数理解析研究所講究録
第 54 巻 1968 年 44-49

12〜15次交代群の特徴づけ。
(八牧宏美氏の結果)

東大 教養 近藤 武

1. 本稿は，八牧宏美氏の $n=12,13,14,15$ 次の交代群の特徴づけに関する講演の報告である。講演の際は証明の重要な点の説明を八牧氏特有の超スピードで話され，例えば Glauberman の比較的新しい重要な結果の引用なども"G"とも云及せずに進むと云った調子であった。筆者のように内容をあらかじめ知っていた者は別にして，他の人にとってはそのスピードのみが印象に残った事と思われる。以下，八牧氏の結果およびその方法の要点を少し一般的立場から，$n=12$，13 の時を主として報告する まず用いる記号を定めておこう。

A_{4n} を $4n$ コの文字 $\{1, 2, \cdots, 4n\}$ の上の交代群で

$$\alpha_n = (1,2)(3,4)\cdots\cdots(4n-1, 4n)$$

とおく。α_n は A_{4n} の 2-シロー群の中心の位数 2 の元である。

$$H(n) = C_{A_{4n}}(\alpha_n),$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_k &= (4k-3, 4k-2)(4k-1, 4k) \\ \pi_k' &= (4k-3, 4k-1)(4k-2, 4k) \end{aligned}\right\} \quad (1 \le k \le n)$$

$$\mathfrak{S} = \langle \pi_1, \pi_1', \cdots, \pi_n', \pi_n \rangle$$

とおくと，$\mathfrak{S}$ は $H(n)$ の位数 2^{2n} の基本アーベル群である。
重要な事は，$\mathfrak{S}$ が次の性質をもつ事である。

(*) $H(n)$ の位数 2^{2n} の基本アーベル群は，$H(n)$ で $\mathfrak{S}$ と共役であり，$\mathfrak{S}$ を含む $H(n)$ の 2-群は $\mathfrak{S}$ を正規化する

2．$G(n)$ を次の性質をもつ有限群とする．

(2, 1) $G(n)$ は指数 2 の部分群をもたない

(2, 2) $G(n)$ の 2-シロー群の中心の位数 2 の元 α_n で

$$C_{G(n)}(\alpha_n) \cong H(n)$$

なるものが存在する。

以下簡単のため $C_{G(n)}(\alpha_n)$ と $H(n)$ を同一視する事にしよう。
そこで次の問題 (P_n) を考える。

(P_n) $G(n) \cong A_{4n}$ 又は A_{4n+1} であるか?

八牧氏はこの問題の $n = 3$ の場合に次の結果を証明された。
群 H に対して $i(H)$ = 位数 2 の共役類の数 を表わすと，

定理	(i)	$G(3) \cong A_{12}$ 又は A_{13} であるか或いは，
	(ii)	$i(G(3)) = 4$.

注意 (α) $i(A_{12}) = i(A_{13}) = 3$ であるから，定理は A_{12}, A_{13} の特徴づけを与えている。

(β) (ii)を満す群は存在する。実際 2コの元を持つ有限体上の6次元シンプレクティック群 $Sp_6(2)$ は 条件(2, 1)(2, 2)を満し，$i(Sp_6(2))=4$ である。しかしながら $i(G(3))=4$ なる群 $G(3)$ は $Sp_6(2)$ に限ると思われる。実際 八柳氏は引続きこの問題に取組んでおられ可成りの進展をみているようである。（最近八柳氏はこの問題を肯定的に解決された。）

(γ) (P_1) は K. A. Fowler によって解かれ，(P_2) は D. Held が解決した。（J of Alg 7, (1967) 218－237）ただし (P_2) の時には，$G(2)$ としては，A_8, A_9 の他に $A_8 \cong GL(4,2)$ の或る放物的部分群が出て来る。

(δ) 明らかに $4n+2$ 次又は $4n+3$ 次の交代群に対して，(P_n) に対応する問題が考えられる。報告の都合上この問題を

$$(P_n^0)$$

で表わす事にしよう。(P_n^0) は一般の n に対して解決されているが（原田氏の報告参照） 問題 (P_n) は八柳氏の $n=3$ の場合が最良の結果である。

3. (P_n) （(P_n^0) でも同じ）を解く際に必要な仕事は，次の2つである。

（I） $G(n)$ の位数2の元の fusion を決定する事。

（II） $G(n)$ の位数2の各元の中心化群を決定する事。

八牧氏は $n=3$ の時に，I，II を大変な計算の結果，解決した。特に II を実行する方法は些細な工夫を加えれば，$n \geqq 3$ の時にも適用可能なもので，この事が (P_n^c) を解くのに大きな寄与をした事を特に強調しておきたい。事実現在では，$n>3$ の時に (I) を解きさえすれば (P_n) は直ちに解決される状態になっている。従って以下問題 (I) を主として話を進める事にする。

4. まず最初に (I) を解く際の基本的注意をしておく。(I) を解くには次の $(\hat{\mathrm{I}})$ を解けば良い。

$(\hat{\mathrm{I}})$ 正規化群 $N_{G(n)}(S)$ を決定せよ。

実際，$H(n)$ の構造から，$G(n)$ の位数 2 の元は，S のある元と共役であり，S の性質 (*) から，S の 2 つの元が $G(n)$ で共役である事と $N_{G(n)}(S)$ で共役である事は同値である。この事は $(\hat{\mathrm{I}})$ を解けば (I) が解ける事を示している。(実際には，(I) が解ければ $(\hat{\mathrm{I}})$ が解ける。即ち (I) と $(\hat{\mathrm{I}})$ は同値な問題である。)

さて，八牧氏の $n=3$ の場合には，$N_{G(3)}(S)/S$ の 2-シロー群が位数 8 の正多面体群である事から，Gorenstein-Walter の定理 (Illinois Jour Vol 6 553-593 (1962)) および $H(3)$ の構造を用いて，$N_{G(3)}(S)/S$ の可能な構造が非常に

制限される。八杉氏はこの事を手掛りにして、$G(3)$ の２シロー群の具体的構造を殆んど全て使い尽して $G(3)$ の位数２の元の fusion に２通りの可能性のある事を証明されたのである。容易に推察される様に $n=3$ の時のこの方法は、$n>3$ の時には適用不可能である。($n=3$ の特殊性を最大限に利用しているから。)

5. 最後に (P_n^0) に於いて (I) が解け、(P_n) に於いて (I) が解決していない事情を少し見てみよう。以下 $n \geqq 3$ とする。($n \leqq 2$ では成立しない事が出て来る！)

$H(n)$ の位数が２べきの最大正規部分群を M とする。M は位数 2^{2n-1} の基本アーベル群である。

$$J = S\cdot M$$

とおく。(P_n^0) においても J にあたるものを全く同様に定義してそれを

$$J^0$$

で表わそう。

(P_n^0) に於いて (I) が解けた理由は一言にして云えば、

「J^0 が考えている群の２シロー群の Thompson 部分群である」

と云う事を最大限に利用出来たからであると云える。(P_n) の

時には, Thompson部分群は S であって, S は J^0 と同じ役割りを果し得ない。ところで J は位数 2^{3n-1}, 級2の巾零部分群であって, $G(n)$ の各2-シロー群の中にこの性質をもつ部分群は只一つしかない。従って J は2-シロー群の中の特別な位置を占めている部分群である。しかしながら, これだけでは J^0 が (P_n^0) に対して果した役割りを J にさせる為には不十分である。と云うのは, (P_n^0) の時は J^0 が Thompson部分群である事から「考えている群の2-部分群 V とそれを含む2-部分群 L が与えられたとき, V が位数 2^{2n} のアーベル群で生成されていれば V は L に含まれる」と云う事が分るのに反して (P_n) に対してはこの様な命題が直ちには分らないからである。例えば,「$G(n)$ の J を含む2-シロー群を D とする時, J は S を含む D の全ての級2の巾零部分群で生成されている」と云う様な事が真ならば, 事は簡単であるが不幸にしてこれは真ではない。しかし J が (I) を解くのに相当大切な役割りを果す事は確からしく思われるが, 現時点では (P_n) に対して (I) を解く為には何か一つアイデアが欠けていると思われる。