数理解析研究所講究録
第53巻 1968年 166-169

Subvariety の Embedding と Formal rational functions.

名大 理　　松村英之

文献

[1] H. Hironaka: On some formal imbeddings. (To appear on Illinois Journal).
[2] H. Hironaka and H. Matsumura: Formal functions and formal embeddings. J. of Math. Soc. Japan, 20 (1968), 52-82.
[3] R. Hartshorne: Cohomological dimension of algebraic varieties (To appear on Ann. Math)

代数的多様体 Z とその subvariety X とを考えよう. X の Z の中への入り方をしらべる有力な方法の1つは, Z の X に沿っての完備化 $\hat{Z}$ を考えることである. $\hat{Z}$ は formal scheme と呼ばれる ringed space であって, その関数体 $K(\hat{Z})$ が考えられる. $K(\hat{Z})$ の元は Zariski

流に言えば abstract meromorphic functions と呼べるであろうが，正しくは formal rational functions と呼ばれる．$K(\hat{Z})$ は Z の関数体 $K(Z)$ の拡大体である．$[K(\hat{Z}):K(Z)] < \infty$ のとき $\underline{X \text{ は } Z \text{ の中で } G2 \text{ である}}$ といい，$K(\hat{Z}) = K(Z)$ のとき $\underline{G3}$ であるということにする．X が Z の中で $G3$ ならば，$\hat{Z}$ が Z を birational equivalence を除いて一意的に定める訳であるから，X は Z の中でかなり一般の位置にあるといえよう．

[2] においてわれわれは次のことを示した：

i) $f: Z' \longrightarrow Z$ が proper, surjective な morphism of normal varieties ならば，$X' = f^{-1}(X)$ とおくとき，Z' の X' に沿っての完備化を $\hat{Z}'$ とすれば

$$K(\hat{Z}') = \left[K(Z') \otimes_{K(Z)} K(\hat{Z}) \text{ の全商環} \right].$$

これから，X が Z で $G2$ (resp. $G3$) ならば X' が Z' でそうであるということが判る．特に，X が連結で $G3$ ならば X' も $G3$ である．また，X' が $G3$ なら X も $G3$ である．

ii) $Z_1, \cdots, Z_n$ が normal varieties で $e_i \in Z_i$ ならば，$X = \bigcup_i (e_1 \times \cdots \times e_{i-1} \times Z_i \times e_{i+1} \times \cdots \times e_n)$ は $Z = \prod Z_i$ の中で $G3$ である．

iii) $Z=\mathbb{P}^n$ (体の上の projective space) ならば, Z の任意の connected subvariety X は Z で G3 である.

iv) Z が abelian variety で X が connected subvariety ならば, X が Z の原点を含むとするとき

$$X \text{ is G2 in } Z \iff X \text{ が } Z \text{ を generate する}$$

が成立つ.

[2] より先に書かれた広中氏の [1] では, Z が smooth で X が codimension 1 のときに, X の normal bundle (それは X 上の line bundle である) が ample ならば X は G3 であるという結果が (その他の結果と共に) 得られている. [3] で Hartshorne は, Z を smooth variety とし X を locally complete intersection in Z とするとき, X の normal bundle が彼の意味で ample ならば X は G2 であるということを示している. $\mathbb{P}^n$ の任意の smooth subvariety は ample normal bundle をもつから, $\mathbb{P}^n$ で G2 であるが, 更に広中氏のテクニックを用いて彼は上記 iii) を導いている. また彼は $Z-X$ の cohomological な性質をしらべて興味ある結果を得ている.

基礎体が $\mathbb{C}$ のとき, X が Z で G3 であるということは, $\mathbb{X}$ の Z における近傍 (classical topology での) の上の有理型関数が, Z 全体における有理型関数に拡張されることを含んでいる. (こゝで Z はもちろん compact と仮定する). 代数的条件から解析的な定理を証明するのに, 直接やれば convergence の問題が生ずるが, analytic geometry を飛越えて formal geometry の定理を代数的に証明しておけば, GAGA principle で analytic results は系として得られてしまう. これが広中氏の自慢のひとつである.

[2]の諸定理を組合わせると, たとえば, アーベル多様体 A を hyperplanes で切って得られる curve は A を生成するという定理などは容易に得られる. 幾何学的な応用は外にもありそうに思われる.

以上.