数理解析研究所講究録
第54巻 1968年 12-21

12

木村："位数$4n(n-1)$のn次の2重可遷群"について

名大大学院　岩崎 史郎

よく知られているように，多くの単純群が2重可遷群として表わされるが，2点のstabilizerによって2重可遷群はどの程度特徴づけられるだろうか？ Gを2重可遷群とし，その2点のstabilizer Kを色々変えてみよう。

$|K|=1 \Longrightarrow$ G：Frobenius群

$|K|=$ odd $\Longrightarrow$ i) Gはregular normal subgroupを含むか又は

ii) Gは単純群$L_2(q)$, $Sz(q)$, $U_3(q)$ ($q=2^n\geq 4$)のどれかに同型な正規部分群を含む。（Bender）

$|K|=$ even のときは，

$|K|=2 \Longrightarrow$ $G\cong PSL(2,5)$ or S. （Sは$SL(2,8)$の3次の拡大で degree 28）

という伊藤氏の結果が出ているが，$|K|=4$のとき，Gは何

か？　木村さんの論文はこの自然な問に答えたものである。

即ち，

G を $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上の2重可遷群で regular normal subgroup を含まないとし，1，2の stabilizer $K=G_{1,2}$ はその共役と独立 i.e $\forall_{G\in G}$，$K\cap K^{G}=1$ or K とする．

(I) K：cyclic $\Longrightarrow$ $G\cong PGL(2,5)$ or $PSL(2,9)$

(II) K：(2,2)型 abelian $\Longrightarrow$ $G\cong PSL(2,7)\cong PSL(3,2)$

K の fixed point の集合 $\Omega(K)=\{\alpha\in\Omega\mid \alpha^{G}=\alpha \text{ for } \forall_{G\in K}\}$ を $\{1,2,\cdots,i\}$ $(i\geq 2)$ とすると、K の独立性は次のことを意味する；K が cyclic，$K=\langle K\rangle$ のときは $K=(1)(2)\cdots(i)\underbrace{(\,,\,,\,,\,)}_{4}\cdots\underbrace{(\,,\,,\,,\,)}_{4}$ (i.e.K は2-cycle $\underbrace{(\,,\,)}_{2}$ を含まない)であり，$NK\overset{※}{=}C(K^{2})$ である．(K がこのような形にかけることは、定理の証明で矛盾を出すとき最後のとどめとして使われる.)　K が (2,2)型 abelian のときは K のすべての元 $\neq 1$ は $(1)(2)\cdots(i)\underbrace{(\,,\,)}_{2}\cdots\underbrace{(\,,\,)}_{2}$ の形をしている．

証明は伊藤氏にならって G が2重可遷群であるから、1の stabilizer $G_1=f$ によって G を分解し($G=f+fIf$，ここに I は $I=(1,2)\cdots$ なる形の involution)、G の involution の個数と f の involution の個数との関係を調べることからはじめる．その際、G 又は f の involution を fixed

※ Π を G の部分集合とするとき，$N\Pi$，$C\Pi$ はそれぞれ G における Π の normalizer，Π の centralizer を表わす．

14

point 0，1個，2個以上のものにわけて考える（fixed point が2個以上の involution は k の involution に共役だから、その g における個数 a は $[g:Nk]$ を使って表わされる；k が cyclic，$k=\langle K\rangle$ のときは K^2 が k の唯一の involution で，$Nk=C(K^2)$ より $a=[g:Nk]$．k が $(2,2)$ 型 abelian のときは k が丁度3個の involution をもつから $a=3[g:Nk]$）．Witt の定理によって Nk/k は $\{1,2,\cdots,i\}$ 上2重可遷で Frobenius 群（$|Nk/k|=i(i-1)$）となることから、i はある素数 p の巾乗（$i=p^m$）になることがわかる。involution の個数の関係式から、$n=$ odd（どんな involution も1個以上 fix する），$n=$ even（どんな involution も1個だけ fix することはない，つまり fixed point 0か2個以上）のそれぞれの場合に n が i によって表わされ、従って g の order が i 従って p で表わされる．n の i による表わし方は $I(\in Nk)$ の k への作用のしかたを反映して $n=$ odd，$n=$ even の場合それぞれに4通りあり、計8通りあることがわかる．この8通りの場合を吟味し、次々に矛盾を導き，残るのは定理で言ったようなものだけであると話をすすめていく．8通りにわけられた場合を矛盾に追いやって消していくときに使われるのは、Nk/k が $\{1,2,\cdots,i\}$ 上2重可遷な Frobenius 群であること，normal complement の存在を保証する Burnside

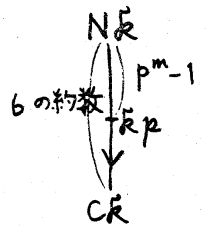
や Schur-Zassenhaus の定理, automorphism の働き方からその働きを受ける群の性質を明らかにする定理, そしていつもいつもお世話になる Sylow の定理などである.

場合の消し方の概略を見てみよう.

n = odd のとき (このとき p = odd prime)

$\mathfrak{p}$ を $N\mathfrak{k}$ ($i = p^m$, $|N\mathfrak{k}| = 4i(i-1) = 4p^m(p^m-1)$) の p-Sylow 群とすると、$N\mathfrak{k}/\mathfrak{k}$ が $\{1, 2, \cdots, i\}$ 上 Frobenius 群であることから $\mathfrak{p}$ は elementary abelian で $\mathfrak{p} \lhd N\mathfrak{k}$.

$\mathfrak{k}\mathfrak{p}/\mathfrak{k}$ は Frobenius 群 $N\mathfrak{k}/\mathfrak{k}$ の Frobenius kernel だから $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ と $C\mathfrak{k}$ は含む, 含まれるの関係にある。$\mathfrak{k}$ が cyclic のときは $[N\mathfrak{k} : C\mathfrak{k}] = 1$ or 2 だから $\mathfrak{p} \subset C\mathfrak{k}$, 従って $\mathfrak{k}\mathfrak{p} \subset C\mathfrak{k}$.



$\mathfrak{k}$ が (2,2) 型 abelian のときは $C\mathfrak{k} < \mathfrak{k}\mathfrak{p} \leqq N\mathfrak{k}$ ならば, 左図より p, m が決まり ($p = 3$, $m = 1$) $\mathfrak{g}$ が決定する (そのような $\mathfrak{g}$ はないか, 定理で主張したようなもの).

$\mathfrak{k}$ が cyclic でも, $\mathfrak{k}$ が (2,2) 型 abelian でも $\mathfrak{k}\mathfrak{p} \subset C\mathfrak{k}$ (このとき, $\mathfrak{p}$ が elementary abelian より $\mathfrak{p} \subset C\mathfrak{p}$, よって $\mathfrak{k}\mathfrak{p} \subset C\mathfrak{p}$) のときは次のようにする。まず $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ と $C\mathfrak{p}$ とのずれを調べる. $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の p-Sylow 群にもなっているときは, Sylow, Burnside, Schur-Zassenhaus の定理を使って, $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ は $C\mathfrak{p}$ において normal complement $\mathfrak{l}$ をもつことがいえる (

$\mathfrak{g}$はC_pのHall subgroupであることから$\mathfrak{g} \lhd N_p$もわかる. 従って$N_{\mathfrak{k}} \subset N_p$は$\mathfrak{g}$に働く). $N_{\mathfrak{k}}$におけるpのcomplement $\mathfrak{l} = \mathfrak{f} \curvearrowright N_{\mathfrak{k}}$の$\mathfrak{g}$への働き方を調べる($\mathfrak{g}$はfixed pointをもたないことや$|\mathfrak{g}| \mid n$などを使って)と, $\mathfrak{l}$のどの元も$\mathfrak{g}$の元と可換にならず, 従って$|\mathfrak{g}| \geq |\mathfrak{l}| + 1 = 4(p^m - 1) + 1 = 4p^m - 3$となる. ところが, 一方では$|\mathfrak{g}| \mid n$($n$は$p$によって表わされている)だから, いま出た$\mathfrak{g}$のorderのとりうる値と比較して矛盾を出す. これでもまだ矛盾が出ない場合($|\mathfrak{g}| = 4p^m - 3$ ($p \neq 3$)で$\mathfrak{l}$は$\mathfrak{g}^{\#} = \mathfrak{g} - \{1\}$にtransitiveに働く場合, $\mathfrak{g}$はelementary abelian q-group(qはpでない素数))は, $\mathfrak{g}$が$\mathfrak{N}$のq-Sylow群であること, pのnormalizer N_pと$\mathfrak{g}$のnormalizer $N_{\mathfrak{g}}$の関係を調べ, それがSylowの定理に反することをいう.

pが$\mathfrak{N}$のSylow群でないとき($\mathfrak{k}$: cyclic; $n = i^2 = p^{2m}$や$n = i(4i-3) = p^m(4p^m - 3)$, $p = 3$のときがその場合だが, 後者の場合をごく簡単に述べよう)は, そのcentralizer C_pはpよりもorderの高いp-Sylow群p'をもつことになり, $C_p = \mathfrak{k}p'$ (p'は$\mathfrak{N}$のp-Sylow群にもなっていることが$\mathfrak{N}$のorderからわかる)となることがわかる(これは少々面倒だが, pやp'/pのautomorphismを調べたりして出す). そしてp, p'/pからp'の性質(p'がabelianになるとか, $\mathfrak{k}$のp'への働き方)

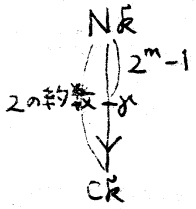
を調べて矛盾を出すのである.

以上に見るように, $\mathfrak{k}$ が cyclic のときは比較的面倒であるが, $\mathfrak{k}$ が (2,2)型 abelian のときはかなり簡単である. それはひとえに, n の p による表わされ方によっている. 即ち, $\mathfrak{k}_p \subset C\mathfrak{k}$ のときは上記の説明中, $|\mathfrak{g}| \geqq 4p^m - 3$ と $|\mathfrak{g}| \mid n$ を比較する所で全部矛盾が出て, 話は済んでしまうのである. $C\mathfrak{k} < \mathfrak{k}_p \leqq N\mathfrak{k}$ のときにしても, $p=3$ (4ページ参照) となることと, n の p による表わされ方から直ちに話は済む. つまり, $|\mathfrak{p}| = 3^m \mid |\mathfrak{g}|$ であるが, たとえば, $n = \frac{1}{3}p^m(p^m+2)$ $= \frac{1}{3}\cdot 3^m(3^m+2)$ のときは, $|\mathfrak{g}| = 4n(n-1) = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^m$ $(3^m+2)\cdot\frac{1}{3}(3^m-1)(3^m+3)$ で $3^m \nmid |\mathfrak{g}|$ となって矛盾である.

n = even のとき (このとき $p=2$ となる)

今度は, 上の場合と逆に, $\mathfrak{k}$ が cyclic のとき簡単で, $\mathfrak{k}$ が (2,2)型 abelian のときが面倒である. $N\mathfrak{k}$ $(|N\mathfrak{k}| = 2^{m+2}(2^m-1))$ の 2-Sylow 群を $\mathfrak{s}$ としよう. $\mathfrak{s}/\mathfrak{k}$ は Frobenius 群 $N\mathfrak{k}/\mathfrak{k}$ の Frobenius kernel だから, $\mathfrak{s}$ と $C\mathfrak{k}$ は言む, 含まれるの関係にある. ($\mathfrak{s}$ は n = odd のときの $N\mathfrak{k}$ の p-Sylow 群 $\mathfrak{p}$ と比べて, $\mathfrak{k}$ とのかかわりあいなどが全く異なる; $\mathfrak{k}$ こがであるが $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = 1$).

$\mathfrak{k}$ が cyclic のとき, I の $\mathfrak{k}$ への作用のしかたは2通り ($K^I = K^{-1}$ or K) あり, $K^I = K^{-1}$ のときは $I \in C\mathfrak{k}$, $I \in \mathfrak{s}$



から，左図のようになって $m=1$，従って $i=2$ となり，定理で主張しているような σ が出てくる．$K^I=K$ i.e. I が $\mathfrak{K}$ に trivial に働くときは，$K\in C(I)$ で（従って $C(I)$ は order 4 の元 K をもつ），$I\sim K^2$（$\sim$ は共役を表わす．σ が2重可遷だからこのように仮定してよい．）から $C(I)\sim C(K^2)=N\mathfrak{K}$．また，$\Gamma/\mathfrak{K}$ は degree $i=2^m$ の2重可遷な Frobenius 群 $N\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ の 2-Sylow 群だから elementary abelian であるが，このことから $C(I)$ の order 4 の元は2乗するとすべて I になり，$K^2=I$（$K^2=(1)(2)\cdots$，$I=(12)\cdots$）となって矛盾が出る．

$\mathfrak{K}$ が $(2,2)$ 型 abelian のときは，I が $\mathfrak{K}$ に trivial に作用しても，$C(I)$ は order 4 の元をもつことがいえないから，上のようにはいかない。それ故に，今度は面倒になるのである．(因みに，伊藤氏の扱ったものは，$|\mathfrak{K}|=2$ だからやはり $C(I)$ が order 4 の元をもつことがいえず，ここから $\mathbf{S}$ という変てこな群が飛び出して来たのである．) 木村さんは，ここを次のようにして切り抜けた。$\mathfrak{L}$ を $N\mathfrak{K}$ における Γ の complement（$|N\mathfrak{K}|=2^{m+2}(2^m-1)$，$|\mathfrak{L}|=2^m-1$，Schur-Zassenhaus）とすると，$\mathfrak{L}$ の Γ への働き方から，Γ の各元は具体的に

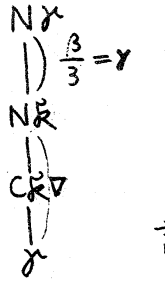
$\Gamma=\mathfrak{K}+\sum_{\nu\in\mathfrak{L}} I^\nu\mathfrak{K}$ とかけることを有効に使うのである．

$C\mathfrak{K}<\Gamma$ のときは扱いやすい：先と同じような図式から，

$m=2$，従ってγは order $2^{2+2}=16$ の non-abelian となる．一方，γの元の形からγは丁度9個の involution をもっていることがわかる．しかし，order 16 の non-abelian group でこのような群は存在しない．

$\gamma \leq C_\kappa$のときが問題である．

βを丁度i個を fix するγの involution の個数とする（つまり，κの単位元以外の3個の元は丁度i個だけ fix する involution であるが，このような元と共役なγの元がβ個あるとする．）．γの中にκと共役な subgroup がγ個あるとすれば，$[\eta : N_\kappa] = \gamma [\eta : N_\gamma]$．



κはその共役と独立だから，$\beta = 3\gamma$．よって左図のような図式がえられる．一方，少し前に言ったように，γの各元（単位元以外は fix point なしか，丁度i個だけ fix する）は具体的にかけていることから，βのとりうる値も決まる．N_γのηにおける index $[\eta : N_\gamma]$がβの値を使って表わされるが，これが整数になるかどうかを調べるのがこの論法の要点である．

以上，大まかに概略を述べたが，統一した基本的な考え方がわからないままに書いたので，すっきりしない．更に $|\kappa| =$ odd の場合の Bender の論文も読んでいないので比較もできず，おもしろくないがお許し願いたい．

なお，最近，木村さんは，上の問題を発展させて，2点の stabilizer が order 2^n の cyclic group のときの2重可遷群をも決定した。結果は予測したような群で，変てこなものは出てこないが，証明はかなり複雑のようである。勿論，$|K|=4$ の場合の証明が model になっている（n = even で，K が $(2,2)$ 型 abelian の所で述べた論法も使われる）。

大抵，どんな本でも言いたいことは沢山あるけれど，紙数の関係上割愛せざるをえないらしいが，小生，木村さんの論文をよく理解していないこともあって，何も言うことができない。渡された原稿用紙があまってあまって仕方がないので，木村さんや名大での群論ゼミのことを2，3行書いておこう。木村さんは山育ちのせいもあってか，実に悠々，淡々としておられる。数学の研究も無理なく伸び伸びとやっておられるようで，しかもここぞというときには気魄がこもる。木村さんに接した人が誰でも感ずるように，とても遊び好きで親しみやすく，ときにはゼミの時間をさいて恋愛特殊講義さへして下さる。

都筑先生，木村さん，原田さんの名コンビによるゼミは外野席で見物している僕達には，話している内容はちっともわからなくても，各自が言いたいことを言われ，すこぶる痛快であった。木村さんなどは机の上に足をのせたりして，とて

も行儀がわるい。

けれども，この４月から都筑先生が北大へ行かれてしまい，名コンビの大きな一角がくずれてしまった．そしてまた夏には原田さんがPrinceton に行かれることになっている．都筑先生，原田さんに行かれて困るけれど，木村さんに尻をたたかれながらやっていくことにしよう。