数理解析研究所講究録
第 55 巻 1968 年 53-62

Thin set 上の測度について

都大 理学部 佐伯貞浩

G を locally compact abelian group, $\Gamma = \hat{G}$ をその dual とする。G上の任意の測度 μ に対して，$\mu^1 = \mu$, $\mu^{n+1} = \mu^n * \mu$ とおく。まず，こゝでの主要定理を次の形に述べる。

<u>定理1.</u> すべての non-discrete locally compact abelian group は，任意の正整数 k に対して，次の条件を満たす非負値実測度 $\mu \neq 0$ を持つ：

(a) $\mu^1, \cdots, \mu^k$ はすべて Haar 測度に関して特異な測度である。

(b) k だけに関係する正整数 s が存在して，μ^s は Haar 測度に関して絶対連続である。

証明は §6 で与える。この定理の応用を述べるために，G上の measure algebra を M(G) とし，その max. ideal space を Hom(G) とする。又，絶対連続な測度の作る閉 ideal を $M_a(G)$，その Fourier 変換 $\hat{\mu}$ が $\hat{G}$ の外部で0となる様な測度 μ の作る閉 ideal を $M_v(G)$ とする。

系. G が non-discrete ならば，商空間 $M_v(G)/M_a(G)$ は無限次元の Banach 空間である。

証明. 任意の正整数 k に対して，定理の条件 (a)，(b) を満たす測度 $\mu \neq 0$ を取る。もし $h \in Hom(G) \setminus \hat{G}$ とすれば，$\widehat{\mu^s}(h) = (\hat{\mu}(h))^s = 0$。よって $\mu \in M_v(G)$。又，条件 (a)，(b) より，$\mu^1, \cdots, \mu^k$ は mod $M_a(G)$ で1次独立である。(Q. E. D.)

§1. 記号，定義，及び補助定理.

任意の G に対して，h_G はその Haar 測度を表わし，G が compact のときは常に $h_G(G)=1$ とする。G の各元 x に対し $\delta(x)$ を x での点測度，又 $\Delta(x) = \frac{1}{2}\{\delta(x) + \delta(-x)\}$ とする。G の任意の集合 P，及び $k \in Z^+$ に対して，

$$kP = \{\textstyle\sum_1^k x_j : x_j \in P, \ 1 \leq j \leq k\}$$

と定義し，$|P|$ は P の濃度を表わす。さらに，測度 μ の台を $S(\mu)$ で表わすことにする。

さて，compact G で，次のような閉部分群の列 Σ を含むものを考える：$\Sigma = \{G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots\}$，かつ

$\bigcap_1^\infty G_n = \{0\}$。この列$\Sigma$に対して，確率空間$(\Omega, B, h)$を次の様なものとする：$\Omega = \prod_1^\infty G_n$；$B$は$\Omega$の（位相的）Borel field；$h$は直積測度$\bigotimes_1^\infty h_{G_n}$。

<u>定義1</u>. Ωの各元$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$に対して，

$$\mu = \mu_\omega = \circledast_1^\infty \mu_n \in M^+(G)$$

とおく。こゝに$\mu_n = \Delta(\omega_n)$であって，convolutionの収束は，$M(G)$の弱位相で考える。この様な測度μ_ωを$\Omega(\Sigma)$測度という。

<u>補助定理</u>. 正整数kに対して，Σが$\underline{\lim}\, 2^{kn} h_G(G_{n+1}) = 0$を充たせば，すべての$\Omega(\Sigma)$測度は定理1の条件(a)を満足する。

さて$k, m \in Z^+$に対して

$$\sigma(s) = \int_0^1 |\cos 2\pi t|^s \, dt$$

$$\sigma(s:m) = \frac{1}{m} \sum_1^m |\cos \frac{2\pi}{m} j|^s$$

とおく。このとき，$\sigma(s) = A(s)\, s^{-\frac{1}{2}}$とおけば，

$$\lim A(s) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}, \quad A(s) < (2/\pi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(s:m) \leqq A(s)\, s^{-\frac{1}{2}} + 4/m$$

が成立する。

最後に，定理1の条件(a)，(b)を充たす非負値測度μを

(k, s)型の測度と呼ぶことにする：たゞし $\mu \neq 0$。

§ 2. $G = R$ 及び $G = T$ の場合.

定理 2. 各 $k \in Z^+$ に対し，$s\,(\in Z^+) < (2/\pi)\,4^k + 1$ が存在し，G は (k, s) 型の測度を持つ。

証明. 与えられた k に対して，定数 $C_1 > 1$ を

$$\mathrm{Im}\,[\,(2/\pi)\,4^k\,] + 1 > C_1^{\,2}\,(2/\pi)\,4^k$$

となるように定める。こゝに $\mathrm{Im}\,[\alpha]$ は α の整数部分を表わす。そして，2つの数列 $\{a_n\}_1^\infty$ と $\{b_n\}_1^\infty$ を定義する：

$$a_n = (\log 2)^{-1} \log C_1 + n^{-1} (\log 3n)^{-1}$$

$$b_n = 2^{-(k + a_n)}。$$

このとき，$1 < C_2 < C_1$，$b_n' = C_2 b_n < 1/2$ なる定数 C_2 を取る．これらに対して，確率空間 (Ω, B, h) を次の様に構成する：$\Omega = \prod_1^\infty I_n$，$I_n = [\,b_n, b_n'\,]$；$B$ は Ω の Borel field；$h = \otimes_{n=1}^\infty h_n$，$h_n$ は $h_n(I_n) = 1$ なる I_n 上の Lebesgue 測度。そして $\omega = (\omega_n) \in \Omega$ に対して，区間 $[0, 1]$ 上の測度 μ_ω を

$$\hat{\mu}_\omega(\gamma) = e^{i\pi\gamma} \prod_1^\infty \cos[\,\pi \gamma\, \omega_1 \cdots \omega_{n-1} (1 - \omega_n)]$$

によって対応させる。

このとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$S(\mu_\omega^{\,k})$ の測度が 0 であること，及び 任意の $s > C_1^{\,2} \{A(s)\}^2 4^k$ に対

して， $E(\int_{\hat{G}} |\hat{\mu}_\omega(\gamma)|^s d\gamma) < +\infty$ が示される。このことから，測度 μ_ω が a.a. $\omega \in \Omega$ に対して，(k, s) 型の測度であることが結論される。（Q. E. D.）

§3. $G = \Pi_1^\infty Z(p_n)$ の場合（各 p_n は素数，$p_n < p_{n+1}$）.

定理3．この場合も，定理2が成立する。

証明。k を固定して，各 $n \in Z^+$ に対して

$$g_n = \operatorname{Int}[(k \log 2)^{-1}\{\log(p_1 \cdots p_n) - \log\log 3n\}]$$

とおく。定理を示すには，$0 = g_0 < g_n < g_{n+1}$ と仮定してよい。これを仮定した上で，数列 $\{K_j\}_1^\infty$ を

$$K_{g_{n-1}+1} = K_{g_{n-1}+2} = \cdots = K_{g_n} = n$$

で定義し，G の閉部分群の列 $\Sigma = \{G_n\}$ を $G_n = \Pi_{K_n}^\infty Z(p_j)$ で定める。

このとき，各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu = \mu_\omega$ に対して $h_G[S(\mu^s)] = 0$ が示される。更に，任意の $s \geqq (2/\pi)4^k$ に対して

$$E(\sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{\mu}(\gamma)|^s) < +\infty$$

が示され，定理の結論を得る。（Q. E. D.）

§4. $G = U(p)$ の場合（p-adic integer の作る群，p は任意の素数）.

<u>定理4.</u> この場合も，定理2が成立する。

証明. 素数 p と $k \in Z^+$ を固定し，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$K_n = \mathrm{In}\left[(\log p)^{-1}\{(k\log 2)n + \log\log\log e^{e}(n+1)\}\right]$$

とおく。Gの元xは

$$x = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$

——たゞし，各 x_n は $0 \leqq x_n \leqq p-1$ なる整数——という形に一意に書き表わせることに注意して，Gの開部分群の列 $\Sigma = \{G_n\}$ を

$$G_n = \{x \in G : x_j = 0,\ \forall j < K_n\}$$

で定義する。

このとき，各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu = \mu_\omega$ に対して，$h_G[S(\mu^k)] = 0$であること，又，任意の $s \geqq (2/\pi)4^k$ に対して

$$E\left(\sum_\gamma |\hat{\mu}(\gamma)|^s\right) < +\infty$$

が示されるから，定理の結論を得る。(Q. E. D.)

§5. $G = \prod_1^\infty G^{(j)}$ (すべての j に対して，$G^{(j)} = Z(p)$: pは任意の素数).

<u>定理5.</u> 各 $k \in Z^+$に対して，$s = s(k) \in Z^+$が存在しGは (k, s) 型の測度を持つ。

証明. kを固定し, n_0, $s_0 \in Z^+$ を

$$(2/\pi)\, s_0^{-\frac{1}{2}} + 4/n_0 < 2^{-k}$$

を充たす任意のものとする。まず最初に次のことを示す。

(A) すべての素数 $p \geqq n_0$ に対して, $G = G(p)$ は (k, s_0) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 $p \geqq n_0$ を固定して, 数列 $\{K_n\}_0^\infty$ を次式で定義する。

$$K_n = \mathrm{In}\left[(\log p)^{-1}\{(k \log 2)n + \log(n+1)\}\right].$$

これに対して, Gの閉部分群の列Σを

$$\Sigma = \{G_n\}_0^\infty \ ; \quad G_n = \Pi_{j \geqq K_n} G^{(j)}$$

によって対応させる。このとき, $\Omega(\Sigma)$測度 μ_ω が a.a. $\omega \in \Omega$ に対して, (k, s_0) 型の測度であることが示せる。

次に, 次のことを示す。

(B). 各素数 p に対して, ある $s = s(k, p) \in Z^+$が存在して, 群 $G = G(p)$ は (k, s) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 p を任意に固定する。さて, すべての L, $s \in Z^+$ に対して,

$$\sigma_L(s : p) = p^{-L} \sum_{j_1=1}^{p} \cdots \sum_{j_L=1}^{p} \left\{ \frac{1}{L} \left| \sum_{l=1}^{L} \cos \frac{2\pi}{p} j_l \right| \right\}^s$$

とおく。更に, 数列 $\{K'_n\}_0^\infty$ を

$$K'_n = K'_n(L) = \mathrm{In}\left[(\log p)^{-1}\{(k \log 2L)n + \log(n+1)\}\right]$$

で定義し，Gの開部分群の列Σ'を

$$\Sigma' = \{G_m\}_0^\infty \ ; \ G_m = \Pi_{j \geq K'_m} G^{(j)}$$

と定義する。このΣ'に対して，確率空間$(\Omega(L), B, h)$を次の様に構成する：$\Omega(L) = \Pi_1^\infty G_m{}^L$；$B$ は Borel field；$h = \otimes_1^\infty h_m$，こゝに各h_mは$G_m{}^L$の Haar 測度。このとき$\Omega(L)$の元ωは$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_m, \cdots)$ ——たゞし$\omega_m = (\omega_m^1, \cdots, \omega_m^L) \in G_m^L$ ——の形に書ける。そこで，各$\omega \in \Omega(L)$に対して，G上の0でない測度$\mu' = \mu'_\omega \in M^+(G)$を次の様に定義する：

$$\mu'_\omega = \circledast_1^\infty \mu'_m \ ; \ \mu'_m = L^{-1} \Sigma_1^L \Delta(\omega_m^j)\text{。}$$

このとき，すべての測度$\mu' = \mu'_\omega$が定理1の条件(a)を充たすことが示せる。又，$L \in Z^+$を$2/p^L < (2L)^{-k}$となる様に選んでおくと，十分大きな$s \in Z^+$に対して

$$\sigma_L(s : p) < (2L)^{-k}$$

が成立する。これらのことから，命題(B)が得られる。

(A)と(B)から，容易に定理5が得られる。(Q.E.D.)。

§6．定理1の完全な証明.

<u>補助定理 6-1</u>．Kを loc. compact abelian group，K_1をその compact な部分群とする。このとき，もし商群K/K_1がある正整数の組(k, s)に対して(k, s)型の測度を持て

ば，Kも又 (k, s) 型の測度を持つ。

証明．g をKから K/K_1 の上への自然な準同型写像とする。g は $M(K/K_1)$ から $M(K)$ の中への同型写像 g' を生じる。このとき，g' は (k, s) 型であるという測度の性質を保つ。このことから，命題は示される。（Q.E.D.）

<u>補助定理 6-2</u>．Kを無限個の元より成る compact群とする。このとき，Kの閉部分群 K_1 が存在して，商群 K/K_1 は次のいずれかの群と同型である：(i) T，(ii) $\Pi_1^\infty Z(p_j)$，こゝに各 p_j は素数であって $p_j < p_{j+1}$，(iii) $U(p)$，p は素数，(iv) $G(p)$，p は素数。

これは Varopoulos による。

<u>定理1の証明</u>．Gを non-discrete，k を任意に固定した正の整数とする。s として，定理2～5に現われた s の中で，最大のものを取る。最初に，Gが compact な閉部分群Kを含む場合を考える。このとき補助定理 6-1，6-2，及び定理2～5から，Kは (k, s) 型の測度を持つ。KはGの閉部分群であるから，G自身も (k, s) 型の測度を持つ。

次にGが上の様なKを含まない場合を考える。このとき，ある $n \in Z^+$ と compact群Kに対して，Gは $G_1 = R^n \times K$

を閉部分群として含む。 μ をR上の (h, s) 型の測度として，$G_1 = R^n \times K$ 上に直積測度 $\lambda = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n \times h_K$ を定義する，こゝに $\mu_j = \mu_0$ このとき，λ は G_1 上の (h, s) 型の測度である。又，G_1 は G の閉部分群であるから，λ は G 上の (h, s) 型の測度でもある。(Q. E. D.)

文　献

[1] W. Rudin, Measure algebras on abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), pp. 227 - 247.

[2] ———, Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets, ibid, 66 (1960), pp. 199 - 202.

[3] ———, Fourier analysis on groups, Interscience.

[4] R. Salem, On sets of multiplicity for trigonometric series, Amer. Jour. Math., 64 (1942), pp. 531 - 538.

[5] Yu. A. Sreider, The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Translation, 1, 8 (1962), pp. 365 - 391.

[6] N. Th. Varopoulos, Sets of multiplicity in loc. compact abelian groups, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16 (1966), pp. 123 - 158.