数理解析研究所講究録
第55巻 1968年 21-32

ベクトル値函数に対する境界値問題について

龍谷大学 文　薮田公三

§1. 序

次のような問題を考える。

$$(1)\begin{cases} \Delta \vec{u}(x) = 0 & x \in \Omega \\ \vec{u}(x) = \vec{g}(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad \left(\Omega は R^n の中の領域\quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

$\vec{u}(x)$, $\vec{g}(x)$ は Ω からある局所凸ベクトル空間(実数体又は複素数体上の) E への函数とする。

$$(2)\begin{cases} P(x,D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x) & x \in \Omega \\ B_j(x,D)\vec{u}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \quad (j=1,2,\cdots,b=\frac{m}{2}) \end{cases}$$

但し, $P(x,D)$は$2b$次の楕円型微分作用素で, $\{P(x,D), B_j(x,D)\}$ は Schechter 流の条件(後述)を満しているものとする。

上の問題が少し条件をつけると解けるということがわかる。同時にある微分方程式を満すベクトル値函数についていく

つかの性質も分る。(§4)。例えば,調和なベクトル値函数は,実解析的である。

§2. 記号と定義

ここでいくつかの函数空間を導入する。但し殆んどは Schwartz [1], [2] の用語を借用しそれの説明はしない。

Eを位相ベクトル空間とする。

$\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ は m 回連続的微分可能なE-値函数の全体とする。$\mathcal{D}'(\Omega, E)$ は E-値超函数の全体。ここで特にEを局所凸 Hausdorff ベクトル空間とする。$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ は,$\mathcal{D}'(\Omega, E)$ に属し,その m 回までの超函数の意味の導函数が次の意味ですべて $L^2(\Omega)$ に属しているE-値函数の全体。導函数が L^2 に属しているとは,$D^\alpha \vec{f}(x)$ が弱可測でかつ,すべての $D^\alpha f(x)$ Eの連続なセミノルム q に対して $q(D^\alpha \vec{f}) \in L^2(\Omega)$ ということである。この空間のセミノルムとしては,$(q_i)_{i \in I}$ をEの位相を定義するセミノルムの集りとして,$\|\vec{\varphi}\|^2_{m, q_i} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |q(D^\alpha \vec{\varphi}(x))|^2 dx$ がとれる。但しこの空間は仮りにEが完備であっても,完備にならないことがある。しかしEが Fréchet 空間なら $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ も Fréchet 空間になる。

※ $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ は $\Omega \subset\subset R^n$ でEが sequencially complete なら,$\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ も sequencially complete になる。ただし K_j を $K_i \subset K_j\ (i \le j)$ かつ $\bigcup K_i = \Omega$ なる compact な集合の列として,セミノルムは $|\vec{\varphi}|_{m, q, K_j} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in K_j} q(D^\alpha \vec{\varphi}(x))$ で与えられる。

§3. $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$に対するいくつかのLemma.

まず. 位相ベクトル空間Eがquasi-completeであるとは, Eのすべての有界閉集合がcompleteであることをいう。 この空間はsemi-completeである。 compact集合の閉convex-hullはcompactである。以下, Eは局所凸, Hausdorff, quasi-completeとする。

Lemma 3.1. $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$とすると, すべての$g(x) \in L^2(\Omega)$に対して $\int_\Omega \vec{f}(x)\, g(x)\, dx$ は意味がある.$(\in E)$

Lemma 3.2. $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega, E)$, AをE′の同等連続な集合とすると, $p(e') = \int_\Omega |\langle \vec{f}(x), e' \rangle|^2 dx$ は Aの上で, E′の弱位相でinduceされた位相で連続である。

上の2つのLemmaによって次の(後の定理6で使う)LemmaのFourier係数の意味付けと, Diniの定理を使う根拠ができたことになる。

Lemma 3.3. $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,3,\cdots}$を$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$の完全正規直交系とする。$(\vec{f}, \varphi_i)_{m, L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \int D^\alpha \vec{f}(x)\, \overline{D^\alpha \varphi_i(x)}\, dx$とする。この時, E′のすべての同等連続集合Aに対して,
$\sum_{i=1}^{\infty} (\langle \vec{f}, e' \rangle, \varphi_i)_{m, L^2(\Omega)}\, \varphi_i(x)$は $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$の位相で$\langle \vec{f}, e' \rangle$に収束するが, この収束はA上一様である。

次のLemmaはE-値函数の弱微分可能性と強微分可能性の関係を与える。

Lemma 3.4. 開集合Ω(又は$\bar{\Omega}$)で定義されたE-値函数

$\vec{f}(x)$が m回連続的弱微分可能ならば、m−1回連続的強微分可能である。

次のSobolevのLemmaは普通の数値函数の場合と同じ証明法で証明できる。

Lemma 3.5　$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{[\frac{n}{2}]+1+p}_{L^2}(R^n, E) \Longrightarrow \vec{f}(x)$は p回連続的微分可能で、$q$を$E$のsemi-normeとしたとき

$$\sum_{|\alpha| \le p} \sup_{x \in R^n} q(D^\alpha \vec{f}(x)) \le C \Big(\sum_{|\alpha| \le [\frac{n}{2}]+1+p} \| q(D^\alpha \vec{f}(x)) \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

が成りたつ。

Lemma 3.6.　($\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$ に対するSobolevのLemma)

$\Omega\,(\subset R^n)$：開集合 で $\partial\Omega = \bigcup_j S_j$ 但し、S_j は m回連続的微分可能な閉超曲面とする。

$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega, E)$, $m \ge [\frac{n}{2}]+1 \Longrightarrow \vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{m-[\frac{n}{2}]-1}(\Omega, E)$

かつ $\sum_{|\alpha| \le m-[\frac{n}{2}]-1} \sup_{x\in\Omega} |q(D^\alpha \vec{f}(x))| \le C \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \| q(D^\alpha \vec{f}(x)) \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$

となる $C>0$ が存在する。

証明は $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ から $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ への拡張作用素（溝畑：偏 p.171）等を使って、Lemma 3.5を適用すればよい。

§4.　楕円型微分方程式のベクトル値解のregularities.

先のLemma 3.4を用いて、

Lemma 4.1.　$P(x, D)$をhypoelliptic diff. opとすると、次の方程式の解は$\mathcal{E}^\infty(\Omega, E)$に属する。

$P(x, D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$　　但し $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega, E)$.

ここにelliptic diff. opの解のregularitiesについて、Hörmander[1]

のTh. 7.5.1の証明を注意深く見ることによって，

Lemma 4.2. $P(x,D)$を係数がΩで実解析的な elliptic diff. op. とする。かつ，$u(x)$を $P(x,D)u(x)=f(x)$の解とする。但し，$f(x)$はΩで実解析的である。すると，すべてのΩのcompactな集合Kに対して，次の不等式を満す定数M_uとAが存在する。

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)| \leq M_u A^{|\alpha|}(|\alpha|+n)^{|\alpha|+n}$$

但し，M_uはK, $u(x)$, $f(x)$, Ω, $P(x,D)$に関係し，AはK, $f(x)$, Ω, $P(x,D)$だけに関係する。

を得る。このLemmaによって次の命題を得る。

Prop. 4.1. $P(x,D)$はLemma 4.2と同じ条件を満すとする。$\vec{u}(x)\in\mathcal{D}'(\Omega,E)$が $P(x,D)\vec{u}(x)=\vec{f}(x)$の解であるならば，$\vec{u}(x)$も$\Omega$で解析的である。但し，$\vec{f}(x)$は$\Omega$で解析的とする。

§5. Dirichlet 問題。

我々の考える問題は，スカラーの場合，Dirichlet問題が解けるような領域に対してのDirichlet問題である。まず，定義として

定義5.1. ΩをR^nの相対コンパクトな開集合としたとき，$H(\Omega)$をコンパクト一様収束の位相を入れたΩ上の調和函数の全体とし，$H(\bar{\Omega})$を$H(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$とする。

定義5.2. $Ch_H(\Omega)$を$H(\bar{\Omega})$に関するΩのChoquet境界

とする。

定理5.1. $\Omega(\subset\subset R^n)$は開集合でかつ，$Ch_H(\overline{\Omega})=\partial\Omega$とする。このとき，任意の$\partial\Omega$上のE-値連続函数$\vec{g}(x)$に対して，$\overline{\Omega}$で連続な，次の方程式の解が存在する。

$$\begin{cases} \Delta \vec{u}(x) = 0 \\ \vec{u}(x)|_{\partial\Omega} = \vec{g}(x) \end{cases} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

証明に入る前に；$Ch_H(\overline{\Omega})=\partial\Omega$はスカラーの場合，Dirichlet問題が，定理にいう通りに解けることを意味する。したがって，解はweakに存在するわけであるけれども，それがE値函数として真の解になっているかどうか分らない。それだけが証明すべきことである。

Lemma 5.1. ΩをR^nの中で相対コンパクトで，$Ch_H(\overline{\Omega})=\partial\Omega$であるような開集合とする。すると次のような条件を満たす正の$\partial\Omega$上のmeasureのfamily $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$が存在する。

i) $\mu_x(h)=h(x)$ $\quad (h\in H(\overline{\Omega}),\ x\in\Omega)$

ii) $f;\ x\longrightarrow\mu_x(g)$は任意の$\partial\Omega$上の有界可測函数に対して，調和函数を定める。特に$g$が$\partial\Omega$上連続なら$f(x)$は$\overline{\Omega}$で連続である。i.e

$$\lim_{x\to t\in\partial\Omega} f(x)=g(t)。$$

証明は，Hindrichsen (1) p.249の証明を見直せばよい。実際は調和函数の場合は，正のPoisson kernelが存在する

のであるけれども、定理の証明に必要なのは、正の harmonic measure が存在することだけで、Brelot 式の公理的 Dirichlet 問題にも適用できるようにとの心積りのためだけである。

定理の証明. $\vec{u}(x) = \int_{\partial\Omega} \vec{g}(t)\, d\mu_x(t)$ とおく。これが意味を持つ事は、Grothendieck の critère による。明らかに、任意の $e' \in E'$ に対して $\Delta \langle \vec{u}(x), e' \rangle = 0$ である。Prop. 4.1 によって、$\vec{u}(x)$ は Ω で実解析的, 調和であることが分る。したがって残るのは $\lim_{x \to t \in \partial\Omega} \vec{u}(x) = \vec{g}(t)$ を示すことであるから $\vec{u}(x)$ の定義をみれば $\vec{g}(t_0) = 0$ として $\lim_{x \to t_0} \vec{u}(x) = 0$ を示せばよい。

V を circular convex な E の閉近傍とする。V の polar V° は E'_s (弱位相を持った dual) の中で同等連続でコンパクトであり、E'_c (E の circular convex compact sets 上の一様収束位相を持った E の dual) の中でもそうである。

$G = \{\vec{g}(t) \in E \,;\, t \in \partial\Omega\}$ とおく。$\partial\Omega$ がコンパクトで、$\vec{g}$ は連続であるから、G はコンパクトである。すると G° は E'_c の 0 の近傍になる。したがって、$e'_1, e'_2, \cdots, e'_m \in E'_c$ が存在して、$G' = (e'_1 + G^\circ) \cup \cdots \cup (e'_m + G^\circ)$ が V° を含むようにできる。又 $(V^\circ)^\circ = V$ であるから $G'^\circ \subset V$ が成り立つ。ここで、$e' = e'_i + e'_0 \in e'_i + G^\circ$ として、$|\langle \vec{u}(x), e' \rangle|$ を考えよう。

$|<\vec{u}(x), e'>| = |<\int \vec{g}(t)\, d\mu_x(t), e'>| = |\int <\vec{g}(t), e'>\, d\mu_x(t)|$

$= |\int <\vec{g}(t), e_1' + e_0'>\, d\mu_x(t)| \leq |\int <\vec{g}(t), e_1'>\, d\mu_x(t)| +$

$+ |\int <\vec{g}(t), e_0'>\, d\mu_x(t)| = I_1 + I_2$

I_1はLemma 5.1の(ii)の性質によって，xがt_0の十分近くにあれば，1より小にできる。I_2はe_0'がG^0に属することによって，Lemma 5.1の(i)の性質を使えば，やはり，1より小になる。したがって，xがt_0の十分近くにあれば$\vec{u}(x)$は$2G^0$に含まれる。したがって2Vに含まれる。すなわち，$\lim_{x \to t_0} \vec{u}(x) = 0$である。解の一意性は，weaklyに一意的なことから従う。　証明終り。

§6. 一般境界値問題。

序に出て来た次の問題を考える。

$$\begin{cases} A(x, D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x) & (x \in \Omega) \quad (6.1) \\ B_j(x, D)\vec{u}(x) = 0 & (x \in \partial\Omega,\ j = 1, 2, \cdots, b = \frac{m}{2}) \quad (6.2) \end{cases}$$

mは偶数で，$A(x, D)$はm階の楕円型作用素，$B_j(x, D)$はnormal system(1)で$\{A(x, D), B_j(x, D)\ (j = 1, 2, \cdots, b)\}$はcomplementing condition(2)を満たすとする。さらに，スカラーの境界値問題として Green 作用素 $G = A^{-1}$; $\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega) \to \mathcal{D}(A)$ $= \{u(x) \in \mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)\ ;\ B_j(x, D)u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ j = 1, 2, \cdots, b\}$

但し，$s = 0, 1, 2, \cdots, k$ として，kは適当な十分大きな正の整数とする。

定理 6.1.　$k \geq [\frac{n}{2}] + 1$として，上の条件の下に，$s \geq k$で~~ならば~~ $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)$ならば，(6.1) (6.2)の解が存在して，

(1) (2)は溝畑先生の[1]. p.427.

$\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\bar{\Omega}, E)$ に属する。

これを証明するのには、Sobolev の Lemma と Lemma 3.3 と次の Lemma があればよい。

Lemma 6.1. G を $\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$ から $\mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)$ の中への連続線型作用素とする。もし、$s+m \geq [\frac{n}{2}]+1$ ならば、G を $\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega, E)$ から $\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\bar{\Omega}, E)$ の中への線型作用素に拡張できる。

証明。$G: \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega) \to \mathcal{E}^{m+s}_{L^2}(\Omega)$ conti. より $\|Gu\|_{m+s} \leq C\|u\|_s$, $u \in \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$ となる $C>0$ が存在する。但し $\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\leq s}\int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$。さらに $(f(x), g(x))_s = \sum_{|\alpha|\leq s}\int D^\alpha f(x)\, \overline{D^\alpha g(x)}\, dx$, i.e. $\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$ での内積とする。$\mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega)$ は可分 Hilbert 空間であるから、完全正規直交系 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ がとれる。

$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{s}_{L^2}(\Omega, E)$, $\vec{b}_i = (\vec{f}, \varphi_i)_s$ とする。$\{\sum_{i=1}^{k} \vec{b}_i G\varphi_i(x)\}_{k=1,2,\dots}$ は $\mathcal{E}^{p}(\bar{\Omega}, E)$ の Cauchy 列である。($p = s+m-[\frac{n}{2}]-1 \geq 0$)

実際、$\left|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x)\right|_p^{*}$ $\quad (e' \in E')$

$\leq C'\left\|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x)\right\|_{s+m}$ $\quad$ (Sobolev の Lemma)

$\leq CC'\left\|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle \varphi_i(x)\right\|_{s}$.

ここで Lemma 3.3 を使うと、$\|\sum_{i=k}^{l} \langle \vec{b}_i, e'\rangle \varphi_i(x)\|_s$ は E' の同等連続な集合上で一様に 0 に収束する。($k, l \to +\infty$)。E の任意のセミノルム q は、E の円 circular convex 近傍 V で定義され、$q(e) = \sup_{e' \in V^\circ} |\langle e, e'\rangle|$ であることと、V° は同等連続な E' の部分集合で

* $|f(x)|_p = \sum_{|\alpha|\leq p} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|$

あることに注意すれば，$\sum_{i=1}^{n}\vec{b}_i G\varphi_i(x)$ が $\mathcal{E}^p(\overline{\Omega}, E)$ の Cauchy 列であることが分る。$\mathcal{E}^p(\overline{\Omega}, E)$ が quasi-complete であることにより，$\mathcal{E}^s_{L^2}(\Omega, E)$ から $\mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{\Omega}, E)$ の中への連続線型作用素を $G\vec{f} = \sum_{i=1}^{\infty}\vec{b}_i G\varphi_i$ として定義することができる。

連続性は，

$$|\langle G\vec{f}(x_0), e'\rangle|_p = |\sum_{i=1}^{\infty}\langle\vec{b}_i, e'\rangle G\varphi_i(x_0)|_p <$$

$$< CC'\|\sum_{i=1}^{\infty}\langle\vec{b}_i, e'\rangle\varphi_i(x)\|_s = CC'\|\langle\vec{f}(x), e'\rangle\|_s$$

したがって，任意の E のセミノルム q に対して，

$$\sum_{|\alpha|\leq p}\sup_{x\in\overline{\Omega}} q(D^\alpha G\vec{f}(x)) \leq CC'\left(\sum_{|\alpha|\leq s}\int_\Omega |q(D^\alpha\vec{f}(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = CC'\|\vec{f}\|_{s,q}$$

が成り立つことより分る。　　　　証明終り。

☆定理 6.1 の証明は上の Lemma で殆んど終る。実際，e' を E' の任意の元とすると，$\langle G\vec{f}, e'\rangle$ は (6.1), (6.2) を満す。しかも $G\vec{f} \in \mathcal{E}^{s+m-[\frac{n}{2}]-1}$ であるから，ベクトル値函数として (6.1), (6.2) を満している。$\vec{u}(x) = G\vec{f}(x)$ とすればよい。　　　　証明終り。

参考文献

N. Bourbaki [1] : Espaces vectoriels topologiques. Ch. I–IV. Hermann.

[2] : Intégration. Ch. V　　Hermann

J. Dieudonné et L. Schwartz. La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$. Ann. Inst. Fourier 1. (1949). 61–101

A. Grothendieck : Sur certains espaces de fonctions holomorphes. Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 192 (1953)

D. Hindrichsen ; Randintegrale und nukleare Funktionenräume
Ann. Inst. Fourier 17. (1967)

L. Hörmander ; Linear partial differential operators. Springer

S. Mizohata ; 偏微分方程式論 岩波

L. Schwartz (1) Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. Journal d'Analyse Mathématique 4 (1954-55). 88-143.

(2). Théorie des distributions 1 et 2.

(3) Théorie des distributions à valeurs vectorielles. 1. Ann. Inst. Fourier 7. (1957)

(4) Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Séminaire Schwartz 1953-54. Inst. Henri Poincaré.

K. Yabuta ; Problèmes au bord pour les fonctions à valeurs vectorielles. à paraître.

一般境界値問題について、くわしくは

M. Schechter ; General boundary value problems for elliptic differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 12 (1959). 457-486.