数理解析研究所講究録
第 54 巻 1968 年 22-34

4重可移群の分類問題

阪大 理　永尾 汎

§1 序

野田，大山両氏の講演の要旨を解説するのが目的であるが，完全な証明は近く発表される論文をみて頂くこととして，用いられた論法のうち興味あるものをとりあげて，典型的な場合について解説することにする。

記号

S_n, A_n : n 次の対称群，交代群

M_n : n 次の Mathieu 群（ただし，$n = 24, 23, 12, 11$）

$G_{ij\cdots k}$: 置換群 G における，点 $i, j, \cdots, k$ の stabilizer。すなわち，$i, j, \cdots, k$ の各点を固定する G の元全体のつくる部分群。

$I(X)$: 置換の集合 X の固定点の集合。

$|X|$: 集合 X の元の個数。

$N_G(X)$: 群 G における部分集合 X の normalizer。

$C_G(X)$: 群 G における X の centralizer。

X^{Δ} ：Ω上の置換の集合XがΩの部分集合Δを（全体として）固定するとき，XのΔ上への制限。

$\alpha_i(x)$ ：置換xをcycleの積に分解したとき，i-cycle（長さiのcycle）の個数。

古い結果

今まで知られている結果で主なものをあげておく。

[I]（Frobenius [1, 5]）

GをΩ上の置換群とするとき

$$\sum_{x\in G}\binom{\alpha_1(x)}{\kappa}\binom{\alpha_2(x)}{\lambda}\cdots = \frac{m\,|G|}{1^{\kappa}\kappa!\,2^{\lambda}\lambda!\cdots}$$

ここで，mは次のようにしてきまるnon-negative integerである：$t=\kappa+2\lambda+\cdots$とし，Ωのt個の直積Ω^tの部分集合で，$x=(i_1)\cdots(i_\kappa)(j_1j_1')\cdots(j_\lambda j_\lambda')\cdots$となる$G$の元$x$が存在するような点$(i_1\cdots i_\kappa j_1j_1'\cdots j_\lambda j_\lambda'\cdots)$の全体からなるものを$T$とする。$G$は$T$上自然に作用し，そのときの$G$-orbitの個数が$m$である。

特に，Gがt重可移ならば，$m=1$である。

[II]（Witt [8]）GをΩ上t重可移な群とし，t個の点の~~多~~ stabilizer $G_{i_1\cdots i_t}$の部分群Uが次の性質をもつとする：

2_i

(*)　$G_{i_1\cdots i_t}$の部分群VがUとGで共役ならば，Vは$G_{i_1\cdots i_t}$においてUと共役である。

このとき，$N_G(U)$は$I(U)$を（全体として）固定し，$(N_G(U))^{I(U)}$は4重可移である。

以下，G，H，Pは特にことわらない限り次のような群を意味するものとする。

G：　$\Omega=\{1, 2, \cdots, n\}$上の4重可移群。

H：　4点1, 2, 3, 4 のGにおける stabilizer G_{1234}

P：　Hのある2-Sylow群.

このとき，Gの4重可移性により，Gの4点の stabilizer はすべてHに共役である。

[Ⅲ]　$n<35$ならば，$G=S_n$, A_nまたはM_nである。

[Ⅳ]（Jordan）$|H|=1$ならば

$$G=S_4,\ S_5,\ S_6 \text{ または } M_{11}$$

[Ⅴ]（M. Hall [2]）$|P|=1$ならば

$$G=S_4,\ S_5,\ A_6,\ A_7 \text{ または } M_{11}$$

[Ⅴ]はつぎのように言ってもよい。Gの involution（位数2の元）が高々3点を固定すれば，Gは上にあげた何れかの群である。この拡張として

[Ⅵ]（Nagao [4]）Gの involution が高々5点を固定す

るならば，Gは[V]の何れかの群か，または

$$S_6,\ S_7,\ A_8,\ A_9,\ M_{12}$$

の何れかである。

[VII] (=[II]+[IV]) H自身[II]の(*)をみたし，更に $(N_G(H))^{I(H)}$ は[IV]の仮定をみたす4重可移群である。したがって

$$(N_G(H))^{I(H)} = S_4,\ S_5,\ A_6 \text{ または } M_{11}$$

特に，$|I(H)| = 4, 5, 6$ または 11 である。

[VIII] (Nagao [3]) $G \neq S_5, A_6, M_{11}$ ならば，$|I(H)| = 4$ である。

[IX] (=[II]+[V]) Pは[II]の(*)をみたし，更に $(N_G(P))^{I(P)}$ は[V]の仮定をみたす4重可移群である。したがって

$$(N_G(P))^{I(P)} = S_4,\ S_5,\ A_6,\ A_7 \text{ または } M_{11}$$

特に，$|I(P)| = 4, 5, 6, 7$ または 11 である。

<u>新らしい結果</u>

野田君は次の定理1を，大山君は定理2について解説した。

<u>定理1</u> (Noda - Oyama [6]) $P \neq \{1\}$ で巡回群ならば，$G = S_6$ または S_7 である。

<u>定理2</u>（Oyama [7]） $P \neq \{1\}$ で，P が $\Omega - I(P)$ 上 semi-regular ならば，G は [VI] であげた群の何れかか，または M_{23} である。

<u>注意</u> [VI] は次のように言ってもよい。$P \neq \{1\}$ で，P が $\Omega - I(P)$ 上 semi-regular，かつ $|I(P)| = 4$ または 5 ならば，G は [VI] であげた群の何れかである。その意味で，定理2は [VI] の拡張である。

京都の集合の後，最近大山君は次のようなよい結果を得た。

<u>定理3</u>（Oyama） $P \neq 1$ ならば，$|I(P)| \neq 6$ である。

<u>§2 二つの補題</u>

上の定理の証明に用いられた次の二つの補題は有用である。

<u>補題1</u>（Oyama） $|I(P)| = 6$ または 7 で，P が $\Omega - I(P)$ 上 semi-regular ならば，P は elementary abelian である。

<u>補題2</u>（Oyama - Noda） $P \neq \{1\}$ で，$|I(P)| = 6, 7$ または 11 ならば，G の任意の involution は少なくとも $|I(P)|$ 個の点を固定する。

これらの証明でよく用いられる論法は次のようなものである。G の位数2巾の部分群 U が，4点の集合 $\cancel{G_{ij}}$ $\{i, j, k, l\}$ を全体として固定するとする。このとき，U は G_{ijkl} を normalizeし，G_{ijkl} の 2-Sylow群の個数は奇数であるか

ら，そのある2-Sylow 群を normalize する。特に，$|I(Q)|=6, 7$ または 11 ならば，$U^{I(Q)}$ は $(N_G(Q))^{I(Q)}=A_6, A_7$ または M_{11} の部分群として，その形が制限される。例えば，$U^{I(Q)}$ は偶置換ばかりからなる。

例として，補題1で，$|I(P)|=6$ のときを証明してみよう。$I(P)=\{1, 2, \cdots, 6\}$ とし，P が位数4の元

$$x=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(ijkl)\cdots$$

を含むとして矛盾を導く。

x は G_{ijkl} のある2-Sylow群Qを normalize する。$I(Q)=\{i, j, k, l, u, v\}$ とすれば，$x^{I(Q)}$ は偶置換であるから

$$x^{I(Q)}=(ijkl)(uv)$$

となる。x^2 は involution で，$\{1, 2, \cdots, 6\}\cup\{u, v\}$ の各点を固定する。これは，P が $\Omega-I(P)$ 上 semi-regular という仮定に反する。

§3 定理1について

定理が成立しないとして，Gを次数最小の定理に対する反例とする。このとき，[III] によりGの次数 $n\geq 35$ としてよい。証明は次の三つの場合に分けてやる。

Case 1. $N_G(P)^{I(P)}=M_{11}$

Case 2 $N_G(P)^{I(P)}=A_6$ または A_7

Case 3　$N_G(P)^{I(P)} = S_4$ または S_5

ここでは，Case 1についてのべてみる。

$D\neq\{1\}$ を P の任意の部分群とする。このとき，次がなりたつことをまず示す：

(i)　$I(P) = I(D)$

(ii)　$C_G(D) = N_G(D)$

(iii)　$C_G(D)^{I(D)} = M_{11}$

（証明）Dは（Pが巡回群であるから）[II]の(*)の仮定をみたし，$N_G(D)^{I(D)}$ は4重可移である。一般に，$I(P)\subseteq I(D)$ であるが，$I(P)\neq I(D)$ ならば，$P^{I(D)}\neq 1$ で，これは $((N_G(D))^{I(D)})_{1234}$ の 2-Sylow 群で巡回群である。$D\neq 1$ より $|I(D)|<n$。したがって，Gの次数の最小性により，$N_G(D)^{I(D)}=S_6$ または S_7。よって，$|I(P)|=11\leq 6$ または 7 となり矛盾。

これで，(i)が証明された。このとき，更に $N_G(D)^{I(D)}$ の4点の stabilizer は odd order で，かつ $11\leq|I(D)|$ であるから，[V]により $N_G(D)^{I(D)}=M_{11}$ である。

次に，自然な準同型 $N_G(D)\longrightarrow N_G(D)^{I(D)}$ の kernel を K とする。(i)より $K\geq P$ で，また $N_G(D)/K = M_{11}$。

$N_G(D)/C_G(D)$ は巡回群 D の自己同型の群であるから，位数は2巾である。したがって，$C_G(D)\not\leq K$。$C_G(D)K$ は K を proper に含む $N_G(D)$ の正規部分群であるが，M_{11} が単

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & N_G(D) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K \arrow[dr, dash] & & C_G(D) \arrow[dl, dash] \\ & \cdot \arrow[d, dash] & \\ & P \arrow[d, dash] & \\ & \{1\} & \end{tikzcd}$$

斜群であることより

$$N_G(D) = C_G(D)K$$

$$\therefore\ N_G(D)/C_G(D) \simeq K/K\cap C_G(D).$$

ところが，$K\cap C_G(D)$ は P を含む。K は G_{1234} の部分群で，P は G_{1234} の2-Sylow群であるから，上の右辺の位数は奇数である。左辺の位数は2巾であるから，$N_G(D)=C_G(D)$ をうる。

定理の証明は，更に $|P|\geqq 8$，$|P|=4$，$|P|=2$ の三つの場合に分けて行われるが，簡単のため，最初の場合をとりあげてみよう。

$D=\langle d\rangle$ を P の位数8の部分群とする。また，$I(P)=I(d)=\{1,2,\cdots,11\}$ とする。

$a=(12)(34)\cdots\cdots$ を P の involution と共役な元とすれば，(i) により $|I(a)|=11$。a は G_{1234} のある2-Sylow群，たとえば P を normalize する。したがって，a は D を normalize し，(ii) によりそれを centralize する。

$a^{I(d)}$ ~~$\in M_{11}$~~ は M_{11} に属する involution であるから，$I(d)$ の丁度3点，たとえば 9, 10, 11 を固定する。a と d は可換であるから，$I(a)=\{9,10,11,12,\cdots,19\}$ とするとき

$$d=(1)(2)\cdots\ (9)(10)(11)\ (12,13,\cdots,19)\cdots$$

$$a=(1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9)(10)(11)(12)\cdots(19)\cdots$$

としてよい。このとき，$d^{I(a)}$は$N_G(a)^{I(a)}=M_{11}$の3点のstabilizerに含まれる位数8の元となり，矛盾である（M_{11}の3点のstabilizerはquaternion!）。

Case 2 についても，A_6，A_7の単純性により(i)，(ii)がなりたち，(iii)も対応する事柄がなりたつ。Case 3 のときは$D=P$に対して，$C_G(P)^{I(P)}\geq A_4$，A_5がいえて，これが有効に用いられる。

§4 定理2について

Pは$\Omega-I(P)$上semi-regularとする。$|I(P)|=4,\ 5$のときは[VI]ですんでいるので，$|I(P)|=6,\ 7,\ 11$のときのみ考えればよい。このうち，次の場合

$$|I(P)|=6\ ,\quad N_G(P)^{I(P)}=A_6$$

のときの証明が面白いので，概略をのべてみる（特に，[I]を用いる部分を中心に）。

まず，補題1によりPはelementary abelianである。比較的簡単に次のことが分る：

(i) aが位数$4t$（t：奇数）の元ならば

$$\alpha_1(a)=2\ ,\qquad \alpha_2(a)=2$$

(ii) aが位数$8t$（t：奇数）の元ならば

$$\alpha_1(a)=0\ ,\quad \alpha_2(a)=1\ ,\quad \alpha_4(a)=1$$

(iii)　$\alpha_4(a)>0$ ならば，a の位数は $4t$ または $8t$（t：奇数）

また

(iV)　$|P|=16$

(V)　G は位数 8 の元を含む。

ことが証明される。

G は4重可移であるから，[I] によれば

(1)　$$\sum_{x\in G}\alpha_4(x)=\frac{g}{4}\qquad(g=|G|).$$

(2)　$$\sum_{x\in G}\alpha_2(x)\alpha_4(x)=\frac{mg}{2\cdot 4}$$

$\alpha_4(x)\neq 0$ ならば，(iii) により x の位数は $4t$ または $8t$ の形で，このとき，それぞれ $\alpha_2(x)=2$ または 1 になる。また，(V) により $\alpha_2(x)\alpha_4(x)=\alpha_4(x)$ となる元 x があるから

$$\sum_x\alpha_4(x)<\sum_x\alpha_2(x)\alpha_4(x)<2\sum_x\alpha_4(x)$$

(1)，(2) を代入して，$1<m/2<2$，$m=3$ をうる。すなわち

(3)　$$\sum_x\alpha_2(x)\alpha_4(x)=\frac{3g}{2\cdot 4}$$

(1)，(3) は次のようにかける：

$$\sum_{x'}{}'\alpha_4(x')+\sum{}''\alpha_4(x'')=\frac{g}{4}$$

$$\sum_{x'}{}' 2\alpha_4(x') + \sum_{x''}{}'' \alpha_4(x'') = \frac{3}{8} g$$

ここで，$\sum'$は位数が$4t$の形の元x'全体にわたり，x''は位数が$8t$の形の元x''全体にわたる。これより

(4) $$\sum_{x'}{}' \alpha_4(x') = \frac{g}{8}$$

をうる。一方

(5) $$\sum_{x} \binom{\alpha_2(x)}{2} \alpha_4(x) = \frac{m' g}{2^2 \cdot 2 \cdot 4}$$

ここで，xの位数が$8t$ならば$\alpha_2(x)=1$であるから，左辺の和は位数が$4t$の元xについてのみ考えればよい。このとき，$\alpha_2(x)=2$であるから，(4)と(5)の右辺は一致する。よって，$m'=4$をうる。

さて，m'の意味を考えれば，Gの4重可移性より

$$a = (1\,2)(3\,4)(k_1\, k_2\, k_3\, k_4)\cdots$$

の形のGの元が存在するような$(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \Omega^4$の全体の集合$T'$における$H$-orbitの個数が4になる。ところが，$H$-orbit (in $\Omega - I(H)$) を考察することにより，上のorbitの個数≥ 5が証明されて矛盾が導かれる。

§5 関連する問題

Pがunique involutionをもつならば，Pは巡回群か，またはgeneralized quaternionである。巡回群のときは定理1で片づいたが，generalized quaternionのときはどうなる

であろうか。この問題について，今まで分っている事柄をのべてみる。以下，Pは unique involution c をもつとする。まず，可換な二つの involution a, b に対しては

$$|I(a) \cap I(b)| \leqq 3$$

である。なぜならば，a, b が4点 i, j, k, l を共通に固定するとすると，$\langle a, b \rangle$ は G_{ijkl} のある 2-Sylow 群に含まれ，仮定に反する。そこで，二つの場合に分けて考える。

(i) P が $\Omega - I(P)$ 上 semi-regular のとき。

$|I(P)| = 4$ または5ならば，[Ⅳ] により G の分類はすんでいる。$|I(P)| = 6, 7$ ならば，補題1 により P は elementary abelian，したがって，仮定により $|P| = 2$。このときは，定理1 によりすみ。$|I(P)| = 11$ のときはおきないことが，証明できて，上の場合は分類がすべてできる。

注意　定理2を使えばよいが，実はその証明に，$|I(P)| = 11$ のときおきないという上の結果を用いる。

(ii) P が $\Omega - I(P)$ 上 semi-regular でないとき。

（このときは，$I(P) \neq I(c)$，よって，$P^{I(c)} \neq 1$ となる。）

$x = (1\,2)(3\,4)\cdots$ なる involution は G_{1234} のある 2-Sylow 群，たとえば P を normalize する。このとき，x と c は可換であるから，$x^{I(c)}$ は高々3点しか固定しない。一方，$\langle c \rangle$ は [Ⅱ] の (*) の仮定をみたし，$N_G(c)^{I(c)}$ は4重可移である。

3 i

$P^{I(C)}$ はその4点のstabilizerの2-Sylow群で，$\neq \{1\}$ である。したがって，$|I(P)| \geq 6$ とはなりえない（補題2）。したがって，$|I(P)| = 4$ または5。

以上をまとめると，Pがunique involutionをもつときのGの分類問題は，Pが$\Omega - I(P)$上semi-regularでなく，かつ$|I(P)| = 4$または5のときできれば完結する。

文　献

[1] G. Frobenius : S. B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1900), 516−534.

[2] M. Hall Jr. : The theory of groups, Macmillan.

[3] H. Nagao : Osaka J. Math. 2 (1965), 327−341.

[4] H. Nagao : J. Algebra (近刊)

[5] H. Nagao : Multiply transitive groups, Calif. Inst. Tech. (1967)

[6] R. Noda - T. Oyama : J. Algebra (近刊)

[7] T. Oyama : Osaka J. Math. (近刊)

[8] E. Witt : Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1937), 256−264