数理解析研究所講究録
第55巻 1968年 11-19

三角級数の極限定理

金沢大 理 髙橋 茂

1. 三角級数の中心極限定理

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\{X_n(\omega)\}$ をその上の確率変数列とする。そのとき中心極限定理とは適当な条件のもとで

「$\exists A_N, B_N$; $A_N^{-1}\sum_1^N X_n - B_N$ の分布が Gauss 分布に収束する」

ことを主張する定理である．$\{X_n\}$ が独立のとき，きわめて一般的な条件のもとで中心極限定理の成り立つことが知られている。その一つとして次の Lindeberg の定理がある．

定理 A. $\{X_n\}$ は独立で，$E(X_n)=0$，$E(X_n^2)<+\infty$，

(1.1) $\quad \sigma_N^2 \equiv \sum_1^N E(X_n^2) \to +\infty, \quad E(X_N^2)=o(\sigma_N^2) \quad N\to+\infty,$

とする。そのとき任意の実数 x にたいして

(1.2) $\quad \lim_{N\to\infty} P\left(\sigma_N^{-1}\sum_1^N X_n \le x\right) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$

が成り立つ必要十分条件は

(1.3) $\quad (\varepsilon>0) \quad \lim_{N\to\infty} \sigma_N^{-2}\sum_1^N \int_{|X_n|>\sigma_N\varepsilon} X_n^2\,dP = 0.$

注意. (1.1) のもとで (1.3) は次の (1.4) と同等である．

$$(1.4)\quad \begin{cases} \max\limits_{1\leq n\leq N}|X_n/\sigma_N| \to 0, & \text{in probability}, \\ \sigma_N^{-2}\sum\limits_1^N X_n^2 \to 1, & \text{in } L_1\text{-mean}, \quad N\to+\infty. \end{cases}$$

独立とは限らない$\{X_n\}$について(1.2)の成り立つ十分條件がS. Bernstein, M. Loéve等によって独立の場合と「類似な形」で与えられている[2]，けれども其等は当然のことであるが「條件付き平均値」にかんするものである。

一方三角級数についてR. SalemとA. Zygmundは次のことを示した([10]. p.p. 263 – 269).

定理 B. $L_N(t)=\sum\limits_1^N c_k\cos 2\pi(n_k t+\alpha_k)$, $\|L_N\|=(2^{-1}\sum\limits_1^N c_k^2)^{1/2}$ とおく．そのとき

$$n_{k+1}\geq n_k(1+c)\qquad (c>0)$$

$$\|L_N\|\to+\infty,\qquad c_N=o(\|L_N\|),\qquad N\to+\infty$$

であれば，任意の集合E($|E|>0$)と任意の実数xに対して

$$(1.5)\quad \lim_{N\to\infty}|\{t;\, t\in E,\, L_N(t)\leq\|L_N\|x\}|/|E|=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du.$$

また $n_{k+1}\geq n_k(1+c)$, $(c>0)$, $\|L_N\|\to+\infty$, $N\to+\infty$ のとき $c_N=o(\|L_N\|)$ は(1.5)の必要條件である．

即ちHadamard gapをもった三角級数の部分和については独立変数の和と同じに中心極限定理が成立する(定理A参照)。

こゝではlacunaryとは限らない三角級数

$$\sum a_k\cos 2\pi(kt+\alpha_k),\qquad (\sum a_k^2=+\infty),$$

の中心極限定理をしらべる．三角函数系は確率論の意味で独

立ではないが，先にのべた従属変数の中心極限定理の条件をためすことは至難のことに思われる．そこで三角級数を「独立に近い成分」の和と考え，独立変数の和を扱った方針に従うことにする．「独立に近い成分」としては（幾つかの事実から）$n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ をみたす列 $\{n_k\}$ にたいして

$$\sum_{m=n_k+1}^{n_{k+1}} a_m \cos 2\pi(mt+\alpha_m)$$

をとることが適当であると思われる．

<u>定理 1</u>．$S_N(t) = \sum_1^N a_k \cos 2\pi(kt+\alpha_k)$, $A_N = (2^{-1}\sum_1^N a_k^2)^{1/2}$ とおく．

(1.6) $$n_{k+1}/n_k \geq q > 1$$

をみたす正の整数列 $\{n_k\}$ があって

$$\Delta_1(t) = S_{n_1}(t),\ \Delta_k(t) = S_{n_k}(t) - S_{n_{k-1}}(t),\ (k \geq 1),$$

としたとき，$k \to +\infty$ で

(1.7) $$\begin{cases} \max_t |\Delta_k(t)| = o(A_{n_k}), \\ A_{n_k}^{-2} \sum_{m=1}^{k} \{\Delta_m^2 + 2\Delta_m \Delta_{m+1}\} \to g(t), \text{ in } L_1\text{-mean}, \end{cases}$$

がある $g(t)$ にたいして成立するとする．そのとき $g(t) \geq 0$, $\int_0^1 g(t)\,dt = 1$ となり，また $|E| > 0$ で $x \neq 0$ であるならば

(1.8) $$\lim_{N\to\infty} |\{t;\ t \in E,\ S_N(t) \leq x A_N\}| / |E| = (\sqrt{2\pi}|E|)^{-1} \int_E dt \int_{-\infty}^{x/\sqrt{g(t)}} e^{-u^2/2}\,du,$$

ここに $x/0$ は $x > 0$ $(x<0)$ のとき $+\infty$ $(-\infty)$ であるとする．

さきの定理Bでは $\Delta_{2k}(t) = 0$, $\Delta_{2k+1}(t)$ が唯一項からなる様に(1.6)の $\{n_k\}$ をとれる．このとき $c_N = o(\|L_N\|)$ は (1.7) の

始めの条件である．これは定理Bでは必要であった．

注意 1．$g(t)$ が constant のとき (1.8) の右辺は Gauss の分布である（(1.4) で $g(t)=1$ となるのは Kolmogorov の 0-1 法則）．

2．$g(t)\geq 0$，$\int_0^1 g(t)\,dt=1$ である任意の $g(t)$ にたいして (1.8) が成り立つ様な三角級数がある．

3．$\lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k}^{-2}\sum_1^k \Delta_m\Delta_{m+1}$ が存在して，$\neq 0$ である三角級数がある（$\{\Delta_k(t)\}$ は asymptotically one-dependent である）．

$|E|>0$ であるとき (1.8) の右辺の分布函数の特性函数は

$$|E|^{-1}\int_E \exp(-\lambda^2 g(t)/2)\,dt$$

である．従って定理 1 の証明には，任意の実数 λ にたいして

$$\lim_{N\to\infty}\int_E \exp\{i\lambda S_N(t)/A_N\}\,dt=\int_E \exp(-\lambda^2 g(t)/2)\,dt$$

が成り立つことを示せばよい（[3] を参照）．

2. Lacunary Trigonometric Series の中心極限定理

定理 2．$S_N(t)=\sum_1^N a_k\cos 2\pi(n_k t+\alpha_k)$，$A_N=(2^{-1}\sum_1^N a_k^2)^{1/2}$ とおく．

$$n_{k+1}\geq n_k(1+ck^{-\alpha}),\quad (c>0,\ 0\leq\alpha\leq 1/2),$$

$$A_N\to+\infty,\quad a_N=o(A_N N^{-\alpha}),\qquad N\to+\infty$$

ならば，$|E|>0$ のとき任意の実数 x にたいして

$$\lim_{N\to\infty}|\{t;\ t\in E,\ S_N(t)\leq xA_N\}|/|E|=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du.$$

注意 1．$\alpha=0$ のときが定理Bである．

2．$a_N=o(A_N N^{-\alpha})$ を $a_N=O(A_N N^{-\alpha})$ でおきかえることは出来ない（[7] を参照）．

証明は(1.7)が $g(t)=1$ で成り立つことを示せばよい．そのため $p(k)=\max\{m;\ n_m \leq 2^k\}$ とし，$\Delta_k(t)=S_{p(k+1)}(t)-S_{p(k)}(t)$ とおく(即5 (1.6)の $n_k=2^{k+1}$ とおく)．そのとき

$$\max_t |\Delta_k(t)| = o(A_{p(k)}), \qquad k\to+\infty.$$

$$A_{p(k)}^{-2}\sum_{m=1}^{k}\Delta_m^2 \to 1,\quad A_{p(k)}^{-2}\sum_{m=1}^{k}\Delta_m\Delta_{m+1}\to 0,\ (L_2\text{-mean})$$

を示すことが出来る([4]を参照)．

また定理2と同じ方法で次の定理が示される([5]参照)．

<u>定理2′</u>． $S_N(t)=\sum_1^N a_k\cos 2\pi(n_k t+\alpha_k)$, $A_N=(2^{-1}\sum_1^N a_k^2)^{1/2}$ とおく．

$$n_{k+1}\geq n_k(1+c_k k^{-1/2}) \quad (c_k\to+\infty,\ k\to+\infty)$$

$$A_N\to+\infty,\qquad a_N=O(A_N N^{-1/2}),\qquad N\to+\infty,$$

であるならば，$|E|>0$ とき任意の実数 x にたいして

$$\lim_{N\to\infty}|\{t;\ t\in E,\ S_N(t)\leq x A_N\}|/|E|=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

P. Erdös は上の定理を $a_k=1$, $k\geq1$, $E=[0,1]$ のとき，「Markov の方法」で証明した[1]．

<u>3. Lacunary Fourier Series</u>

定理2を用いて次のことが示される．

<u>定理3</u> $\{n_k\}$ と $\{a_k\}$ は次の條件をみたす；

$$n_{k+1}\geq n_k(1+c\,k^{-\alpha})\qquad (c>0,\ 0\leq\alpha\leq 1/2),$$

$$A_N\equiv(2^{-1}\sum_1^N a_k^2)^{1/2}\to+\infty,\quad a_N=O(A_N N^{-\alpha}),\quad N\to+\infty.$$

そのとき，どんな $\{\alpha_k\}$ にたいしても $\sum a_k\cos 2\pi(n_k t+\alpha_k)$ は a.e. で発散し，かつ Fourier series ではない．

<u>注意</u> $\alpha = 0$ のときがZygmundの定理である([9] p.203).

<u>略証</u> $T_N(t) = \sum_1^N a_k A_k^{-1} \cos 2\pi(n_k t + \alpha_k)$ とおくと

$$T_N(t) = S_N(t) A_N^{-1} + \sum_1^{N-1} S_k(t)(A_k^{-1} - A_{k+1}^{-1}).$$

いまある$\{\alpha_k\}$にたいして$\sum a_k \cos 2\pi(n_k t + \alpha_k)$がある正測度の集合の上で収束すれば, $\sum a_k A_k^{-1} \cos 2\pi(n_k t + \alpha_k)$も又正測度の集合の上で収束する. 先の級数がFourier seriesであれば$S_N(t)$はL_p $(p<1)$収束するから, $T_N(t)$はL_1-収束し, フーリエ級数になる。一方$2^{-1}\sum_1^N a_k^2 A_k^{-2} \sim \log A_N$, $N \to +\infty$, で, 定理2により$T_N(t)/\sqrt{\log A_N}$は任意の正測度の集合の上でasymptotically normalである. 従って$\lim_{K\to\infty} N_K = +\infty$である任意の$\{N_k\}$にたいして$\overline{\lim_{k\to\infty}} |T_{N_k}(t)| = +\infty$, a.e..

上のことから判る様に定理3の条件$a_N = O(A_N N^{-\alpha})$は

$$a_N = O(A_N \sqrt{\log A_N \cdots \log_p A_N} N^{-\alpha}), \quad N \to +\infty,$$

でおきかえられる. こゝに$\log_p A_N$は$\log$をp回とることゝする。

又直接に任意の$\{\alpha_k\}$にたいして, $\overline{\lim_{k\to\infty}} |S_{N_k}(t)| = +\infty$, a.e. を示すことが出来る[6]。たゞし$\{N_k\}$は$\lim_{k\to\infty} N_k = +\infty$。

<u>定理4</u> $1 \leq r < 2$とし, (c, α)は$(c > 0$で$0 \leq \alpha < 1)$か$(c \geq 1$で$\alpha = 1)$とする. $\{n_k\}$と$\{a_k\}$が

$$n_{k+1} \geq n_k(1 + c k^{-\alpha}),$$

$$A_N \equiv \left(2^{-1} \sum_1^N a_k^2\right)^{1/2} \to +\infty, \qquad a_N = O(A_N^{2/(2-r)} N^{-\alpha}), \ N \to +\infty,$$

をみたすとき, どんな$\{\alpha_k\}$に対しても$\sum a_k \cos 2\pi(n_k t + \alpha_k)$

は $L_r(0,1)$ の函数の Fourier series ではない。

注意 1. $1<r<2$, $\alpha<1$ とき $\sum|a_k|^{r/r-1}<+\infty$ で定理の条件をみたす $\{a_k\}$ がある。$1<r<2$, $\alpha=1$ のとき定理の條件をみたさない $\sum|a_k|^{r/r-1}=+\infty$ である $\{a_k\}$ がある（Hausdorff－Young の定理を参照）.

2. $a_k\to 0$ $(k\to+\infty)$ のとき（この場合のみ考えればよいのである）$\alpha=1$, $r=1$ であれば $a_N=O(A_N^2N^{-1})$ は不可能な條件である.

3. $(c>0,\ 0<\alpha\leq 1/2)$, $1\leq r<2$, $\{\varphi(n)\}$, $(\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty)$, を勝手に与へたとき $\{n_k\}$, $\{a_k\}$ があって

$$n_{k+1}\geq n_k(1+ck^{-\alpha}),$$

$$A_N\equiv(2^{-1}\sum_1^N a_k^2)^{1/2}\to+\infty,\quad a_N=O(A_N^{2/(2-r)}\varphi(N)N^{-\alpha}),\ N\to+\infty,$$

で $\sum a_k\cos\overset{(2\pi)}{\ }n_kt$ が $L_r(0,1)$ の函数の Fourier series である様に出来る（[8] 参照）.

略証. ある $\{\alpha_k\}$ にたいして $\sum a_k\cos 2\pi(n_kt+\alpha_k)$ が $f(t)\in L_r(0,1)$ の函数の Fourier series であるとする. $p(k)=\max\{m;\ n_m\leq 2^k\}$ とし, $T_k(t)$ を $f(t)$ の Fourier series の $n_{p(k+1)}$ 次の $(C,1)$ 平均とする。すなわち

$$T_k(t)=\sum_{m=1}^{p(k+1)}\{1-n_m/(n_{p(k+1)}+1)\}\,a_m\cos 2\pi(n_mt+\alpha_m).$$

$B_k=(\int_0^1|T_k(t)|^2dt)^{1/2}$ とすれば

$$B_k\sim A_{p(k+1)},\qquad k\to+\infty$$

が云える．（面倒な計算をして）常数 C があって

$$\int_0^1 \{T_k(t)\}^4 dt \leq C B_k^{(8-2r)/(2-r)}, \quad k \geq 1.$$

任意の $E \subset [0,1]$ にたいして Hölder の不等式から

$$\int_E \{T_k(t)/B_k\}^2 dt \leq B_k^{-2} \left(\int_E |T_k(t)|^r dt\right)^{2/4-r} \left(\int_0^1 |T_k(t)|^4 dt\right)^{\frac{2-r}{4-r}}$$

$$\leq C \left(\int_E |T_k(t)|^r dt\right)^{2/4-r}, \quad k \geq 1.$$

また $\lim_{k\to\infty} T_k(t) = f(t)$ が L_r-norm で云えるから，$\{T_k(t)/B_k\}^2$ は「一様に可積分で」ある．$\lim_{k\to\infty} T_k(t) = f(t)$ a.e. と $\lim_{k\to\infty} B_k = +\infty$ とから $\lim_{k\to\infty} \int_E \{T_k(t)/B_k\}^2 dt = 0$ が云える．これは B_k の定義に反する（[8] 参照）．

4. Lacunary ということ

lacunary series の項の「散らばりの状態」は多様性があって簡単には表わせない．$\{n_k\}$ が Hadamard gap をもつとき級数 $\sum a_k \cos 2\pi(n_k t + \alpha_k)$ は興味ある性質を持っている．これらの性質は「通常の級数」にはどの様に関連しているのであろうか？を問題にする．そのとき「項の散らばり工合」を適当に定義し，Hadamard gap をもつ列と通常の列とが特別な場合として表される様にしなければならない．ここでは (c, α) を用いて

$$n_{k+1} \geq n_k(1 + c k^{-\alpha}), \quad k \geq 1,$$

で項の「散らばり工合」を表わした．$(c > 0, \alpha = 0)$ のときが $\{n_k\}$ が Hadamard gap をもつときを，$n_k = k$ のとき

(c = 1, α = 1) で表される．例えば定理4はHadamard gapをもつ三角級数についてのZygmundの定理が一つの特別な場合として表されることを示している．

文　献

[1] P. Erdös: On trigonometric sums with gaps. Magyar Tud. Akd. Kutatos Int. Közl., 7(1962), 37-42.

[2] M. Loéve: Probability theory, Van Nostrand. N.Y., 1955.

[3] S. Takahashi: A version of the central limit theorem for trigonometric series, Tôhoku Math. Journ. 16(1964), 384-398.

[4] ___________: On lacunary trigonometric series, Proc. Japan Acad., 41(1965), 503-506.

[5] ___________: On trigonometric series with gaps, Tôhoku Math. Journ. 17(1965), 227-234.

[6] ___________: On the lacunary Fourier series, Tôhoku Math. Journ. 19(1967), 79-85.

[7] ___________: On lacunary trigonometric series II, (under the press).

[8] ___________: On trigonometric Fourier coefficient.

[9] A. Zygmund: Trigonometric series, Vol. I. Cambridge University Press, 1959.

[10] Ibid., Vol. II.