (= F の image in $k[T]$) が $F_0 = G_0 \cdot H_0$, $G_0, H_0 \in k[T]$, $G_0 k[T] + H_0 k[T] = k[T]$ と分解されるならば, $^{\exists} G, H \in A[T]$, $F = G \cdot H$, $GA[T] + HA[T] = A[T]$ と出来る.

(ニ) 任意の locally of finite type な morphism $f : X \longrightarrow S$ について, f が X の点 x で quasi-finite かつ $f(x) = S_0$ であれば, $\mathcal{O}_{X,x}$ は finite A-algebra である.

(ii) $f : X \longrightarrow S$ を smooth morphism とする. $X_{S_0} = f^{-1}(S_0)$ とする. 但し S, S_0 については, (i), (ロ) に同じである. この時,

$$\Gamma(X/S) \longrightarrow \Gamma(X_{S_0}/S_0)$$

は surjective である.

(iii) local ring A について, A-algebra B がある étale A-algebra の prime ideal における localization である時, B を essentially étale A-algebra という. 特に $k(A) = k(B)$ が成立する時, B を strictly essentially étale A-algebra という. この時, strictly essentially étale A-algebras B の集合 $\mathfrak{S}$ が存在して，任意の strictly essentially étale A-algebra は $\mathfrak{S}$ の1つに A-同型であるように出来る。この時次の結果が成立する。

A_1, A_2 を strictly essentially étale A-algebras とする。

(1) $A_1 \xrightarrow{u} A_2$ なる local A-morphism は高々1つしかない。

(2) strictly essentially étale A-algebra A_3 及び local A-morphisms $u_i : A_i \longrightarrow A_3$ $(i = 1, 2)$ が存在して，

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & A_3 \\ & A_2 \arrow[ur, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にすることが出来る。

この結果により $\mathfrak{S} = \{A_\lambda\}$ は filtered inductive system となる。この時，${}^hA = \varinjlim_{\mathfrak{S}} A_\lambda$ を A の henselization という。${}^hA$ は次の性質を満たす。

a) ${}^hA$ は henselian local ring である。

b) 自然な local morphism $A \longrightarrow {}^hA$ により，${}^hA$ は faithfully flat A-module，又 $m_A {}^hA$ は ${}^hA$ の maximal ideal である。

c) $\hat{A} = \varprojlim_n A/m^n \xrightarrow{\sim} \widehat{{}^hA} = \varprojlim_n {}^hA/m^n\,{}^hA$.

d) ${}^hA$: Noetherian $\Longleftrightarrow$ A : Noetherian.

e) 更に ${}^hA$ は functor : (local henselian rings の category) $\ni B \longmapsto \mathrm{locHom}(A, B) \in (\mathrm{Sets})$ を represent するものとして得られる。

(ト) A が henselian であれば，${}^{k}A \cong A$.

1.4.2. A, $\mathfrak{m}$, k は (1.4.1) の通りとする.

(i) 先ず次の条件は同値である.

(イ) A : henselian で，k は separably closed.

(ロ) A : henselian で，任意の étale covering $f : X \longrightarrow S$ (i.e. étale finite morphism) は trivial (i.e. section をもつ).

(ハ) 任意の étale morphism $f : X \longrightarrow S$ 及び任意の点 $x \in f^{-1}(S_0)$ について，S-section u で $u(S_0) = x$ となるものがある.

この同値な条件を満たす時，A を strict local ring 又は strict henselian ring という.

(ii) Ω を k のある separable algebraic closure とする. この時 essentially étale A-algebra B で local A-morphism $A' \xrightarrow{\lambda} \Omega$ を持つもの (A', λ) の集合 $\mathfrak{S}'$ で，任意の上記の性質をもつ essentially étale A-algebra (B, μ) は $\mathfrak{S}'$ の1つに同型

i.e. $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & \Omega \\ \downarrow & \nearrow_{\mu} & \\ B & & \end{array}$: 可換，となるものが存在する. $\mathfrak{S}'$ は次の結果により filtered inductive system となる.

(イ) A_1, A_2 を essentially étale A-algebras とする. 任意の k-morphism $k(A_1) \xrightarrow{\gamma} k(A_2)$ について，高々1つの A-morphism $\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ が存在して，$\overline{\psi} = \gamma$，但し $\overline{\psi} = \psi \otimes_A k$.

(ロ) (A_1, β_1), (A_2, β_2) について，essentially étale A-algebra

A_3 及び A-morphism $\beta_3 : A_3 \longrightarrow \Omega$, $\varphi_i : A_i \longrightarrow A_3$, $i=1,2$ が存在して, $\beta_1 = \beta_3 \circ \varphi_1$, $\beta_2 = \beta_3 \circ \varphi_2$ を満たす.

$\sigma' = \{(A_\lambda, \mu_\lambda)\}$ について, ${}^{hs}A = \varinjlim_{\sigma'} A_\lambda$ を A の strict henselization と呼ぶ. この時 ${}^{hs}A$ は local ring であり, $m^{hs}A$ は ${}^{hs}A$ の maximal ideal, $k = k({}^{hs}A) = \varinjlim_{\sigma'} k(A_\lambda) \xrightarrow[\sim]{\omega} \Omega$ (k-同型). 一般に ${}^{hs}A$ は injection $i : k \longrightarrow \Omega$ に依存するから, ${}^{hs}A_{(i)}$ とも書く. ${}^{hs}A$ は次の性質をもつ.

(a) ${}^{hs}A$ は strict local ring.

(b) 自然な morphism $A \longrightarrow {}^{hs}A$ により, ${}^{hs}A$ は faithfully flat A-module.

(c) ${}^{hs}A$: Noetherian $\Longleftrightarrow$ A : Noetherian.

(d) B を strict local ring, $u : A \longrightarrow B$ を local homomorphism $v : \Omega \longrightarrow k(B)$ を k-homomorphism として, A-morphism ${}^{hs}A \xrightarrow{\psi} B$ で $v = (\Omega \xrightarrow[\sim]{\omega^{-1}} k({}^{hs}A) \xrightarrow{\bar{\psi}} k(B))$ となるものが唯1つ存在する. 特に $i' : k \longrightarrow \Omega'$ が k のある separable algebraic closure を与える時, k-同型 $\sigma : \Omega \longrightarrow \Omega'$ について, $\psi_\sigma : {}^{hs}A_{(i)} \xrightarrow{\sim} {}^{hs}A'_{(i)}$ が唯1通り存在する. これより明らかに,

$\mathrm{Aut}_A({}^{hs}A) \cong \mathrm{Aut}_k(\Omega) = \mathrm{Gal}(\Omega/k)$.

<u>1.4.3</u> A, m, k は (1.4.1) に同じとする. 先ず次の結果が成立する.

(1) A : reduced (resp. normal, regular) $\Longleftrightarrow$ ${}^{h}A$: reduced (resp

normal, regular) $\Longleftrightarrow$ ${}^{hs}A$: reduced (resp. normal, regular).

(ロ) $\mathrm{Spec}({}^{h}A)$: irreducible $\Longleftrightarrow$ A : unibranch (i.e. A_{red} : integral かつ A_{red} の integral closure $\widetilde{A_{red}}$ が local ring).

(ハ) $\mathrm{Spec}({}^{hs}A)$: irreducible $\Longleftrightarrow$ A : geometrically unibranch (i.e. A : unibranch かつ $k(\widetilde{A_{red}})$ が $k(A_{red})$ と purely inseparable).

次に étale sheaf の geometric fibre について一言しよう。先ず k を体とし、$X = \mathrm{Spec}(k)$ について、X_{et}, $X_{et}^{\sim}$, $X_{et}^{\sim,ab}$ を考える。k_s を k の separable closure, $\pi = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ (profinite group) とする。$i : X_{et} \longrightarrow X_{et}^{\sim}$, $j : X_{et}^{\sim} \longrightarrow$ (left π-sets) を $i(X')(X'') = \mathrm{Hom}_X(X'', X')$, $j(F) = \varinjlim_{\substack{k_\alpha \subset k_s \\ k_\alpha/k : \text{finite}}} F(\mathrm{Spec}(k_\alpha))$ で定義する。但し left π-set で、π が左より連続に作用する集合を表わす。この時、よく知られた議論により $j \circ i$ は 2つの categories の equivalence を与える。(left π-set E に対して、$E = \coprod_\lambda E_\lambda$, $E_\lambda = \pi e_\lambda$: π-orbit に分解する。π_λ = Stabilizer of e_λ は π の open subgroup. 今 $X' = \coprod_\lambda \mathrm{Spec}(k_s^{\pi_\lambda})$ とすると、$X' \longrightarrow X$ は明らかに étale surjective で $ji(X') \cong E$.) 従って i は fully faithful. 又任意の $F \in X_{et}^{\sim}$ について、$i \circ (j \circ i)^{-1} j(F)$ が F と同型であることを見るのは困難ではない。従って i, j 共に category の equivalence を与える。特に j により、$X_{et}^{\sim,ab}$ は left π-modules の category (left π-modules) と同値になる。従って、

$F \in X_{\acute{e}t}^{\sim, ab}$ について

$$H^*(X_{\acute{e}t}, F) \cong H^*(\pi, j(F))$$

となる．但し $H^*(\pi, j(F))$ は profinite group π の Galois cohomology.

$k = k_s$ であれば，$X_{\acute{e}t}^{\sim} \cong (Sets)$，$X_{\acute{e}t}^{\sim ab} \cong (Ab)$，$H^p(X_{\acute{e}t}, F) \cong 0$ $\forall p > 0$，$F \in X_{\acute{e}t}^{\sim, ab}$ 等は明らかである．

今 X を prescheme，$x \in X$ とする．$\overline{k(x)}$ で $k(x)$ のある separable closure，$\bar{x}$ で X の geometric point $\bar{x} = Spec(\overline{k(x)}) \xrightarrow{i_{\bar{x}}} X$ （$k(x) \xrightarrow{i} \overline{k(x)}$ により定まる自然な morphism）を表わす．$i_{\bar{x}}$ により，$i_{\bar{x}}^* : X_{\acute{e}t}^{\sim} \longrightarrow (\bar{x})_{\acute{e}t}^{\sim} \xrightarrow[\Gamma_{\bar{x}}]{\sim} (Sets)$ が得られる．$F \in X_{\acute{e}t}^{\sim}$ について，$\Gamma_{\bar{x}} i_{\bar{x}}^*(F) = F_{\bar{x}}$ と書いて，étale sheaf F の点 x に於ける geometric fibre と呼ぶ．$i_{\bar{x}}$ が $i_{\bar{x}} : \bar{x} \longrightarrow x = Spec(k(x)) \xrightarrow{i_x} X$ と分解される事に注意すれば，$F_{\bar{x}}$ は $i_x^* F$ を知る事と同じである．従って $\pi_x = Gal(\overline{k(x)}/k(x))$ として，$F_{\bar{x}}$ は π_x-set である．（$i'_{\bar{x}} : \bar{x}' \longrightarrow X$ が x を image にもつもう1つの geometric point であれば，$k(x)$-morphism $\bar{x} \xrightarrow{u} \bar{x}'$ が存在して，

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "i_{\bar{x}}"'] & & \bar{x}' \arrow[dl, "i_{\bar{x}'}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

：可換，と出来る．従って，$F_{\bar{x}} \xrightarrow[u']{\sim} F_{\bar{x}'}$．

この u' は u に functorially に depend する．）$F_{\bar{x}}$ は $i_{\bar{x}}^*$ の定義により，

$$F_{\bar{x}} = \varinjlim_{X' \in C_{\bar{x}}^{\circ}} F(X')$$

として与えられる．但し $C_{\bar{x}}$ は $\bar{x}$-pointed X-étale prescheme (X', i')

$$\left(\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "u"] & & X \\ & \bar{x} \arrow[ul, "i'"] \arrow[ur, "i_{\bar{x}}"'] & \end{tikzcd} ：可換 \right)$$

が作る category. $F \in X_{\acute{e}t}^{\sim} \rightsquigarrow F_{\bar{x}} \in (Sets)$ は inductive limit 及び finite fibre product と可換である. 又 $F \in X_{\acute{e}t}^{\sim} \rightsquigarrow \{F_{\bar{x}}\}_{\bar{x}\in X} \in (Sets)$ は conservative である, i.e. 任意の morphism $u : F \longrightarrow G \in X_{\acute{e}t}^{\sim}$ について,

$$u \text{ ; isomorphism} \iff {}^{\forall}x \in X \text{ について, } u_{\bar{x}} : F_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} G_{\bar{x}} \text{ が isomorphism}.$$

今 $W(\mathcal{O}_X)$ (i.e. $W(\mathcal{O}_X)(X') = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, $W(\mathcal{O}_X) \in X_{\acute{e}t}^{\sim, ab}$) について, $W(\mathcal{O}_X)_{\bar{x}}$ を考えよう. $W(\mathcal{O}_X)_{\bar{x}} = \varinjlim_{X' \in C_{\bar{x}}^{\circ}} W(\mathcal{O}_X)(X') = \varinjlim_{X' \in C_{\bar{x}}^{\circ}} \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ $= \varinjlim_{X' \in C_{\bar{x}}^{\circ}} \mathcal{O}_{X', x'} \cong {}^{hs}\mathcal{O}_{X,x}$ ($\cong \mathcal{O}_{\bar{X},\bar{x}}$ とかく).
(x' : X'の中での $\bar{x}$ の image)

$\bar{X} = Spec(\mathcal{O}_{\bar{X},\bar{x}})$, $j_{\bar{x}} : \bar{X} \longrightarrow X$, $\bar{F} = j_{\bar{x}}^{*}(F)$ とすると, $\bar{x}$ は $\bar{X}$ の geometric point と考えられるが, (1.4.2) (i), (ii) により $\bar{F}_{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}) = \varinjlim_{X' \in C_{\bar{x}}^{\circ}} F(X') = F_{\bar{x}}$, 即ち, $F_{\bar{x}} = \Gamma(\bar{X}, \bar{F})$ が得られる.

次に $f : X \longrightarrow Y$ を preschemes の morphism とし, F を X 上の groups の sheaf (resp. abelian sheaf) とする. 更に f が quasi-compact かつ quasi-separated と仮定する. Y の点 y について, y 上の geometric point $\bar{y}$, $\bar{Y} = Spec(\mathcal{O}_{\bar{Y},\bar{y}})$ を strict local scheme として, $\bar{X} = X \times_Y \bar{Y}$, $\bar{F} = F \times_X \bar{X}$ とおく. この時, 次の事柄が証明される.

$$R^i f_{\acute{e}t,*}(F)_{\bar{y}} \cong H^i(\bar{X}, \bar{F}) \quad , \quad i = 0, 1.$$

(resp. $R^pf_{\acute{e}t,*}(F)_{\bar{y}} \cong H^p(\bar{X}, \bar{F})$, $\forall p \geq 0$).

〔証明〕 $R^pf_{\acute{e}t,*}(F)$ が Y 上の presheaf $Y' \rightsquigarrow H^p(X \times_Y Y', F)$ の associated sheaf として得られること，及び任意の presheaf P について，$(aP)_{\bar{y}} = \varinjlim_{Y' \in C^\circ_{\bar{y}}} P(Y')$ として得られることから，

$$R^pf_{\acute{e}t,*}(F)_{\bar{y}} = \varinjlim_{Y' \in C^\circ_{\bar{y}}} H^p(X \times_Y Y', F) \overset{(*)}{=} H^p(\varprojlim (X \times_Y Y'), F) = H^p(\bar{X}, \bar{F}).$$

但し等式(*)は f が quasi-compact, quasi-separated である事より従う。

J. Giraud の Gerbe 及び Lien の紹介は，別の機会に譲って，省略させていただく。

Appendix.

ここで，S. Lubkin, A p-adic proof of Weil's conjectures, Ann. of Maths., (196), pp. 105 − 254, で定義された，combinatorial cohomology が多くの場合，我々の Grothendieck cohomology に等しくなることを注意しよう。

X を quasi-compact, quasi-separated な prescheme として，例えば，X_{pe} について考える。勿論，他の site でもかまわない。X_{pe} の open sets の集合 $\mathfrak{U}$ が X の finite covering であるとは，次の条件を満す時にいう：

1) $\forall x \in X$ について，$E \ni x$ なる $E \in \mathfrak{U}$ は有限個しかない。

2) $E, E' \in \mathfrak{U}$, $x \in E, E'$ $\Longrightarrow$ $\exists\, E'' \in \mathfrak{U}$, $x \in E''$, $E'' \subset E \cap E'$.

3) $X = \bigcup_{E \in \mathfrak{U}} E$.

4) $\mathfrak{U}$の任意のopen set EはEに含まれるE_λ $(\in \mathfrak{U})$の和集合として書けない。

この$\mathfrak{U}$に対して，simplicial complex $S(X, \mathfrak{U})$を，$\mathfrak{U}$の元Eをvertices，$\mathfrak{U}$の元の列 $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n$ をn-simplicesとして定義する。Fが$X_{pe}^{\sim, ab}$の元である時，cochain complex $C(X, \mathfrak{U}, F)$を

$$C^n(X, \mathfrak{U}, F) = \prod_{\sigma \in S^n(X, \mathfrak{U})} F(E_0), \quad \text{但し } \sigma = (E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n)$$

$$d^n : C^n(X, \mathfrak{U}, F) \longrightarrow C^{n+1}(X, \mathfrak{U}, F)$$

$$(d^n f)(E_0, E_1, \ldots, E_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(f(E_0, E_1, \ldots, \check{E_i}, E_{i+1}, \ldots, E_{n+1}) \middle| E_0 \right)$$

で定義する。その n-th cohomology を$H^n(X, \mathfrak{U}, F)$とすると，$\{H^n(X, \mathfrak{U}, F)\}_{n \geq 0}$は$H^0(X, \mathfrak{U}, F) = F(X)$のright derived functorsとなる。$H_c^n(X, F) = \varinjlim_{\substack{\mathfrak{U}:\text{ ordered by} \\ \text{refinements}}} H^n(X, \mathfrak{U}, F)$は又$H_c^0(X, F) = F(X)$のright derived functorsとなる。従って $H_c^n(X, F) \cong H^n(X_{pe}, F)$.

§2. group prescheme 係数の各 cohomologies の比較.

(2.1). X を prescheme とし, 常に sites X_{pq}, X_{pe}, X_{et}, X_{etf} X_{zar} を考える。C, C' をその2つとし, sites の morphism $f: C \longrightarrow C'$ が存在するとする。先ず,

<u>Lemma 2.1.1</u>. G を C 上の abelian sheaf とする時, 次の条件は同値である。

(i) $R^i f_* G = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii) ${}^\forall X' \in Cat(C')$ について, 自然な準同型,

$$H^i(X', f_* G) \longrightarrow H^i(f^{-1}(X'), G)$$

は $1 \leqslant i \leqslant n$ について同型, $i = n+1$ について monomorphism.

(iii) 特に $C' = X_{et}$ の時, $\bar{X}$ を X の任意の strict local scheme とすれば, $H^i(f^{-1}(\bar{X}), G) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(iv) 特に $C' = X_{zar}$ の時, $\mathfrak{X} = Spec(\mathcal{O}_{X,x})$ を任意の local scheme とすれば, $H^i(f^{-1}(\mathfrak{X}), G) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

[証明] $X' \xrightarrow{g} X$ について, $f': C/_{X'} \longrightarrow C'/_{X'}$ とすれば,

$$R^i f_* G = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant n \iff {}^\forall X' \in Cat(C') \text{ について}, \quad R^i f'_* G = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant n$$

であるから, (i) ⇒ (ii) は spectral sequence (IV) より明らか。(ii) ⇒ (i) は, $H^1(X', f_* G) \xrightarrow{\sim} H^1(f^{-1}(X'), G)$, $H^2(X', f_* G) \hookrightarrow H^2(f^{-1}(X'), G)$

より，$H^0(X', R^1f'_*G) = 0$．X' は $Cat(C')$ で任意でよいから，$R^1f_*G = 0$．従って Spectral sequence (IV) より，簡単な計算により，

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_\infty^{0,2} \arrow[r] & E_2^{0,2} \arrow[r] & E_2^{3,0} \arrow[r] \arrow[dr] & E_\infty^{3,0} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
 & & & & H^3(f^{-1}(X'), G) &
\end{tikzcd}
$$

が exact である．これと，$H^2(X', f_*G) \xrightarrow{\sim} H^2(f^{-1}(X'), G)$ より，$E_2^{0,2} = 0$．従って，$R^2f_*G = 0$．今 $R^jf_*G = 0$，$1 \leq j \leq n-1$ が分かったとして，同様に(IV)より，

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_\infty^{0,n} \arrow[r] & E_2^{0,n} \arrow[r] & E_2^{n+1,0} \arrow[r] \arrow[dr] & E_\infty^{n+1,0} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
 & & & & H^{n+1}(f^{-1}(X'), G) &
\end{tikzcd}
$$

が exact である．$H^n(X', f_*G) \xrightarrow{\sim} H^n(f^{-1}(X'), G)$ と上の sequence より，$E_2^{0,n} = 0$．従って $R^nf_*G = 0$．

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) は $R^if_*G = 0$, $1 \leq i \leq n$ $\Leftrightarrow$ 任意の strict local scheme $\bar{x}$ について，$(R^if_*G)_{\bar{x}} \cong H^i(f^{-1}(\bar{x}), \bar{G}) = 0$，$1 \leq i \leq n$ より明らか．

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) も 任意の X の local scheme $\mathfrak{X}$ について，$(R^if_*G)_x \cong H^i(f^{-1}(\mathfrak{X}), G)$ より明らか．　　　q. e. d.

<u>Lemma 2.1.2</u>.　C : site，$G \in C^{\sim, ab}$ について，次の条件は同値である．

(i) $^\forall X' \in Cat(C)$ について，$H^i(X', G) = 0$，$1 \leq i \leq n$．

(ii) $^\forall X' \in Cat(C)$ 及び $^\forall \mathfrak{U} \in Cov(C/X')$ について，

$H^i(\mathfrak{U}, G|X') = 0$，$1 \leq i \leq n$．

[証明] Spectral sequence (III) に於いて，(i) ならば，$\mathcal{H}^i(G|X')$

$= 0, \quad 1 \leq i \leq n$ だから, $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(G/X')) = 0, \ 1 \leq q \leq n$.

よって, $H^i(\mathfrak{U}, G/X') \cong H^i(X', G) = 0, \ 1 \leq i \leq n$. i.e. (i) ⇒ (ii).

(ii) ⇒ (i) については, 先ず, $H^1(X', G) = \varinjlim_{\mathfrak{U} \in Cov(X')} H^1(\mathfrak{U}, G/X') = 0$

より $\mathcal{H}^1(G) = 0$. 従って spectral sequence (III$'$) より,

$H^2(X', G) = \varinjlim_{\mathfrak{U} \in Cov(X')} H^2(\mathfrak{U}, G/X') = 0$. 以下同様にして, $H^i(X', G)$

$= 0 \quad 1 \leq i \leq n$. q.e.d.

<u>Lemma 2.1.3.</u> X_0 を X 上の prescheme とし, $Y \longrightarrow X$ について, Y_0 で $Y \times_X X_0$ と表わす. site C, $G \in C^{\sim, ab}$ 及び $\mathfrak{U} = \{X_\alpha \longrightarrow X\}$ について次の仮定をする.

$$(L)\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{U} \text{ の members の任意の fibre product } X_{\alpha_1} \times_X X_{\alpha_2} \times_X \cdots \times_X X_{\alpha_j} \\ \text{について, } G(X_{\alpha_1} \times_X X_{\alpha_2} \times_X \cdots \times_X X_{\alpha_j}) \longrightarrow G(X_{\alpha_1 0} \times_{X_0} X_{\alpha_2 0} \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_{\alpha_j 0}) \\ \text{は surjective である.} \end{array}\right.$$

この時, 次の条件は同値である.

(i) $H^i(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow H^i(\mathfrak{U}_0, G_0)$ が $1 \leq i \leq n$ について同型, $i = n+1$ について mononorphism.

(ii) $N = Ker(G(Z) \longrightarrow G_0(Z_0))$ として, $H^i(\mathfrak{U}, N) = 0, \ 1 \leq i \leq n+1$

[証明] N の定義より,

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U}, N) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U}_0, G_0) \longrightarrow 0$$

は semi-simplicial complexes の exact sequence. 従って long exact sequence $\cdots \longrightarrow H^i(\mathfrak{U}, N) \longrightarrow H^i(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow H^i(\mathfrak{U}_0, G_0) \longrightarrow H^{i+1}(\mathfrak{U}, N) \longrightarrow \cdots$ が存在する. この時, (i) ⇔ (ii) は明らか. q.e.d.

<u>*Lemma 2.1.4.*</u> A を algebra, A' を A-faithfully flat algebra, M を A-module とする. $S' = \mathrm{Spec}(A')$, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{M} = M^{\sim}$, $W(\mathcal{M}) : (Sch/S)^{\circ} \rightsquigarrow (Ab)$ $\left(W(\mathcal{M})(X') = \Gamma(X', \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{O}_{X'}) \right)$ とすると, $W(\mathcal{M})$ は $S_{pq}^{\sim, ab}$ に属し, $H^i(S'/S, W(\mathcal{M})) = 0$, $\forall i > 0$.

[証明] $H^i(S'/S, W(\mathcal{M})) = 0$, $\forall i > 0$ は次の事柄に等しい:

$C^i = \left(\overset{i+1}{\underset{A}{\otimes}} A' \right) \underset{A}{\otimes} M$, $C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1}$ を $d^i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m)$
$= \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \, a_0 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m$ で定義すると, augmented complex

$$C^{\cdot} : \quad M \xrightarrow{\varepsilon} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \longrightarrow \cdots \qquad \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

が exact である.

今 A' が A-faithfully flat であることより, $C^{\cdot}$ の代りに $A' \underset{A}{\otimes} C^{\cdot}$ に取り替えて証明してもよい. 即ち, $A \longrightarrow A'$ は section $s : A' \longrightarrow A$ を持つとしてよい. この時 $f^i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m) = s(a_0) a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m$ で $f^i : C^i \longrightarrow C^{i-1}$ を定義すると,

$$d^i\Big(\sum_j a_{j_0} \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j\Big) = 0 \iff \sum_j 1 \otimes a_{j_0} \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j + \sum_j \sum_{k=1}^{i} (-1)^k a_{j_0} \otimes \cdots \otimes a_{j_k} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j = 0$$

$$\iff \sum_j a_{j_0} \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j = \sum_j \sum_{k=0}^{i} (-1)^k s(a_{j_0}) a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_k} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j$$

$$= d^{i-1}\Big(\sum_j s(a_{j_0}) a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_i} \otimes m_j\Big).$$

q.e.d.

(2.2). X を prescheme, $\mathcal{F}$ を X 上の quasi-coherent Module とする. $W(\mathcal{F})$ を Lemma 2.1.4 に於けるように $(Sch/X)^{\circ} \ni X' \rightsquigarrow$

$W(\mathcal{F})(X') = \Gamma(X', \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}) \in (Ab)$ により定義する。この時 fpqc-morphism は quasi-coherent Modules について descent morphism であることにより (cf. SGA, VIII, Th. 1.1), $W(\mathcal{F}) \in X_{pq}^{\sim,ab}, \cdots, X_{zar}^{\sim,ab}$.
この時, 次の結果が成立する:

Proposition 2.2.1. X, $\mathcal{F}$, $W(\mathcal{F})$ と上記の通りとして,

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X_{zar}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{\acute{e}tf}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{\acute{e}t}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{pl}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{pq}, W(\mathcal{F})), \quad \forall i \geq 0.$$

[証明] 例えば $H^i(X_{zar}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{pq}, W(\mathcal{F}))$ $\forall i \geq 0$ を見よう. $i > 0$ として, Lemma 2.1.1 により, X: affine scheme として, $H^i(X_{pq}, W(\mathcal{F})) = 0$, $\forall i > 0$ を見ればよい. これは, Lemma 2.1.2 及び X: quasi-compact であることにより, X 上 fpqc な affine scheme $X' \longrightarrow X$ について, $H^i(X'/X, W(\mathcal{F})) = 0$, $\forall i > 0$ を見ればよい. このことは Lemma 2.1.4 そのものである. q.e.d.

Corollary 2.2.2. 特に $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ として, 次の結果を得る.

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^i(X_{zar}, G_a) \cong H^i(X_{\acute{e}tf}, G_a) \cong H^i(X_{\acute{e}t}, G_a) \cong H^i(X_{pl}, G_a) \cong H^i(X_{pq}, G_a), \quad \forall i \geq 0.$$

Remark 2.2.3. $\mathcal{F}$ が locally free $\mathcal{O}_X$-Module of finite rank であれば, $W(\mathcal{F})$ は smooth な group prescheme であるが, それ以外であれば, 必ずしも smooth であるとは限らない.

(2.3). 次に X_{pl} の上で考えるのであるが, $Cov(X_{pl})$ の 2)

の集合と 2') $\{ V_i \xrightarrow{f_i} U \}$, f_i : flat, of finite presentation かつ quasi-finite な morphism f_i の有限集合で $\bigcup_i f_i(V_i) = U$ を満たすもので置きかえてもよい。実際, これは EGA IV (8.5.5), (8.10.5), (14.5.10) よりわかる。

又 X が henselian semi-local scheme であると, X は local components の直和となること, 及び 1.4.1, (=) によって, 次の結果を得る。

<u>Lemma 2.3.1</u>. X を henselian semi-local scheme とする。この時, 次の集合は $Cov(X_{pe})$ の中で cofinal である:

$$\left\{ \begin{array}{l} X' \xrightarrow{f} X \quad : \quad \text{finite, locally free, i.e. } f_*(\mathcal{O}_{X'}) \text{ は} \\ \text{flat } \mathcal{O}_X\text{-Module of finite rank.} \end{array} \right\}$$

次に X を prescheme, G を X 上の quasi-projective, smooth な commutative group prescheme とする。この時, $H^i(X_{et}, G_{et}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{pe}, G_{pe})$, $\forall i \geq 0$ が成立することを見よう。Lemmata 2.1.1, 2.1.2, 2.3.1 により, X が strictly local scheme, $X' \xrightarrow{f} X$ が finite, locally free の時, $H^i(X'/X, G) = 0$, $\forall i > 0$ を証明すればよい。X_0 を X の closed point, $X'_0 = X' \times_X X_0$, $X'^j = \underbrace{X' \times_X X' \times_X \cdots \times_X X'}_{j}$, $X'^j_0 = X'^j \times_X X_0$ とおく。X'^j は X 上 finite であるから, strict local schemes の直和で, その components は X'^j_0 の各点に対応する。(1.4.1), (iii) により, $G(X'^j) \longrightarrow G(X'^j_0)$ は surjective である。即ち Lemma 2.1.3 の条件 (L) を満たす。

この時，次の結果を示そう．

<u>Lemma 2.3.2</u>. (i) X を henselian local scheme, G を X 上の quasi-projective, smooth な commutative group prescheme, $X' \to X$ を finite, locally free surjective morphism とする．X'_0 等の記号は上記に従って，

$$H^i(X'/X, G) \xrightarrow{\sim} H^i(X'_0/X_0, G_0), \quad \forall i > 0$$

が成立する．

(ii) 更に X が strictly local であれば

$$H^i(X'/X, G) = 0 \qquad \forall i > 0$$

が成立する．

[証明] (i) (Sch/X) 上の functor $\underline{C}^i(G)$ を $\underline{Hom}_X(((X'/X)^{i+1}, G)$ で，$d^i : \underline{C}^i(G) \to \underline{C}^{i+1}(G)$ を自然に定義する。又 $\underline{Z}^i(G) = \ker(d^i)$ とおく。明らかに，$Y \to X$ に対して，$\underline{C}^i(G)(Y) = C^i(Y'/Y, G) = G((Y'/Y)^{i+1})$, $\underline{Z}^i(G)(Y) = Z^i(Y'/Y, G)$ である．今 $\underline{C}^i(G)$ が X 上 smooth な group prescheme として represent されることを示そう． $X'' \to X$ を $X' \to X$ を split する (i.e. $X' \times_X X'' \cong \amalg X''$) finite, locally free surjective morphism とする．(その存在は X が henselian local であることより容易にわかる)．この時，$\underline{Hom}_X(((X'/X)^{i+1}, G) \times_X X'' \cong \underline{Hom}_{X''}(((X' \times_X X''/X'')^{i+1}, G_{X''}) \cong \amalg G_{X''}$ であるから representable．しかるに G は X 上 quasi-projective であるから，SGA, VIII, (7.6) により $\underline{Hom}_X(((X'/X)^{i+1}, G)$ は representable．又 G が smooth である

から, formal smoothness の判定条件より $\underline{Hom}_X(((X'/X)^{i+1}, G)$ が smooth であることもわかる. 定義により $\underline{Z}^i(G)$ も representable である.

次に $d^{i-1}: \underline{C}^{i-1}(G) \longrightarrow \underline{Z}^i(G)$ が preschemes の smooth な morphism であることを示そう. そのために, $Y \longrightarrow X$, (Y: affine) $Y_0 = Y/J$ ($J^2=0$), $z^i \in \underline{Z}^i(G)(Y)$, $c_0^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(Y_0)$ ($d_0^{i-1}(c_0^{i-1}) = z_0^i$, z_0^i は z^i の $\underline{Z}^i(G)(Y_0)$ での image) について, $c^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(Y)$ で $d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$ なるものがみつかればよい:

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r] \arrow[d, "c_0^{i-1}"'] & Y \arrow[d, "z^i"] \arrow[dl, dashed, "c^{i-1}"'] \\ \underline{C}^{i-1}(G) \arrow[r, "d^{i-1}"'] & \underline{Z}^i(G) \end{tikzcd} .$$

しかるに $G((Y'/Y)^i) \longrightarrow G((Y'_0/Y_0)^i)$ が surjective であるから, $c^{i-1} \longrightarrow c_0^{i-1}$ なる $c^{i-1} \in G((Y'/Y)^i)$ をとれば, $u^i = d^{i-1}(c^{i-1}) - z^i$ について $u_0^i = 0$. z^i を u^i で置き代えて, $v^i \in G((Y'/Y)^i)$ で $v_0^i = 0$, $d^{i-1}v^i = u^i$ なるものをみつければよい. 即ち $Y_0 \to Y$ について 2.1.3 の如く N を定義して, $H^i(Y'/Y, N) = 0$ $\forall i>0$ を言えばよい. しかるに $N(Z) = H^0(Z, g^*(\mathcal{Lie}(G_Y/X_0) \otimes_{O_{Y_0}} J))$, $g: Z \longrightarrow Y$ だから, $N = N(\mathcal{Lie}(G_Y/X_0) \otimes_{O_{Y_0}} J)$. $\mathcal{Lie}(G_Y/X_0) \otimes_{O_{Y_0}} J$ は O_Y-quasi-coherent Module であるから, 求める結論は 2.1.4 よりでる.

題意を証明するためには, N' を $X_0 \longrightarrow X$ に対して, 2.1.3 の如く定義し, $H^i(X'/X, N) = 0$, $\forall i > 0$ を証明すればよい.

即ち $z^i \in Z^i(X'/X, N)$ について $c^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(X)$ で $c_0^{i-1} = 0$ ($\underline{C}^{i-1}(G)(X_0)$ で)，$d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$ を満たすものを探せばよい。$z^i \in \underline{Z}^i(G)(X)$ であるから，$(\underline{C}^{i-1}(G), d^{i-1}) \times_{\underline{Z}^i(G)} (X, z^i)$ は，既に証明されたことより，X 上 smooth な prescheme である。又 $\underline{C}^{i-1}(G)$ が X 上の group prescheme であるから，$X_0 \xrightarrow{u_0} \underline{C}^{i-1}(G)$ をその unit section からくるものとすれば，$(u_0, X_0 \xrightarrow{i} X)$ は X_0 から $(\underline{C}^{i-1}(G), d^{i-1}) \times_{\underline{Z}^i(G)} (X, z^i)$ への morphism を与える。X は henselian, local であるから，(1.4.1), (iii) により X から $\underline{C}^{i-1}(G) \times_{\underline{Z}^i(G)} X$ への morphism c^{i-1} がある。これは上記の条件を満たす。

(ii) (i) より $H^i(X'/X, G) \cong H^i(X'_0/X_0, G_0)$, $\forall i > 0$. しかるに $X_0 = \mathrm{Spec}(k)$, k: separably closed. $H^i(X'_0/X_0, G_0) = 0$, $\forall i > 0$ と言うためには，$\underline{C}^{i-1}(G)(k) \xrightarrow{d^{i-1}} \underline{Z}^i(G)(k)$: surjective, $\forall i > 0$ と言えばよい。d^{i-1} が smooth であるから，その為には，k : alg. closed と仮定してもよい。この時，X'_0 は X_0-section をもつ。この時，(2.1.4) に於ける議論により，$H^i(X'_0/X_0, G_0) = 0$, $\forall i > 0$.

q.e.d.

今迄の事柄をまとめて，次の結果を得る。

Theorem 2.3.3. (i) X を prescheme，G を X 上 quasi-projective smooth な commutative group scheme とする。この時，

$$H^i(X_{et}, G_{et}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{pe}, G_{pe}), \quad \forall i \geq 0.$$

(ii) X を local henselian prescheme とし，G を上の如くすると，

$$H^i(X, G) \xrightarrow{\sim} H^i(X_0, G_0) \quad , \forall i \geqq 0 .$$

ここで，topology は X_{pl}, $X_{ét}$ のどちらでもよい．

[証明] (i) は証明済．(ii) $i : X_0 \longrightarrow X$ を canonical closed immersion とすると，spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{ét}, R^q i_* G) \Longrightarrow H^*(X_{0\,ét}, G_{0\,ét})$$

がある．しかるに i は finite morphism であるから，$R^q i_* G = 0$, $\forall i > 0$. 従って $H^p(X_{ét}, i_* G_0) \cong H^p(X_{0\,ét}, G_{0,ét})$, $\forall p \geqq 0$.

今 G は X 上 smooth であるから，$0 \longrightarrow N \longrightarrow G_{pl} \longrightarrow i_*(G_{0\,pl}) \longrightarrow 0$ は exact ．従って $H^i(X_{pl}, N) = 0$, $\forall i > 0$ といえばよい．又は $X' \longrightarrow X$: finite, locally free として $H^i(X'/X, N) = 0$, $\forall i > 0$ といえばよい．これは (2.1.3) により (2.3.2), (i) に同値である．

q.e.d.

<u>Remark 2.3.4</u> Theorem 2.3.3 の結果は G が non-commutative であれば，$i = 0$ 又は 1 として成立する (cf. SGAD, XXIV).

(2.4). (2.4.1) X を prescheme, G を X 上 flat かつ locally of finite presentation な affine group とする．$H^1(X_{pq}, G_{pq})$ (resp. $H^1(X_{pl}, G_{pl})$ が (fpqc)- (resp. (fppf)-) topology の意味での X 上の principal homogeneous spaces の同型類であるから，容易に

$$H^1(X_{pl}, G_{pl}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{pq}, G_{pq})$$

がわかる．

しかし，G が commutative である時，$H^i(X_{pl}, G_{pl}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{pq}, G_{pq})$, $\forall i \geqq 1$ が成立するかどうか，筆者は知らない．

(2.4.2)　X を prescheme, G を X 上 constant type の semi-simple group prescheme とする (i.e. G は X 上 affine, smooth かつその geometric fibres は connected semi-simple algebraic group). 我々は，この時，

$$H^1(X_{pf}, G_{pf}) \underset{(2.4.1)}{\cong} H^1(X_{pe}, G_{pe}) \underset{(2.3.3)}{\cong} H^1(X_{\acute{e}t}, G_{\acute{e}t})$$

が成立することを知っているが，更に $H^1(X_{\acute{e}t}, G_{\acute{e}t}) \cong H^1(X_{\acute{e}tf}, G_{\acute{e}tf})$ が成立することを示そう．

X, G を上記の通りとし，P を X 上の G-principal homogeneous space (≡ G-torsor) とする。G (resp. P) が (étf)-trivial の時，locally isotrivial と呼ぶ．即ち X の任意の点 x について x の open nbd. U 及び étale finite surjective morphism $U' \longrightarrow U$ が存在して，$G_{U'}$ (resp. $P_{U'}$) が split type (i.e. split maximal torus $T \cong D_{U'}(M)$, M: Abel 群，$G_{U'}$ の T に関する root system $R(\subset M)$ が存在して，任意の root $r(\in R)$ は X の上の constant function，$\&$ Lie(G) の proper value r の semi-invariant subspace $\mathfrak{g}^r$ は X 上 free Module となる。この時，G を (G, T, M, R) と書くことがある.) (resp. $P_{U'}$ が U'-section を持つ) となる．証明は本質的に次の結果による (cf. SGAD, XXIV).

<u>Lemma 2.4.2.1</u> (i) X を prescheme, G を X 上の reductive group prescheme (i.e. X 上 affine, smooth, かつその geometric fibres は connected reductive algebraic groups), T を G の maximal

torus, B を其の Borel subgroup とする．（B ⊃ T が満たされる時，(B, T) を Killing couple と呼ぶ）．P を X 上の G-torsor G′を G の P-twisted group prescheme とする．（i.e. $G' = P \times G/G$，但し G の P×G への作用は $(p, g)g' = (pg', g'^{-1}gg')$ で定める）．

この時，

$$P/\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(G'),$$

$$P/B \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Bor}}(G'),$$

$$P/T \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Kil}}(G').$$

但し，$\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) : (Sch/X)^\circ \ni X' \rightsquigarrow \mathrm{Norm}_{G_{X'}}(T_{X'})$

$\underline{\mathrm{Tor}}(G') : (Sch/X)^\circ \ni X' \rightsquigarrow \{G_{X'}$ の maximal tori 全体$\}$

$\underline{\mathrm{Bor}}(G')$，$\underline{\mathrm{Kil}}(G')$ についても同様．

$\underline{\mathrm{Tor}}(G')$ (resp. $\underline{\mathrm{Bor}}(G')$，$\underline{\mathrm{Kil}}(G')$) は X 上 affine (resp. projective, affine) smooth かつ of finite presentation な prescheme によって represent される (cf. SGAD, XXII, (5.8.3))．

(ii) X が semi-local scheme の時，G が X 上 constant type の semi-simple group prescheme であれば，G は isotrivial．

以上の結果を認めよう．但し (ii) の事実は本質的に $\mathrm{Autext}_X(G)$ が有限群であることによる．この時，求める結果は次の様にして得られる．先ず，G-torsor P が locally isotrivial

⟺ 任意の X の local scheme $\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ について $G_{\mathfrak{X}}$-torsor $P_{\mathfrak{X}}$ が (locally) isotrivial.

これは，G，P 共に X 上 of finite presentation であるから，

EGA, IV, §8 の議論を使ってある．上記 lemma (ii) により，G は semi local scheme X 上の split type の reductive group prescheme としてよい。この時，G の P-twisted group prescheme も semi-simple であるから，再び (ii) により G′ も isotrivial．従って (i) に於いて $\underline{Kil}(G')$ は étale finite surjective morphism $X' \longrightarrow X$ について，$X' \longrightarrow \underline{Kil}(G')$ なる X-morphism をもつ。従って $P \times_{P/T} X' = Q$ は X′ 上の T-torsor となる。しかるに X′ は semi-local であるから，$H^1(X', T) = 0$ (∵ T は split torus)．従って Q は X′-section を持ち，P は X′ によって trivialize される。

<u>Remark 2.4.2.2</u>. (1) 更に一般に，X が prescheme, G が X 上の constant type の reductive group prescheme とすると，次の事柄は同値である：

(i) G が locally isotrivial,

(ii) rad(G) (torus) が locally isotrivial, i.e. etf-ascent により split torus になる．

又 P が X 上の G-torsor である時，次の事柄は同値である：

(i)′ P が locally isotrivial,

(ii)′ $P/\mathrm{der}(G)$ が $\mathrm{corad}(G)$ ($\equiv G/\mathrm{der}(G)$: torus) - torsor として locally isotrivial.

これらの条件は，X が locally noetherian, geometrically unibranch ならば，自動的に満足される．

(2) X を dim 1 の prescheme とすれば，$X_{\text{ét}}$ と $X_{\text{étf}}$ は X の上に同じ topology を定める。従って X 上の group prescheme G について，
$$H^i(X_{\text{étf}}, G_{\text{étf}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\text{ét}}, G_{\text{ét}}),\quad \forall i \geqq 0.$$
[証明] $X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{étf}}$ は明らかに fully faithful であるから，X の affine open set U の上への étale quasi-finite, of finite presentation な morphism $U' \longrightarrow U$ が étale finite morphism $V \longrightarrow U$ によって refine される (i.e. $V \longrightarrow U'$ ↘U↙) ことを言えばよい。そのためには，EGA IV, §8 の議論により，$U = \mathrm{Spec}(A)$，A: noetherian local ring と仮定することが出来る。又 U' を適当な refinement で置き換えることにより，$X' = \mathrm{Spec}(A')$，A': local ring と仮定出来る。(NB. U の maximal point 上の U' の closed point は isolated である。従って U の closed point 上の U' の唯一つの closed point を含む affine open set を取れば，それは local scheme である。) $U' \longrightarrow U$ に ZMT (EGA, IV, (8.12.6)) を適用して，U' は U 上 finite な prescheme $V' = \mathrm{Spec}(B)$ の中に open immersion により imbed 出来る。B は semi-local ring であるから，A' は B の 1 つの maximal ideal $\mathfrak{m}$ について，$A' \cong B_{\mathfrak{m}}$ となる。今 fpqc-ascent $\hat{A}/A$ により $B \otimes_A \hat{A} \cong \hat{B} \cong \prod \hat{B}_{\mathfrak{m}}$. $\hat{B}_{\mathfrak{m}}$ は $\hat{A}$ 上 finite，従って $A' \cong B_{\mathfrak{m}}$ は A 上 finite. 又 A' が A 上 étale であることは明らか。 q.e.d.

(3) A が henselian local ring，$X = \mathrm{Spec}(A)$ ならば，$X_{\text{étf}}$ と $X_{\text{ét}}$

は X の上に同じ topology を定める。これは (1.4.1) (i), (ニ) によって見られる。従って A が complete local ring であれば、同じ結論が得られる。

(2.4.3) 次に prescheme X, X 上の group prescheme G について

$(*)_X^G$: $H^1(X_{zar}, G) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{etf}, G)$ が成立する条件を求めよう。次の結果はよく知られている。

<u>Lemma 2.4.3.1</u>　X を prescheme とすると、

$$(*)_X^{GL_n} : \quad H^1(X_{zar}, GL_n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{etf}, GL_n).$$

[証明] $H^1(X_{etf}, GL_n)$ の各元は (etf)-topology の意味での、X 上の rank n の vector bundle に対応するが、後者は (fpqc)-descent により Zariski-topology の意味のものに一致する。q.e.d.

<u>Lemma 2.4.3.2</u>　X を prescheme とする。

(1) X 上 affine な group prescheme G が $(*)_X^G$ を満たし、X 上 affine な G の subgroup prescheme H が次の条件 (i), (ii) を満たすとする：

(i) G/H : representable, (ii) G を G/H 上の H-torsor と見る時、locally trivial (i.e. $G \in H^1((G/H)_{zar}, H)$).

この時、$(*)_X^H$ が成立する。

(2) $0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow (e)$ を X 上 affine な group preschemes の exact sequence とする (i.e. $G \rhd H$ normal, G/H : representable) 更に G を G/H 上の H-torsor と見て (etf)-trivial とする。今 G/H が $(*)_X^{G/H}$ を満たし、H が X の任意の

affine open set U に対して，$(*)^H_U$ を満たすならば，$(*)^G_X$ が成立する。

[証明] G を X 上の group prescheme，H を G/H が representable になるような G の subgroup prescheme とする。今 topology を，G/H 上の H-torsor G が Zariski trivial であれば，(Zar) 又は (étf) で，又 (étf)-trivial であれば (étf) で考えることにすれば，次の sequence がある：

$$\{e\} \longrightarrow H(X) \xrightarrow{f_1} G(X) \xrightarrow{f_2} G/H(X) \xrightarrow{d} H^1(X, H) \xrightarrow{g_1} H^1(X, G).$$

ここで，f_1，f_2，g_1 は自然に定義されるもの．d は $\varepsilon \in G/H(X)$ に対して，H-torsor $G \underset{G/H}{\times} (X, \varepsilon)$ を対応させる map．$H(X)$ は $G(X)$ に自然に右から作用し，$G(X)$ の2元が f_2 により同じ image を持つのは $H(X)$ の作用で transitive である時，$G/H(X)$ の元が d により trivial H-torsor に移るのは $G(X)$ の元から定義される時，$G/H(X)$ の2元が d により同じ image を持つのは，$G(X)$ の左からの作用により transitive である時，又 $H^1(X, H)$ の元が g_1 により trivial G-torsor に移るのは d の image として得られる時等が知られている。更に G/H が group prescheme であれば，$H^1(X, G) \xrightarrow{g_2} H^2(X, G/H)$ が定義され，$H^1(X, G)$ の元が g_2 により trivial G/H-torsor に移るのは H-torsor の拡大として得られる時である。又 $G/H(X)$ の元は次の様にして，$H^1(X, H)$ に作用する：$P \in H^1(X, H)$ に対して $P \overset{H}{\times} G/H$ (Serre's notation, [15]) は trivial，i.e.

$P \overset{H}{\times} G/H \cong X \times G/H$. $G/H(X)$ の元 ε は $X \times G/H$ の X-section $(1_X, \varepsilon)$ を定めるが，この時 $P \times_{(X \times G/H)} (X, (1_X, \varepsilon))$ は H-torsor である．

$H'(X, H)$ の2元が g_* により同じ image を持つのは，上の作用により $G/H(X)$-transitive になるときである。次に結果の証明．

(1) $H'(X_{zar}, H) \longrightarrow H'(X_{étf}, H)$ は into であるから，ontoness を証明すればよい。P を $H'(X_{étf}, H)$ の元とする．G について $(*)_X^G$ を使って，$\forall x \in X$ について，$\exists U (\ni x, \subset X)$ open set があって，$P \overset{H}{\times} G$ は U 上 trivial．最初に述べられた sequence を (Zar)-topology について，X 及び U に使って，P_U は $G/H(U)$ の元 η によって，$P_U \cong G \times_{G/H} (U, \eta)$ と書けることがわかる．今 G が G/H 上の H-torsor として local trivial であるから，U を適当に小さくすれば，G/H の open set V で $G_V \cong H \times V$, $\eta^{-1}(V) \supset U$ と出来る．この時，明らかに P_U は U 上 trivial である．即ち P は locally trivial.

(2) 同様に $H'(X_{zar}, G) \longrightarrow H'(X_{étf}, G)$ の ontoness を示せばよい．$P \in H'(X_{étf}, G)$ 及び $\forall x \in X$ について，$U (\ni x, \subset X)$ affine open set があって，$(P \overset{G}{\times} G/H)_U \cong U \times G/H$．再び最初の sequence を (étf), U に使って，P_U は $H'(U_{étf}, H)$ の元 Q により $P_U \cong Q \overset{H}{\times} G$ と書けることがわかる．$(*)_U^X$ によって $Q \in H'(U_{zar}, H)$．従って P_U は locally trivial. q.e.d.

Corollary 2.4.3.3. X を任意の prescheme とする．

(i) $(*)_X^{G_a}$, (ii) $(*)_X^{GL_n}$, (iii) $(*)_X^{SL_n}$, (iv) G が X 上 solvable affine な group prescheme (i.e. quotients が $G_{a,X}$ 又は $G_{m,X}$ であるような composition series を持つ group prescheme) について, $(*)_X^G$.

[証明] (i) は (2.2.2) により, (ii) は (2.4.3.1) により, (iii) は $0 \longrightarrow SL_n \longrightarrow GL_n \xrightarrow{\det} G_m \longrightarrow (1)$ が locally trivial であるから (2.4.3.2)(1) による. この sequence が locally trivial になるのは, $G_m \ni \lambda \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ が det. の rational section を与えるからである. (iv) は (2.4.3.2)(2) 及び $(*)_X^{G_a}$, $(*)_X^{G_m}$ による.

Remark 2.4.3.4 (1) $(*)_X^G$ が成立しない例を挙げよう. X を体 k 上の ordinary double point y をもつ irreducible algebraic curve とする. $G = \mathbb{Z}_X$ とする. x をその generic point とし, $i_x : x \longrightarrow X$ を canonical injection とする. 最初に Zariski topology で spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X_{zar}, R^q i_{x*}(\mathbb{Z}_x)) \Longrightarrow H^*(x_{zar}, \mathbb{Z}_x)$ より injection $H^1(X_{zar}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x) \hookrightarrow H^1(x, \mathbb{Z}_x) = (0)$ を得る. 従って $H^1(X_{zar}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x) = (0)$. しかるに X : irreducible であるから, $\mathbb{Z}_X \longrightarrow (i_x)_*(\mathbb{Z}_x)$ は同型. 従って $H^1(X_{zar}, \mathbb{Z}_X) = (0)$. 次に (étf)-topology で, $(i_x)_* \mathbb{Z}_x$ は, 点 y で X が 2つの branch を持つから, 次の exact sequence, $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow (i_x)_* \mathbb{Z}_x \longrightarrow (i_y)_* \mathbb{Z}_y \longrightarrow 0$ を満たす. これより long exact sequence,

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\|}{\mathbb{Z}_X(X)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\|}{(i_x)_*(\mathbb{Z}_x)(X)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\|}{(i_y)_*(\mathbb{Z}_y)(X)}} \longrightarrow H^1(X_{étf}, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X_{étf}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x)$$

が得られる. 従って $H^1(X_{étf}, \mathbb{Z}_X) \supset \mathbb{Z}$ であるから, non-zero.

(2) projective general linear group prescheme PGL_n について，一般に $(*)_X^{PGL_n}$ は成立しない (cf. [15], 5.5). しかし X が閉体 k 上の algebraic curve，又は有限体上の non-singular algebraic curve の時は，$(*)_X^{PGL_n}$ が成立する。実際，両方の場合に，$H^2(X, G_m) \cong Br(X) = (0)$. 従って

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_{etf}, GL_{n+1}) & \longrightarrow & H^1(X_{etf}, PGL_n) \to 0. \\ \wr\Vert & & \\ H^1(X_{zar}, GL_{n+1}) & & \end{array}$$

即ち $H^1(X_{etf}, PGL_n)$ の任意の元 P は $H^1(X_{etf}, GL_{n+1})$ の元 Q より $P = Q \overset{GL_{n+1}}{\times} PGL_n$ として得られるが，任意の X の点 x について，open set U $(\ni x, \subset X)$ が存在して，$Q_U \cong U \times GL_{n+1}$. 従って $P_U \cong U \times PGL_n$，即ち P は locally trivial.

(2.4.4) 比較定理の最後として，X が $\mathbb{C}$ (複素数体) 上 locally of finite type の prescheme であるとき，$X(\mathbb{C}) =$ $\mathbb{C}$-rational points の集合に analytic space の structure を入れ (cf. [14])，その上に考えた usual topology (X_{cl} と記す) と X の上の étale topology X_{et} の間の比較に関する M. Artin の結果 (SGAA, XI) を示そう.

X_{cl} は次の様にかける：

$$\begin{cases} \mathrm{Cat}(X_{cl}) : & f : U \longrightarrow X(\mathbb{C}) \quad \text{analytic spaces の local isomorphism.} \\ \mathrm{Cov}(X_{cl}) : & \{U_\nu \longrightarrow U\} \quad \text{surjective family.} \end{cases}$$

X_{et} との比較は次の morphism $\varepsilon : X_{cl} \longrightarrow X_{et}$ によってなされる：

$X' \xrightarrow{g} X \in \mathrm{Cat}(X_{et})$ の時，analytic spaces の morphism

$X'(\mathbb{C}) \xrightarrow{g(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})$ と対応させる. $g(\mathbb{C})$ が local isomorphism であることは容易にみられる.

この時, 主要な結果は次の様になる:

Proposition 2.4.4.1. (i) ε は fully faithful, i.e. $X', X'' \in Cat(X_{et})$ について, すべての analytic $X(\mathbb{C})$-morphism $X'(\mathbb{C}) \longrightarrow X''(\mathbb{C})$ は algebraic である (cf. [15], Cor. to Prop. 20).

(ii) ε は $X(\mathbb{C})$ 上の finite coverings (i.e. $U \longrightarrow X(\mathbb{C})$, finite & locally isomorphic) のなす category と X 上の étale coverings (i.e. finite & étale) のなす category の間の equivalence を与える (cf. [6]).

Proposition 2.4.4.2 (SGAA, XI, Théorème 4.4). 更に X が $\mathbb{C}$ 上 smooth であると仮定する. F を X_{cl} 上の各 fibre が有限の locally constant torsion (abelian) sheaf とする. (実は F は X_{et} 上の locally constant torsion sheaf G より $\varepsilon^* G$ なる形で得られる. 又 G 自身は X 上の étale covering Y によって represent される, cf. Prop. 2.4.4.1 & SGAA, XI, Lemme 2.2). この時, $R^q \varepsilon_* F = 0$, $^\forall q > 0$. 従って $H^q(X_{et}, \varepsilon_* F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{cl}, F)$, $^\forall q \geq 0$. ここで $\varepsilon_* F$ は上の G と同型になる. 特に M が finite abelian (abstract) group ならば, $H^q(X_{et}, M) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{cl}, M)$.

Remark 2.4.4.3. X が $\mathbb{C}$ 上 projective prescheme, $\mathcal{F}$ が coherent $\mathcal{O}_X$-Module であれば, $H^q(X_{et}, \mathcal{F}_{et}) \simeq H^q(X_{cl}, \mathcal{F}_{cl})$ が成立することに注意しよう. 但し $\mathcal{F}_{cl}$ は $\mathcal{F}$ によって定まる

$X(\mathbb{C})$ 上の analytic sheaf. これは Prop. 2.2.1, [14], Théorème 1 及び scheme 上の Zariski cohomology は Čech cohomology によって求められること (cf. EGA, III, (1.4.1)) から出る.

(2.5). この節に於いては, いくつかの example について見よう.

(2.5.1). X を標数 $p>0$ の prescheme とし, $G_{a,X}$ 上の Frobenius endomorphism の kernel を $\alpha_{p,X}$ と記そう. 最初に, $H^i(X_{pg}, \alpha_p) \cong H^i(X_{pe}, \alpha_p)$, $\forall i \geq 0$ が成立することに注意しよう. これは sequence $0 \to \alpha_{p,X} \to G_{a,X} \xrightarrow{F} G_{a,X} \to 0$ が X_{pg}-sheaves としても, X_{pe}-sheaves としても exact であること, 及び (2.2.1) によって求められる. 但し $H^i(X_{pe}, \alpha_p) \cong H^i(X_{et}, \alpha_p)$ は一般には成立しない. 例えば, k : separably closed field として, $X = \mathrm{Spec}(k)$ とする. この時,

$$H^i(X_{pe}, \alpha_p) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ k^+/k^{+p}, & i=1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases} \qquad (k^+ = G_a(k))$$

$$H^i(k_{et}, \alpha_p) = (0) \qquad \forall i \geq 0 .$$

(2.5.2). 次に A を標数 $p>0$ の complete, noetherian local ring で, その residue field が separably closed であるようなものについて, $X = \mathrm{Spec}(A)$ として, X_{pe} 上の torsion sheaf F_n で

$$H^i(X_{pe}, F_n) = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < n \\ A^+/A^{+p} & i = n \\ 0 & i > n \end{cases} \qquad (A^+ = G_a(A))$$

$$H^i(X_{et}, F_n) = (0), \qquad \forall i \geq 0$$

を満たすものを構成しよう (cf. [13]).

G を abstract abelian group, H を X_{pe} 上の sets の sheaf として X_{pe} 上の groups の presheaf G_H を $Cat(X_{pe}) \ni U \rightsquigarrow G_H(U) = \coprod_i (\coprod_{H(U_i)} G)$ で定義する. 但し A が complete, local であるから $Cat(X_{pe})$ の中の cofinal set として, X 上 flat, finite morphism を取ることが出来ることに注意して, $U = \coprod U_i$ はその connected components への分解, $\coprod_{H(U_i)} G$ は G の $H(U_i)$ 個の copies の直和である。簡単な計算 ([13]) により, G_H は X_{pe} 上の sheaf であり, $U \in Cat(X_{pe})$, flat finite surjective morphism $V \to U$ ($\in Cov(X_{pe})$) について, $H^q(V/U, G_H) = 0$, $\forall q > 0$ を満たすことが見られる. この時, F_n を帰納的に構成する:

$$F_1 = \alpha_p, \qquad F_i : \quad 0 \to F_i \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{i-1}} \to F_{i-1} \to 0 \quad .$$

今 F_{n-1} が求める性質をもてば, exact sequence

$$\cdots \to H^q(X_{pe}, F_n) \to H^q(X_{pe}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{n-1}}) \to H^q(X_{pe}, F_{n-1}) \to H^{q+1}(X_{pe}, F_n) \to \cdots$$

より $H^q(X, F_n) = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ A^+/A^{+p}, & q = n \end{cases}$ が出る. 但しここで, (2.1.2) により $H^q(X_{pe}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{n-1}}) = 0$, $\forall q > 0$ が $H^q(V/U, G_H) = 0$ $\forall q > 0$ より出る事に注意せよ. $H^q(X_{et}, F_n) = 0$, $\forall q \geq 0$ はその構成より明らかである.

(2.5.3). X を prescheme として, (2.4.3.1) で $H^1(X_{et}, G_m) \cong H^1(X_{zar}, G_m)$ が成立することを見た. 但し $H^i(X_{et}, G_m) \cong H^i(X_{zar}, G_m)$

$i>1$ は一般には成立しない。例えば X が $B_r(X)\neq 0$ となる algebraic curve と考えれば、$H^2(X_{\acute{e}t}, G_m)\neq 0$, $H^2(X_{zar}, G_m)=0$ である。

§3. Cohomological dimension について.

(3.1) X を prescheme, C を sites X_{pq}, X_{pe}, $X_{\acute{e}t}$, $X_{\acute{e}tf}$, X_{zar} のいづれかとする。X の strict cohomological dimension n^s を

$$n^s = \inf\{r \mid H^t(X,F)=0,\ \forall t>r,\ \forall F\in C^{\sim,ab}\}$$

で定義する。又 l を任意の素数として、X の l-cohomological dimension n_l を $n_l=\inf\{r \mid H^t(X,F,l)=0,\ \forall t>r,\ \forall$ torsion $F\in C^{\sim,ab}\}$ で定義し、X の cohomological dimension n を $n=\sup_l n_l$ で定義する。但し $H^t(X,F,l)$ は $H^t(X,F)$ の l-primary part, 又 n^s, n_l, n 等が存在しない場合は ∞ とする。X の topology を明示する時は、$s.c.d^{pq}(X)$, $c.d_l^{pq}(X)$, $c.d^{pq}(X)$ (resp. $s.c.d^{pe}(X)$, $c.d_l^{pe}(X)$, $c.d^{pe}(X)$ etc.) と書く。

<u>Lemma 3.1.1</u>. X, C については上の通りとする。任意の $F\in C^{\sim,ab}$ は次の decomposition $0\longrightarrow t(F)\longrightarrow F\longrightarrow F/t(F)\longrightarrow 0$ を持つ。但し $t(F)$ は F の torsion subsheaf, $F/t(F)$ は torsion-free sheaf.

[証明] $t(F): U\in Cat(C) \longmapsto$ torsion part of $F(U)$ とすれば、$t(F)$ は F の torsion subsheaf. 又 $F/t(F)$ を presheaf, $U\in Cat(C) \longmapsto F(U)/t(F)(U)$ に associate した sheaf とすれば、torsion free

であることは明らか。 q.e.d.

<u>Lemma 3.1.2</u>. X, C については上と同様とする。今，任意の $F \in C^{\sim,ab}$ について，$H^q(X,F)$ ($^\forall q \geqq 1$) が torsion group であれば，$n_\ell \leqslant n_\ell^s \leqslant n_\ell+1$, $n \leqslant n^s \leqslant n+1$. 但し，$n_\ell^s$ は

$n_\ell^s = \inf\{r \mid H^t(X,F,\ell)=0,\ ^\forall t>r,\ ^\forall F \in C^{\sim,ab}\}$ によって

定義される。

[証明] $n_\ell \leqslant n_\ell^s$, $n \leqslant n^s$ は明らか。$n_\ell < +\infty$ とすると，(3.1.1) より $H^{n_\ell+1}(X,F,\ell) \cong H^{n_\ell+1}(X, F/t(F), \ell)$ だから，F が torsion free として，$H^{n_\ell+2}(X,F,\ell)=0$ という。m を任意の ℓ の巾数として，$0 \longrightarrow F \xrightarrow{m} F \longrightarrow F/mF \longrightarrow 0$ より，$0 \longrightarrow H^{n_\ell+2}(X,F,\ell) \xrightarrow{m} H^{n_\ell+2}(X,F,\ell)$. 又 $H^{n_\ell+2}(X,F)$ が torsion group であるから $H^{n_\ell+2}(X,F,\ell)=0$. q.e.d.

<u>Lemma 3.1.3</u> (1) X を quasi-compact, quasi-separated prescheme とする。C を X 上の任意の site とし，F を C 上の torsion sheaf とする。この時，$H^q(X,F)$, $^\forall q \geqq 0$ は torsion sheaf である。

(2) $f: X \longrightarrow Y$ を quasi-compact, quasi-separated prescheme の morphism とする時，X, Y 上に同種の topology を考える。F を X 上の torsion sheaf とすると，$R^q f_* F$, $^\forall q \geqq 0$ は Y 上の torsion sheaf である。

[証明] (1) $F = \varinjlim_n F_n$, $F_n = \mathrm{Ker}(F \xrightarrow{n} F)$ とおく，SGAA, VI (1.2)

により $H^q(X, F) \cong \varinjlim_n H^q(X, F_n)$. 従って $F = F_n$ とすると, $F \xrightarrow{n_F} F$ について, $H^q(X, F) \xrightarrow{n} H^q(X, F)$ が与えられるが, $n_F : F \longrightarrow 0 \longrightarrow F$ と分解するから, $H^q(X, F)$ も n で 0 にされる.

(2) $R^q f_* F$ が data : $Y' \rightsquigarrow H^q(X \times_Y Y', F)$ によって定まる sheaf であることに注意すれば, (1) より明らか. q.e.d.

(3.2) 最初に $X = \mathrm{Spec}(k)$, k : 体 の場合を考察しよう.

<u>Lemma 3.2.1</u>. X, k については上の通りとし, $C = X_{pe}$ 又 X_{et} とする. 任意の $F \in C^{\sim, ab}$ について, $H^q(X, F)$, $^{\forall} q > 0$ は torsion group である.

[証明] X_{et} については §1 の結果より出る. 以下 $C = X_{pe}$ とする. F の適当な長さの injective resolution を考えれば, $H^1(X, F)$ が torsion group であることを言えば十分である. しかるに $H^1(X, F)$ は Čech method によって計算されるから, $H^1(X, F) \cong \varinjlim_{K/k} H^1(K/k, F)$ とおける. 但し K は k の algebraic closure $\bar{k}$ に含まれる finite algebraic extension, $H^1(K/k, F) = H^1(\mathrm{Spec}(K)/\mathrm{Spec}(k), F)$ である. この時, §1 の (III) の spectral sequence より $E_2^{p,q} = H^p(K/k, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^*(k, F)$ と得る. これより exact sequence $0 \longrightarrow H^1(K/k, F) \longrightarrow H^1(k, F) \longrightarrow H^1(K/k, \mathcal{H}^1(F))$ が得られるが, $H^0(K/k, \mathcal{H}^1(F)) \hookrightarrow H^1(K, F \otimes_k K)$ だから, exact sequence $0 \longrightarrow H^1(K/k, F) \longrightarrow H^1(k, F) \longrightarrow H^1(K, F \otimes_k K)$ が得られる. これより k の finite algebraic extensions $K \supset L \supset k$ について,

exact sequence $0 \longrightarrow H^1(L/k, F) \to H^1(K/k, F) \longrightarrow H^1(K/L, F\otimes_k L)$
が得られる．今Lとしてkの K に於ける separable closure と取れば，$H^1(L/k, F)$ は torsion group である．従って，$H^1(K/L, F\otimes_k L)$
が torsion group であることを言えば十分である．再びこの sequence
により K が L 上 $x^p = a$，$a\in L$ なる方程式の根によって生成されていると仮定出来る．即ち Spec(K) は Spec(k) 上の $\alpha_{p,k}$ 又は $\mu_{p,k}$
torsor として，$H^1(K/k, F)$ が torsion group であることを言えばよい．しかるに $F(K\otimes_k K) = Hom_K(\alpha_{p,K}, F_K)$，$F(K\otimes_k K\otimes_k K) = Hom_K(\alpha_{p,K}\times_K \alpha_{p,K},$
$F_K)$ に注意し又 F_K の上に K の上の作用で $\alpha_{p,K}$ を作用させると，
$H^1(K/k, F) \cong H^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ (cf. SGAD, I) となるのは容易に見られる．しかるに，$\varphi\in Z^1(\alpha_{p,K}, F_K)$，$g\in\alpha_{p,K}(T)$，$T\to K$ について
$\varphi^g(g) - \varphi(g) \in B^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ になることより，$Z^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ の元は
modulo $B^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ で $Hom_{K\text{-}group}(\alpha_{p,K}, F_K)$ の元に同一視され，
$H^1(K/k, F)$ が p-torsion group であることが見られる．　　q.e.d.

<u>Remark 3.2.2</u>. (1) Lemma 3.2.1 の記号の下で，F が k上の group scheme of finite type からくるならば，$H^q(X_{pe}, F)$ は
Čech cohomology と一致することが知られている (cf. [12], Theorem 1).
(2) Lemma 3.2.1 に使った議論により，$X \longrightarrow Y$ が (abstract) abelian finite group G を group に持つ Galois covering である時，
F を有限直和と可換な X 上の presheaf として，$H^q(X/Y, F) \cong H^q(G, F(X))$
，$\forall q \geq 0$ が容易に示される．

<u>Corollary 3.2.3</u>. X を quasi-compact, quasi-separated prescheme とする。x を X の一点とし，$F_x \in \left(Spec(k(x))\right)^{\sim, ab}_{\text{ét}}$ とする。この時，$R^q(i_x)_* F_x$, $\forall q \geq 1$ は torsion sheaf であり，$H^q(X, (i_x)_* F_x)$ $\forall q \geq 1$ は torsion group である。但し $i_x : x \longrightarrow X$ は canonical injection.

[証明] $R^q(i_x)_* F_x$ が torsion sheaf になることは (3.2.1) よりわかる。ε spectral sequence $H^p(X_{\text{ét}}, R^q(i_x)_* F_x) \Longrightarrow H^*(x_{\text{ét}}, F_x)$ より modulo torsion group で $H^p(X_{\text{ét}}, (i_x)_* F_x) \cong H^p(x_{\text{ét}}, F_x)$ (cf. (3.1.3))。従って $H^p(X_{\text{ét}}, (i_x)_* F_x)$ も torsion group である。

<u>Proposition 3.2.4</u>. (1) k を標数 $p \geq 0$ の体とし，l を p と異なる素数とする。$X = Spec(k)$ として，$c.d_l^{pl}(X) = c.d_l^{\text{ét}}(X)$.

(2) k の標数を $p > 0$ として，$c.d_p^{pl}(X) \geq c.d_p^{\text{ét}}(X)$, & $c.d_p^{\text{ét}}(X) \leq 1$.

[証明] (1) k_s を k の separable closure とし，$X_s = Spec(k_s)$ とおく。§1, (III)$''$ の Hochshild-Serre spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, H^q(X_{s,pl}, F \times_X X_s)) \Longrightarrow H^*(X_{pl}, F)$, $\mathfrak{g} = Gal(k_s/k)$ について，$H^q(X_{s,pl}, F \times_X X_s)$ は p-primary (cf. (3.2.1) の証明) だから，$H^p(X_{pl}, F, l) \cong H^p(\mathfrak{g}, F(X_s), l) \cong H^p(X_{\text{ét}}, F_{\text{ét}}, l)$。従って，$c.d_l^{\text{ét}}(X) \leq c.d_l^{pl}(X)$.
逆に $H^p(\mathfrak{g}, E, l) \neq 0$ なる $\overset{\text{torsion}}{\mathfrak{g}}$-module E が存在すれば，E の inverse image F ($\in X_{pl}^{\sim, ab}$) は，明らかに $H^p(X_{pl}, F, l) \neq 0$。従って，$c.d_l^{\text{ét}}(X) = c.d_l^{pl}(X)$.

(2) [丙], 2.2, Prop. 3 より $c.d_p^{\text{ét}}(X) \leq 1$。今 $c.d_p^{\text{ét}}(X) = 1$ ならば，

X_{et} 上の torsion sheaf F で $H^1(X_{et}, F, p) \neq 0$ なるものが存在する. $f: X_{pe} \longrightarrow X_{et}$ を sites の morphism として, $G = f^*F$ とおく. f の spectral sequence より $H^1(X_{et}, f_*G) \longrightarrow H^1(X_{pe}, G)$ is injective. しかるに, 定義より, $f_*G = f_*f^*F \cong F$. 従って, $H^1(X_{pe}, G, p) \neq (0)$.

q.e.d.

Proposition 3.2.5. (1) k を標数 $p \geqslant 0$ の体とする. この時次の条件は同値である: (i) k: separably closed, (ii) $c.d^{et}(k) = 0$, (iii) $s.c.d^{et}(k) = 0$.

(2) k を標数 $p > 0$ の体として, 次の条件は同値: (i) k: perfect, (ii) $c.d_p^{pe}(k) \leqslant 1$, (iii) $c.d_p^{pe}(k_s) = 0$.

(3) k を (1) の通りとして, 次の条件は同値: (i) k: algebraically closed, (ii) $c.d^{pe}(k) = 0$, (iii) $s.c.d^{pe}(k) = 0$.

[証明] (1), (i) ⇒ (iii) ⇒ (ii) は明らか. (ii) ⇒ (i) については, [16] §1, 3.3, Cor.2 より出る. (2) (i) ⇒ (iii) は k が perfect であれば, その separable closure k_s が algebraically closed. 従って Remark (3.2.2) (i) により $c.d_p^{pe} k_s = 0$. 又 torsion sheaf $F \in (Spec(k))^{\sim, ab}_{pe}$ について, spectral sequence, $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, H^q(k_s, F \otimes_k k_s)) \Rightarrow H^*(k, F)$ より, $c.d_p^{pe}(k) \leqslant c.d_p^{et}(k) + c.d_p^{pe}(k_s)$. (3.2.4), (2) によって, これから $c.d_p^{pe}(k_s) \leqslant c.d_p^{pe}(k) \leqslant c.d_p^{pe}(k_s) + 1$. 従って (iii) ⇒ (ii).
(ii) ⇒ (i) のためには, (i) が成立しなければ, k: non-perfect. 従って k_s: non-perfect, i.e. $k_s^+/k_s^{+,p} \neq (0)$. 又上の不等式より,

$c.d_p^{p\ell}(k_s) \leq 1$. この時，(2.5.1) によれば，$c.d_p^{p\ell}(k_s) = \infty$. これは矛盾．従って，(ii) ⇒ (i).

(3) (i) ⇒ (ii), (i) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (ii) は明らか．(ii) ⇒ (i) のためには，(1) より k は separably closed, (2) より k は perfect. 従って k は algebraically closed である．　　q.e.d.

(3.3) 次に X を prescheme として，$cd^{\acute{e}t}(X)$ に関して知られている結果の幾つかを紹介しよう．

<u>Theorem 3.3.1</u> (SGAA, X, §4) X を体 k 上 n 次元の有限生成な prescheme とする．ℓ を k の標数と異なる素数として

$cd_\ell^{\acute{e}t}(X) \leq 2n + cd_\ell^{\acute{e}t}(k)$ が成立する．

[証明] $N = 2n + cd_\ell^{\acute{e}t}(k)$ とおく．最初に次の事柄を見よう：(1) X の点 y が codimension $c\ (\equiv \dim \mathcal{O}_{X,y})$ ならば，

$cd_\ell^{\acute{e}t}(k(y)) \leq N - 2c$.

実際，$k(y)$ は k 上有限生成の体であるから，$cd_\ell^{\acute{e}t}(k(y)) \leq cd_\ell^{\acute{e}t}(k) + tr.deg(k(y)/k)$ (cf. [16], II-13). 又 $tr.deg(k(y)/k) + \dim \mathcal{O}_{X,y} \leq \dim X = n$. 従って $cd_\ell^{\acute{e}t}(k(y)) \leq cd_\ell^{\acute{e}t}(k) + n - c \leq N - 2c$.

(2) X の irreducible closed subprescheme Y の strict local ring A について，$R(A)$ を A の total ring of quotients とする時，$cd_\ell^{\acute{e}t} R(A) \leq \dim A$. 従って x を X の任意の点，y を $Y = \overline{\{x\}}$ の任意の点 $(\neq x)$，A を Y の y に於ける strict localization とすれば，C_x, C_y を x, y の X に於ける codimensions として，

$\mathrm{cd}_\ell^{\mathrm{\acute{e}t}} R(A) < 2(C_y - C_x)$.

実際，$\mathrm{cd}_\ell^{\mathrm{\acute{e}t}} R(A) \leqq \dim A$ が成立すれば，後半は次の様にして見られる．先ず，$\dim \mathcal{O}_{Y,y} + \dim \mathcal{O}_{X,x} \leqq \dim \mathcal{O}_{X,y}$, i.e. $\dim A = \dim \mathcal{O}_{Y,y} \leqq C_y - C_x$．従って $\mathrm{cd}_\ell^{\mathrm{\acute{e}t}} R(A) \leqq \dim A \leqq C_y - C_x < 2(C_y - C_x)$ $(\because x \neq y)$．最初の事柄のために，k を separably closed, y を Y の closed point と仮定しよう．この時，明らかに $R(A)$ の residue fields は $R(Y)$ ($\equiv Y$ の函数体) の algebraic extension．従って $\mathrm{cd}_\ell^{\mathrm{\acute{e}t}} R(A) \leqq \mathrm{cd}_\ell^{\mathrm{\acute{e}t}} R(Y) \leqq \dim Y = \dim A$．しかるに k が separably closed でない時は，k' を separably closed な体として，k' 上有限生成な prescheme Y' 及び Y' の closed point y' で y' の strict localization が A に同型であるようなものを見付ける事が出来る．

実際，Y は affine と仮定出来るから，Y に於ける点 y の closure Z に Normalization Theorem を適用して，morphism $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_d]) = T$, $Z \xrightarrow{\text{finite}} T$, $d = \dim Z$ を得る．この時，$k' = k(t_1, \ldots, t_d)$ の separable closure, $Y' = Y \times_T \mathrm{Spec}(k')$, y' を Y' の closed point $(y, \mathrm{Spec}(k'))$ と取ればよい．従って (2) は O.K である．

今 F を torsion sheaf として，$q > N$ ならば $H^q(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, F) = 0$ と言おう．X の次元に関する induction により，X より次元の低い X の subprescheme については Theorem は正しいと仮定しよう．従って F が X の maximal points のすべてで 0 にならないと仮定出来る．この時 $R(X)$ を X の ring of rational functions として，

canonical injection $i : Spec(R(X)) \longrightarrow X$ 及び exact sequence $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0$ と考える。 K及びCは明らかに X の maximal points で 0 になるから, $H^q(X, K) = H^q(X, C) = 0$, $\forall q > N$. 従って $H^q(X, F) = 0$, $\forall q > N$ を言うためには, $H^q(X, i_* i^* F) = 0$, $\forall q > N$ といえばよい。即ち ある $G \in (Spec(R(X)))^{\sim, ab}_{ét}$ なる torsion sheaf G について, $F = i_* G$ と仮定出来る。この時, spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^*(Spec(R(X)), G)$ について, (1) より $cd_\ell^{ét} R(X) \leq N$ より, $H^q(Spec(R(X)), G) = 0$, $\forall q > N$. $E_2^{p,0} = 0$, $\forall p > N$ と言うためには, $E_2^{p,q} = 0$, $\forall (p,q)$; $p+q > N-1$, $q > 0$ を言えばよい。しかるに X の点 y に於ける $R^q i_* G$ の geometric fibre は $(R^q i_* G)_{\bar{y}} = H^q(Spec(R(A)), G)$, $A \cong {}^{hs}(\mathcal{O}_{Y,y})$ だから, (2) により $q \geq 2c_y$ ならば $(R^q i_* G)_{\bar{y}} = 0$. 従って $q > 0$ ならば, induction の仮定により $p > N - q - 1$ で $H^p(X, R^q i_* G) = 0$.

q. e. d.

<u>Theorem 3.3.2</u> (SGA A, X, (5.5)). X を標数 $p > 0$ の noetherian prescheme とする。 X_{zar} の quasi-coherent Modules に関して Cohomological dimension $cdqc(X)$ を $cdqc(X) = \inf\{r \mid H^t(X, \mathcal{F}) = 0, \forall t > r, \forall \text{ quasi-coherent Module } \mathcal{F}\}$ で定義する。この時, $cd_p^{ét}(X) \leq cdqc(X) + 1$. 従って X が 標数 $p > 0$ の体 k 上定義された有限生成 prescheme とすると, $cd_p^{ét}(X) \leq \dim X + 1$ (*)

(*) 特に X が k 上 quasi-projective ならば, $cd_p^{ét}(X) \leq \dim X$ が言える。

[証明] (SGAA, IX, (5.5)) により，$f: Y \longrightarrow X$ が finite morphism のとき，$i: U \longrightarrow Y$ が open immersion の時，$H^q(X, f_* i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = 0,\ \forall q > \mathrm{cdqc}(X)+1$ を言えばよい事がわかる．但し $i_!$ は $Y-U$ の上に 0 で sheaf を拡張する functor．f は finite であるから，$H^q(X, f_* i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = H^q(Y, i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U)$．従って $Y = X$ としてよい．$Z = X - U$ とし，$\mathcal{J}$ を X の Z を定める quasi-coherent Ideal とすると，exact sequences，$0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_Y \longrightarrow 0$，$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \longrightarrow \underline{O}_X \xrightarrow{\rho_X} \underline{O}_X \longrightarrow 0$，及び $0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_Y \longrightarrow \underline{O}_Y \xrightarrow{\rho_Y} \underline{O}_Y \longrightarrow 0$ より exact sequence $0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\rho} \mathcal{J} \longrightarrow 0$ を得る．但し ρ_X 等は Artin-Schreier morphism．しかるに $H^q(X, \mathcal{J}) = 0,\ \forall q > \mathrm{cdqc}(X)$ より $q > \mathrm{cdqc}(X)+1$ について，$H^q(X, i_!(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = 0$．後半は $\mathrm{cdqc}(X) \leqslant \dim X$ より明らか． q.e.d.

§4. Etale cohomology の重要な結果について．

(省略)

Bibliography.

[1] M. Artin, Grothendieck topologies (MA), Seminar notes, Harvard University, 1962.

[2] M. Artin et A. Grothendieck, SGAA., 1963/64, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.

[3] M. Demazure, Schémas en groupes réductifs, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), pp. 369 - 413.

[4] M. Demazure et A. Grothendieck, SGAD., 1963/64, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.

[5] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Mimeographed notes of Columbia University.

[6] H. Grauert und R. Remmert, Komplexe Räume, Math. Ann. Bd. 136 (1958), p. 345.

[7] A. Grothendieck, SGA., 1960/61, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.

[8] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique (FGA) (extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Paris, Secrétariat Mathematique, 1962.

[9] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer (GB), I, II, III, Séminaire Bourbaki 290 (1965), 297 (1965) and mimeographed note of I. H. E. S., 1966.

[10] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA., Chap. II, III_1, IV_2, IV_3, IV_4, Publ. Math. de I.H.E.S.

[11] M. Miyanishi, On the cohomologies of commutative affine group schemes, Jour. Maths of Kyoto Univ., Vol. 8 No. 1 (1968), pp. 1-39.

[12] S. Shatz, Cohomology of artinian group schemes over local fields, Ann. of Maths, Vol. 79 (1964), pp. 411-449.

[13] S. Shatz, The cohomological dimension of certain Grothendieck cohomologies, Ann. of Maths., Vol. 83 (1966) pp. 572-595.

[14] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-56, pp. 1-42.

[15] J.-P. Serre, Espaces fibrés algébriques, Séminaire C. Chevalley, exposé 1, 1958.

[16] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics, No. 5, Springer Verlag, 1966.