数理解析研究所講究録
第 55 巻 1968 年 1-10

Fourier-Walsh級数の概収束について

秋田大　舘岡淳

§1. 序

L. Carleson [2] は L^2 関数の Fourier 級数 (F. S.) の概収束を示した。R. A. Hunt [3] は Carleson の方法と作用素の補間定理を用いて L^p 関数 $(1<p)$ の F. S. の概収束に拡張した。一方 Billard [1] は Carleson の方法を L^2 関数の Fourier-Walsh 級数 (F. W. S.) に応用した。ここでは Carleson-Hunt-Billard の方法で F. W. S. に対する Hunt の定理と類似の結果を述べる。

$f \in L^1(0,1)$ の F. W. S. の第 n 部分和を $S_n(x)$ で表わす。

$Mf(x) = \sup\{|S_n(x)| : |n| \geq 0\}, x \in (0,1)$ とするとき

定理1. $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$

定理2. $\|Mf\|_1 \leq C \int_0^1 |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C.$

定理3. $m\{x \in (0,1) : Mf(x) > y\} \leq C \exp\{-Cy/\|f\|_\infty\}, y > 0.$

§2. 記号

$(r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$ と $(w_0, w_1, \cdots, w_n, \cdots)$ はそれぞれ $(0,1)$ に対する Rademacher 系, Walsh 系とする。整数 $n \geq 1$ に対して N_n を $2^{N_n} \leq n < 2^{N_n+1}$ で定義し $n = 2^{n_k} + \cdots + 2^{n_1} + 2^{N_n}$ $(N_n > n_1 > \cdots > n_k \geq 0)$ とおく。

Dirichlet-Walsh 核を $W_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j(t)$ とおくと

$$W_n(t) = \prod_{j=1}^{N_n}(1+r_j(t)) + r_{N_n+1}\prod_{j=1}^{n_1}(1+r_j(t)) + \cdots + r_{N_n+1} r_{n_1+1} \cdots r_{n_{k-1}+1} \prod_{j=1}^{n_k}(1+r_j(t))$$

$$= w_n(t)\left[\delta^*_{N_n}(t) + \delta^*_{n_1}(t) + \cdots + \delta^*_{n_k}(t)\right],$$

但し $\delta^*_j(t) = 2^j \; (0<t<2^{-j-1}),\; -2^j \; (2^{-j-1}<t<2^{-j}),\; 0$ (その他).

そこで $\delta_n(t) = \delta^*_{N_n}(t) + \delta^*_{n_1}(t) + \cdots + \delta^*_{n_k}(t)$ とおく。

$f(x) \in L^1(0,1)$ に対して F.W.S. を

$$S(f) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(t), \quad \left(c_n = \int_0^1 f(t) w_n(t)\,dt\right)$$

と書けば $\Delta_k(f;t) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n w_n(t), \; (k \geq 0), \; \Delta_{-1}(f;t) = c_0$ とおくと

$$S(f) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_k(f;t).$$

$\omega_{j.\nu}$ $(\nu \geq 0;\; j = -2\cdot 2^\nu, \cdots, 2\cdot 2^\nu - 1)$ は $(-2,2)$ を等分して得られる長さ $2^{-\nu}$ で左側から右側に番号をつけた区間で，特に $(-2,2) = \omega_{0.-2}$，$(-2,0) = \omega_{-1.-1}$，$(0,2) = \omega_{0.-1}$ とおく。

整数 n と区間 ω_ν に対して $n[\omega_\nu] = [n/2^\nu]$ (Gauss 記号) とし特に $n[\omega_{-2}] = n[\omega_{-1}] = n$ とおく。

通常の区間 $(0,1)$ を修正して点 $t = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ $(\xi_i = 0, 1)$ の集合 $(0,1)^*$ を考え. totally disconnected compact abelian 群とする。ω_ν は点 $t = (\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_\nu^0, \xi_{\nu+1}, \cdots)$ $(\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_\nu^0$ は固定され $\xi_{\nu+1} \cdots$

は独立に変る)の集合とする。

$$\varphi_{\omega_\nu}[(\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots, \xi_\nu^0, \xi_{\nu+1}, \cdots)] = (\xi_{\nu+1}, \xi_{\nu+2}, \cdots)$$

で定義される関数 φ_{ω_ν} で ω_ν の構造を $(0,1)^*$ のそれに移す。ω_ν 上のWalsh関数を　$w_n(\omega_\nu; t) = w_n(\varphi_{\omega_\nu}(t))$ $(\nu \geq 0)$ と定義し $\delta_n^*(\omega_\nu; t)$, $\delta_n(\omega_\nu; t)$ も同様にする。そうすれば

$$w_n(t) = \theta\, w_{n[\omega_\nu]}(\omega_\nu; t), \quad \theta = \pm 1.$$

$(0,1)^*$ 上の F.W.S. の第 n 部分和

$$S_n((0,1)^*; x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_j(x) = \int_0^1 f(t)\, w_n(x-t)\, \delta_n(x-t)\, dt$$

の修正第 n 部分和

$$S_n^*((0,1)^*; x) = \int_0^1 f(t)\, w_n(t)\, \delta_n(x-t)\, dt$$

を考えると　$|S_n((0,1)^*; x)| = |S_n^*((0,1)^*; x)|$.

実数 l と区間 ω に対して

$$c_l(\omega) = c_l(\omega; f) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega f(t)\, w_l(\omega; t)\, dt$$

$$C_n(\omega) = C_n(\omega; f) = \frac{1}{10} \sum_{l=-n}^{\infty} |c_{l+n}(\omega)| \big/ (1+l^2)$$

とおく。また対 $(n[\omega], \omega)$ に対して

$$C_{n[\omega]}^*(\omega) = \max_{\omega' \subset \omega,\ 4|\omega'| = |\omega|} C_{n[\omega']}(\omega')$$

とおく。

§3. 準備の結果

Huntの定理を変形することによってこれらの結果は次の命題に帰着できる。すなわち

4

可測集合 $F \subset (0,1)^*$ の特性関数を χ_F とするとき

$$m\{x: M\chi_F(x) > y\} \leqq B_p^p y^{-p} mF, \quad 1<p<\infty.$$

この命題はさらに次の命題に帰着できる。すなわち

集合 F, 関数 $f(x)=\chi_F(x)$, $x\in(0,1)^*$, $1<p<\infty$, $y>0$ を固定する。任意に固定された $N>0$ に対して $|n|<\Delta 2^{N-2}$ ($\Delta<1$ は絶対定数)のとき

$$|S_n^*(x;\chi_F)| \leqq \text{Const.}\, L y, \quad x\notin E, \quad mE \leqq \text{Const.}\, y^{-p} mF, \quad L \leqq \text{Const}\, p^2(p-1)^{-1}.$$

補題 1. (C. Watari [4]) $f(x)\in L^p(0,1)$ に対して $S(f) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_k(f;t)$ とする。そうすれば級数 $\sum_{k=-1}^{\infty} \eta_k \Delta_k(f;t)$ $(\eta_k = 0, 1)$ はある $g(x)\in L^p(0,1)$ の F.W.S. で

$$\|g(x)\|_p \leqq D_p \|f(x)\|_p, \quad D_p \leqq \text{Const}\, p^2(p-1)^{-1}, \quad 1<p<\infty.$$

補題 2. $f(x)\in L^1(0,1)$ に対して $Tf(x) = \operatorname{Sup}\left|\sum_{j=-1}^{n} \Delta_j(f;x)\right|$ とおくと

$$\|Tf(x)\|_p \leqq E_p \|f(x)\|_p, \quad E_p \leqq \text{Const}\, p(p-1)^{-1}, \quad 1<p<\infty.$$

区間 ω を固定し $\Omega((n[\omega],\omega)) = \{\omega_\ell\}$, $\omega_\ell = \omega_{\nu_\ell}$ を ω の互に素な分割とする。$x\in\omega_\ell = \omega_\ell(x) \subset \omega' \subset \omega$, $|\omega| = 2^{-\nu}$, $|\omega'| = 2^{-\nu'}$ とすると

$$S^*_{n[\omega]}(\omega;x) = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega f(t)\, w_{n[\omega]}(\omega;t)\, \delta_{n[\omega]}(\omega; x-t)\, dt$$
$$= \theta S^*_{n[\omega']}(\omega';x) + H_{n[\omega]}(x) + R_{n[\omega]}(x),$$

但し　$\theta = \pm 1$,

$$H_{n[\omega]}(x)=\frac{1}{|\omega|}\int_\omega [f(t)W_{n[\omega]}(\omega;t)-E_{n[\omega]}]S_{n[\omega]-2^{\nu'-\nu}n[\omega']}(\omega;x-t)\,dt,$$

$$R_{n[\omega]}(x)=\frac{1}{|\omega|}\int_\omega E_{n[\omega]}S_{n[\omega]-2^{\nu'-\nu}n[\omega']}(\omega;x-t)\,dt,$$

$$E_{n[\omega]}(t)=\frac{1}{|\omega_\ell(t)|}\int_{\omega_\ell(t)} f(u)W_{n[\omega]}(\omega;u)\,du.$$

ここで $n[\omega]=\sum_{i=1}^{N_{n[\omega]}}\zeta_i 2^i$ $(\zeta_i=0,1\ ;\ \zeta_{N_{n[\omega]}}=1)$ とすれば $R_{n[\omega]}(x)$ は

$$G(t)=\sum_{k=0}^{N_{n[\omega]}}\zeta_k\Delta_k(\omega;E_{n[\omega]}(t))$$

の点 x における部分和である。したがって補題1,2から

$$\|R_{n[\omega]}(x)\|_p\leqq\|T(G)\|_p\leqq \text{Const}\ p^3(p-1)^{-2}\|E_{n[\omega]}(x)\|_p,\quad 1<p<\infty.$$

故に[5. II. p. 119]により

$$m\{x\in\omega;\ T(G)>y\}\leqq \text{Const.}\exp(-\text{Const.}\,y/\|E_{n[\omega]}(x)\|_\infty)|\omega|,\ y>0.$$

§4. 多項式 $P_k(x;\omega)$

$b_k=2^{-k}(k=0,1,2,\cdots)$ とする。$\omega=\omega_\nu$ を与えるとき $\omega_\nu\subset\omega_{\nu-1}\subset\cdots\subset\omega_0=(0,1)^*$ とする。はじめに ω_0 上の f の F.W.S. $f\sim\sum_n a_n(\omega_0)W_n(x)$ を考える。$|a_n(\omega_0)|\geqq b_k y^{\frac{p}{2}}$ のとき $(n,\omega_0)\in G_k(\omega_0)$ と書き $P_k(x;\omega_0)=\sum_{(n,\omega_0)\in G_k(\omega_0)}a_n(\omega_0)W_n(x)$ と定義する。$\omega_1\subset\omega_0$ に対しては $f(x)-P_k(x;\omega_0)\sim\sum a_n(\omega_1)W_{2n}(x)$. $|a_n(\omega_1)|\geqq b_k y^{\frac{p}{2}}$ のとき $(n,\omega_1)\in G_k(\omega_1)$ と書き $P_k(x;\omega_1)=P_k(x;\omega_0)+\sum_{(n,\omega_1)\in G_k(\omega_1)}a_n(\omega_1)W_n(x)$ と定義する。このようにして得られた $P_k(x;\omega)$ は $G_k=\bigcup_\omega G_k(\omega)$ とおけば $P_k(x;\omega)=\sum_{(n,\omega')\in G_k,\,\omega'\supseteq\omega}a_n(\omega')W_{|\omega'|^{-1}n}(x)$ と書ける。そうすれば

$$\sum_{|\omega|=2^{-\nu}}\int_\omega|f(x)-P_k(x;\omega)|^2dx=\int_0^1|f(x)|^2dx-\sum_{(n,\omega)\in G_k,\ |\omega|\geqq 2^{-\nu}}|a_n(\omega)|^2|\omega|.$$

$$X_K = \{x\in(0,1)^*;\ \textstyle\sum_{(n,\omega)\in G_K,\ x\in\omega} |a_n(\omega)|^2 > b_K^{-1} y^p\}$$

$$X_K^* = \bigcup_\omega \{\omega\subset X_K \text{ を含む4倍に拡げた区間}\}$$

とすると　$mX_K^* \leqq 4mX_K \leqq 4b_K y^{-p} mF$.

$\omega\not\subset X_K$ ならば　$P_K(x;\omega)$ の項数 $\leqq b_K^{-3}$.　ゆえに　$|P_K(x;\omega)|\leqq b_K^{-2}y^{\frac{p}{2}}$.

§5. 対の選択

$\omega\not\subset X_K$ とする。$P_K(x;\omega)$ が $a w_\lambda(x)$ を項にもつとき $\omega'\supset\omega$ に対して $(\lambda[\omega'],\omega')\in G_K$ とできる。各 $(\lambda[\omega'],\omega')$ に対して

$\widetilde{G}_K=\widetilde{G}_a\cup\widetilde{G}_b$ とおく。ここで

$$\widetilde{G}_a = \{(n,\omega);\ \omega\subset\omega',\ |\omega|\geqq b_K^{10}|\omega'|,\ |n-\lambda[\omega]|<b_K^{-10}\}$$

$$\widetilde{G}_b = \{(n,\omega);\ \omega\subset\omega',\ |n-\lambda[\omega]|<b_K^{-10},\ \exists a' w_{\lambda'}(x)\in P_K(x;\omega),\ 4b_K^{10}\leqq|\lambda-\lambda'||\omega|\leqq 4b_K^{-10}\}$$

$(n,\omega_\nu)\in\widetilde{G}_K$　に対して

$$G_K^* = \begin{cases} (4n+m,\ \omega_{\nu-2}) & :\ \nu\geqq 2,\ \omega_{\nu-2}\supset\omega_\nu,\ m=0,1,2,3, \\ (2n+m,\ \omega_{-1}) & :\ \nu=1,\ \omega_{-1}\supset\omega_1,\ m=0,1, \\ (n,\ \omega_{-2}) & :\ \nu=0 \end{cases}$$

とおけば　$\sum_{G_K^*}|\omega|\leqq \text{Const.}\ b_K^{-16}y^{-p}mF$.

$(n,\omega)\notin\widetilde{G}_K$, $\omega\not\subset X_K$ に対して $P_K(x;\omega)$ は次のように書ける。

$$P_K(x;\omega)=\rho_1 w_{\lambda_1}(x)+\rho_2 w_{\lambda_2}(x)+Q_K(x;\omega),$$

但し　$|\rho_2|\leqq|\rho_1|\leqq b_K^{-2}y^{\frac{p}{2}}$, $|\lambda_1[\omega]-n|, |\lambda_2[\omega]-n|<b_K^{-10}$, $|\lambda_1[\omega]-\lambda_2[\omega]|=1$

$Q_K(x;\omega)$ は $|n-\lambda[\omega]|\geqq b_K^{-10}$ なる λ の項のみ含む。

§ 6. 分割 $\Omega((n[\omega],\omega);K)$ と除外集合

$$S = \bigcup_{\omega}\{\omega : \int|f|^p dx > y^p|\omega|\}$$

$$S^* = \bigcup_{\omega}\{\omega\subset S \text{ を含む 4 倍に拡げた区間}\}$$

とすると $mS^* \leqq 4mS \leqq 4y^{-p}mF$.

$\omega \not\subset S$ のとき $|C_\alpha(\omega)| < y$. ゆえに $\omega\not\subset S^*$ のとき $L = L(p) \leqq \mathrm{Const}\, p^2(p-1)^{-1}$ が存在して $b_K y \leqq C_n^*(\omega)$ のとき $y^{\frac{p}{2}} \leqq b_{KL}^{-\frac{1}{4}} y$.

与えられた対 $(n[\omega],\omega)$, $\omega = \omega_{\nu_0}$, $-2\leqq \nu_0 \leqq N-2$ と $K\geqq 1$ に対して

$$\Omega(K):\quad (n[\omega],\omega) = p' \in G_{KL}^*,\quad C_{n[\omega]}^*(\omega) < b_{K-1}y$$

を満すとき ω の分割 $\Omega((n[\omega],\omega);K) = \Omega(p';K)$ を定義し次の条件を満しているとする。

1° $\omega_\nu \in \Omega(p';K) \Rightarrow \nu \geqq \nu_0+2$. $\omega_\nu \subset \omega'$, $4|\omega'|\leqq|\omega| \Rightarrow C_{n[\omega']}(\omega') < b_{K-1}y$.

2° $\omega_\nu \in \Omega(p';K)$, $|\omega|_\nu > 2^{-N} \Rightarrow \exists\, \omega_{\nu+1}\subset\omega_\nu : C_{n[\omega_{\nu+1}]}(\omega_{\nu+1}) \geqq b_{K-1}y$.

3° $\omega_\nu \in \Omega(p';K) \Rightarrow \nu \geqq N$.

$x\in\omega$ のとき $\omega_{j,\nu}\in\Omega(p';K)$ に対して $\omega_{\nu-1} = \omega_{j,\nu}\cup\omega_{j\pm1,\nu}$, $x\in\omega_{\nu-1}$ で $|\omega_{\nu-1}|$ が最大な区間を $\omega(x)$ とする。そうすれば § 3 の $S_{n[\omega]}^*(\omega;x)$ の分解で $\delta_{n[\omega]-2^{\nu'-\nu}n[\omega']}(\omega;x-t)$ は t に関して $\omega_2(t)$ で定数になることから $H_{n[\omega]}(x) = 0$. また上の条件から $|E_n(t)| \leqq \mathrm{Const}.b_{K-1}y$ を得るから §3 の結果より

$$U(p') = \{x\in\omega : TG(x) > \mathrm{Const}.CLKb_{K-1}y\},\ C \text{ は固定した定数}$$

$$U = \bigcup_{K=1}^{\infty}\bigcup_{\Omega(K)} U(p')$$

$$X^* = \bigcup_{K=1}^{\infty} X_{KL}^*$$

とおけば

$$m\,U(p') \leqq \text{Const.}\exp(-CLK)\,|\omega|\ , \quad m\,U \leqq \sum_{K=1}^{\infty} b_{KL}\, y^{-p} m F\ ,$$

$$m\,X^* \leqq \text{Const.}\sum_{K=1}^{\infty} b_{KL}\, y^{-p} m F\ .$$

ゆえに　$E = X^* \cup S^* \cup U$　とおけば　$mE \leqq \text{Const.}\, y^{-p} mF$.

§7. 対の交換

n_0, ω_0, K, x　は　$x \notin E$, $x \in \omega_0$, $|\omega_0| > 2^{-N+2}$, $p_0 = (n_0[\omega_0], \omega_0) \notin G^*_{KL}$

$b_K y \leqq C^*(p_0) = C^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0) < b_{K-1} y$　とする。

補題 3. n_0, ω_0, K, x　は上の条件を満すとする。そうすれば

$\tilde n \geqq 0$, $\tilde\omega_0 \supset \omega_0$ が存在して　$\tilde p = (\tilde n[\tilde\omega], \tilde\omega) \in G^*_{KL}$, $|\tilde n[\omega_0] - n_0[\omega_0]| \leqq A b_K^{-1}$.

さらに　$|\tilde n[\omega_0] - \tilde n'[\omega_0]| \leqq 2A b_K^{-2}$　なる n' に対して

$$\big|\,|S^*_{\tilde n[\omega_0]}(\omega_0;x)| - |S^*_{\tilde n'[\omega_0]}(\omega_0;x)|\,\big| \leqq \text{Const.}\big[C^*(\tilde p_0) + C^*(\tilde p_0') + b_{K-1} y\big]$$

但し　$\tilde p_0 = (\tilde n[\omega_0], \omega_0)$, $\tilde p_0' = (\tilde n'[\omega_0], \omega_0)$.

補題 4. n_0, ω_0, K, x　は上の条件を満すとする。そうすれば

$\bar n \geqq 0$, $\bar\omega \supset \omega_0$ と最小の整数 m が在在して

$$|\bar n[\omega_0] - n_0[\omega_0]| < 2A b_K^{-1}\ , \quad \bar p = (\bar n[\bar\omega], \bar\omega) \in G^*_{mL}\ , \quad 1 \leqq m \leqq K\ .$$

また $\tilde p_0 = (\tilde n[\omega_0], \omega_0)$ ならば　$C^*(\tilde p_0) < b_{m-1} y$.　さらに $C^*(\bar p) < b_{m-1} y$.

ゆえに $\Omega(\bar p; m)$ が定義できて　$\bar\omega(x) < \omega_0$.

§8. 証明

$x \notin E$, $0 < n < \Lambda 2^{N-2}$ $(0<\Lambda<1)$ に対して次の性質をもつ ω_j, K_j, m_j, n_j の有限列を作ることができれば $S_n^*(x) = O(L y)$ である。

$$x \in \omega_j,\ \omega_{j+1} \subset \omega_j,\ K_{j+1} < m_j \leqq K_j,\ n_{j+1} \leqq (1+4b_j)n_j,\ \theta = \pm 1,$$

$$S^*_{n_j[\omega_j]}(\omega_j; x) = \theta S^*_{n_{j+1}[\omega_{j+1}]}(\omega_{j+1}; x) + O(L m_j b_{m_j-1} y).$$

今, K を $b_K y \leqq C_n^*(\omega_{0,-2}) < b_{K-1} y$ で定義すると $(n, \omega_{0,-2}) \in G^*_{KL}$.
ゆえに分割 $\Omega(n[\omega_{0,-2}], \omega_{0,-2}; K)$ が定義され

$$S_n^*(x) = \theta S^*_{n[\omega_{0,-2}(x)]}(\omega_{0,-2}(x); x) + H_n(x) + R_n(x)$$

$$= \theta S^*_{n[\omega_{0,-2}(x)]}(\omega_{0,-2}(x); x) + O(L K b_{K-1} y)$$

$$= \theta S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x) + O(L K_{-1} b_{K_{-1}-1} y) \quad とおく。$$

$n_0[\omega_0] \neq 0$ のとき K_0 を $b_{K_0} y \leqq C^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0) < b_{K_0-1} y$ で定義すれば $K_0 < K_{-1}$.

場合1. $P_0 = (n_0[\omega_0], \omega_0) \in G^*_{K_0 L}$ とすれば $\Omega(P_0; K)$ が定義され

$$S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x) = \theta S^*_{n_0[\omega_0(x)]}(\omega_0(x); x) + O(L K_0 b_{K_0-1} y).$$

場合2. $P_0 \notin G^*_{K_0 L}$, $n_0[\omega_0] > A b_{K_0}^{-2}$ とすれば補題3で $\tilde{n}, \tilde{\omega}$ を補題4で $\bar{n}, \bar{\omega}, m$ を選ぶと $\Omega(\bar{P}; m)$, $\bar{P} = (\bar{n}[\bar{\omega}], \bar{\omega})$ が定義され

$$S^*_{\bar{n}[\bar{\omega}]}(\bar{\omega}; x) = \theta S^*_{\bar{n}[\bar{\omega}(x)]}(\bar{\omega}(x); x) + O(L m b_{m-1} y),$$

$$S^*_{\bar{n}[\bar{\omega}]}(\bar{\omega}; x) = \theta S^*_{\bar{n}[\omega_0]}(\omega_0; x) + O(L m b_{m-1} y),$$

$$\left| |S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x)| - |S^*_{\bar{n}[\omega_0]}(\omega_0; x)| \right|$$

$$\leqq \mathrm{Const.}\left[C^*(P_0) + C^*(\tilde{P}_0) + C^*((\bar{n}[\omega_0], \omega_0)) + b_{K_0-1} y\right] = O(L m b_{m-1} y),$$

ゆえに $S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x) = \theta S^*_{\bar{n}[\bar{\omega}(x)]}(\bar{\omega}(x); x) + O(L m b_{m-1} y)$.

また $n_0[\omega_0] > Ab_{K_0}^{-2}$, $|\tilde{n}[\omega_0] - n_0[\omega_0]| < 4Ab_{K_0}^{-1}$ から $\tilde{n} \leqq (1+4b_{K_0})n_0$.

場合 3. $P_0 \notin G^*_{K_0 L}$, $n_0[\omega_0] \leqq Ab_{K_0}^{-2}$ とすれば補題 3 で $\tilde{n}, \tilde{\omega}$ を補題 4 で m を選ぶと

$$\left| |S^*_{\tilde{n}[\omega_0]}(\omega_0; x)| - |S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x)| \right| \leqq \mathrm{Const.}[C^*(\tilde{P}_0) + C^*(P_0) + b_{K_0-1} y]$$

ゆえに $S^*_{n_0[\omega_0]}(\omega_0; x) = O(L m b_{m-1} y)$.

以上がすべての場合で分割を場合 3 または場合 1, 2 を $n_k[\omega_k] = 0$ になるまで続ければよい。

文献

[1] P. Billard, Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$, Studia Math. 28 (1967).

[2] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116 (1966).

[3] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series.

[4] C. Watari, Mean convergence of Fourier series, Tôhoku Math. J. 16 (1964).

[5] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge. 1959.