数理解析研究所講究録
第55巻 1968年 63-74

Automorphisms の Commuting Properties

城西大 理　青 木 統 夫

§1. 序

spectrally equivalent は必ずしも conjugate ではないことはよく知られている. [1] は automorphisms が conjugate であるとき, その行動を compact connected metric abelian group 上で研究している. 本稿では [1] の結果 (generalized commuting order of a transformation) を有限測度空间で論じ, そして $C_2(T)$ の spectrum を解析することによって, ergodicity そして mixing の様子を分析する.

§2. 準 備

(X, Σ, m) : 有限測度空间.

G : 与えられた (X, Σ, m) に関係して決定された measure algebra 上で定義されるすべての metric automorphism から成る group (measure algebra 上の automorphism を metric automorphism であるという)

$C_0(T) = \{I\}$ （ I は G の identity ）

$C_n(T) = \{S \in G : STS^{-1}T^{-1} \in C_{n-1}(T)\}$, $n = 1, 2, \cdots$

$N(T) = \min\{N : C_N(T) = C_{N+1}(T)\}$, otherwise $N(T) = \infty$

（ $N(T)$ は T の generalized commuting order であるという）

注 1．$C_N(T) = C_{N+1}(T) \Rightarrow C_n(T) = C_{n+1}(T)$ $(n \geqq N)$

〃 2．R, T_1, T_2 $(\in G)$ に対して，$RT_1R^{-1} = T_2$

$\Rightarrow N(T_1) = N(T_2)$）

$\mathbb{D} = \{f \in L^2(X) : V_T f = \alpha f$ a.e., $\|f\|_2 = 1\}$

定義 1．$T(\in G)$ が discrete spectrum をもつ $\Longleftrightarrow$ $L^2(X) = \overline{\mathrm{span}\,\mathbb{D}}$

注 3．$\mathbb{D}$ は cyclic group K を含む．

〃 4．$T(\in G)$ が discrete spectrum をもち，そして ergodic

$\Rightarrow$ $|f| = 1$ a.e. $(f \in \mathbb{D})$，factor group $\mathbb{D}/K$ と isomorphic である subgroup $\mathbb{D}(T)$（orthonormal base）が存在して，$\mathbb{D} = K \times \mathbb{D}(T)$.

定義 2．$T(\in G)$ が continuous spectrum をもつ $\Longleftrightarrow$ constant 以外に proper function をもたない．

注 5．$T(\in G)$ が weakly mixing である必要十分条件は T が continuous spectrum をもつことである．

定義 3．$T(\in G)$ が infinite Lebesgue spectrum をもつ $\Longleftrightarrow$ $\{f_i^n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, i runs infinite index set$\}$ が $L^2(X)$ の orthonormal base である．但し，$V_T f_i^n = f_i^{n+1}$.

以後，$f(\in L^2(X))$ が $T(\in G)$ の proper function であって，その

proper value がαであるとき，$\alpha_T(f)=\alpha$ と表わすことにする．

§ 3. Automorphism の commuting order

定理 1. $T(\in G)$ が totally ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．このとき $C_2(T)=C_3(T)\ (\neq C_1(T))$，更に $C_0(T)$，$C_1(T)$ そして $C_2(T)$ は G の subgroup である．

この定理の証明において必要とされる次の補題を示す．

補題 1. $T(\in G)$ が ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．このとき $S\in C_1(T)$ である必要十分条件は $\mathbb{D}(T)$ のすべての element が S の proper function であることである．

補題 2. もしも $\mathbb{A}$ が complex conjugation のもとで閉じている $L^\infty(X)$ の subalgebra，$L^2(X)=\overline{\mathrm{span}\,\mathbb{A}}$ そして V は $L^2(X)$ から $L^2(X)$ の上への linear isometry であって，$\|Vp\|_\infty=\|p\|_\infty\ (p\in\mathbb{A})$ をみたすならば，$VL^\infty(X)=L^\infty(X)$ である．

補題 3. $T(\in G)$ は ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．もしも $S_2\in C_2(T)$ であれば，$\mathbb{D}(T)$ の element を proper function にもつ $W(\in G)$，そして $V_S\mathbb{D}(T)=\mathbb{D}(T)$ なる $S(\in G)$ が存在して，$S_2=SW$ である．

証明． $S_2TS_2^{-1}T^{-1}=S_1$ なる $S_1(\in C_1(T))$ が存在するから，$S=S_1T$ とおくと，$V_{S_2}V_T=V_SV_{S_2}$．$\mathbb{D}(T)$ は $L^2(X)$ の orthonormal base であるから，すべての $f(\in\mathbb{D}(T))$ に対して一意的に $g(\in\mathbb{D}(T))$ が存在して，$\alpha_T(g)=\alpha_S(f)$ とできる．今，$Uf=g$ とおくと，U は

$\mathfrak{D}(T)$ から $\mathfrak{D}(T)$ 上への 1-1 map である．"上へ" の map であることを示す．$\nabla_{S_2}\nabla_T = \nabla_S\nabla_{S_2}$ によって，$\nabla_T(\nabla_{S_2}^{-1}f) = \alpha_S(f)(\nabla_{S_2}^{-1}f)$ a.e.，$\nabla_T(\nabla f) = \alpha_T(\nabla f)(\nabla f)$ a.e. $(f \in \mathfrak{D}(T))$ であるから，$|\beta(f)| = 1$ なる f に依存した number $\beta(f)$ が存在して，$\nabla_{S_2}^{-1}f = \beta(f)\nabla f$ a.e. $\nabla_{S_2}^{-1}\mathfrak{D}(T)$ は orthonormal base であるから，$\{\nabla f : f \in \mathfrak{D}(T)\}$ も orthonormal base．これ故に，∇ は "上へ" の map である．次に，∇ は "1-1" map であることは明らか．

$\nabla(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \nabla f_i$ $(f_i \in \mathfrak{D}(T))$ とおくと，$\|\nabla(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i)\|_2 = \|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i\|_2$．これ故に，$\nabla$ は $L^2(X)$ から $L^2(X)$ 上への一意的に拡張される isometry である．次に，$Rf = \beta(\nabla^{-1}f)f$ $(f \in \mathfrak{D}(T))$ とおく．このとき R は $\mathfrak{D}(T)$ から $\{\beta(\nabla^{-1}f)f : f \in \mathfrak{D}(T)\}$ 上への 1-1 map であって，$\nabla' f = Rf$ a.e. $(f \in \mathfrak{D}(T))$ なる一意的に拡張された linear isometry ∇' をもつ．$\mathcal{A}(T)$ は polinomial $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i$ $(f_i \in \mathfrak{D}(T))$ から成る space とする．このとき $\mathcal{A}(T)$ は各々の element に対して，それぞれの複素共役な element を含む algebra．∇, ∇' は $\mathcal{A}(T)$ 上で multiplicative．従って $\|(\nabla p)^n\|_2 \leq m(X)^{1/2}\|p\|_2^n$ $(p \in \mathcal{A}(T))$ であるから，$\|\nabla p\|_\infty \leq \|p\|_\infty$．同様にして $\|\nabla^{-1}p\|_\infty \leq \|p\|_\infty$ $(p \in \mathcal{A}(T))$ であるから，$\|\nabla p\|_\infty = \|p\|_\infty$．補題 2 によって $\nabla L^\infty(X) = L^\infty(X)$．次に f, g $(\in L^\infty(X))$ に対して，$\{p_n\}$, $\{g_n\}$ $(\subset \mathcal{A}(T))$ をえらんで $p_n \longrightarrow f$ in $L^2(X)$ $(n \to \infty)$，$g_n \longrightarrow g$ in $L^2(X)$ $(n \to \infty)$ とできるから，$\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$ a.e. これ故に，∇^{-1} を生成する $S(\in G)$

が存在する．同様な方法によって，$\mathbb{V}^{\prime -1}$ を生成する $\mathbb{W}\,(\in G)$ が存在する．そして $\mathbb{V}_{S_2} = \mathbb{V}_S \mathbb{V}_{\mathbb{W}}$，故に $S_2 = S\mathbb{W}$．

<u>補題 4</u>．$T\,(\in G)$ は totally ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．$S\,(\in G)$ は $\mathbb{V}_S \mathbb{D}(T) = \mathbb{D}(T)$，$\mathbb{W}\,(\in G)$ は $\mathbb{D}(T)$ の element を proper function にもつとする．もしも $S'\,(\in G)$ が存在して，$S'TS'^{-1}T^{-1} = S\mathbb{W}$ ならば，S は identity である．

証明．$f \in \mathbb{D}(T)$，そして $Q = S\mathbb{W}$ とする．$\mathbb{V}_{S'}f$ の Fourier 展開を $\mathbb{V}_{S'}f = \sum_i \langle \mathbb{V}_{S'}f, f_i \rangle f_i$ a.e. $(f_i \in \mathbb{D}(T))$ とする．このとき，$\mathbb{V}_{S'}\mathbb{V}_T = (\mathbb{V}_Q \mathbb{V}_T)\mathbb{V}_{S'}$ によって，$\sum_i \alpha_T(f) \langle \mathbb{V}_{S'}f, f_i \rangle = \sum_i \alpha_T(f_i)\alpha_{\mathbb{W}}(f_i) \langle \mathbb{V}_{S'}f, f_i \rangle \mathbb{V}_S f_i$ a.e. であるから，$\alpha_T(f) \langle \mathbb{V}_{S'}f, \mathbb{V}_S f_i \rangle = \alpha_T(f_i)\alpha_{\mathbb{W}}(f_i) \langle \mathbb{V}_{S'}f, f_i \rangle$．もしも f_i が $\mathbb{V}_S$ のもとで infinit orbit をもつとすれば，$\sum |\langle \mathbb{V}_S f, f_i \rangle|^2 < \infty$ より，$\langle \mathbb{V}_{S'}f, f_i \rangle = 0$．従って各々の f_i は $\mathbb{V}_S$ のもとで periodic である．$\mathbb{V}_{S'}\mathbb{D}(T)$ は $L^2(X)$ の orthonormal base であって，$\mathbb{V}_{S'}f$ は $\mathbb{D}(T)$ の periodic element によって展開されるから，$\mathbb{D}(T)$ の element は $\mathbb{V}_S$ のもとで periodic である．今，或る $f\,(\in \mathbb{D}(T))$ に対して，$\mathbb{V}_S^n f = f$ a.e. と仮定する．このとき，

$$(\mathbb{V}_Q \mathbb{V}_T)^n f = \alpha_T(f)\alpha_{\mathbb{W}}(f)\alpha_T(\mathbb{V}_S f)\alpha_{\mathbb{W}}(\mathbb{V}_S f) \cdots \alpha_T(\mathbb{V}_S^{n-1} f)\alpha_{\mathbb{W}}(\mathbb{V}_S^{n-1} f)\, \mathbb{V}_S^n f \text{ a.e.}$$

であるから，$\varphi = f^{-1}\mathbb{V}_S f$ とおくとき，$(\mathbb{V}_Q \mathbb{V}_T)^n \varphi = \varphi$ a.e. QT は T と conjugate であって，T は totally ergodic であるから，QT は totally ergodic．従って $\varphi = 1$ a.e. 故に，S は identity である．

定理 1 の証明.　$S_3\ (\in C_3(T))$ に対して，$S_2\ (\in C_2(T))$ が存在して，$\nabla_{S_3}\nabla_T\nabla_{S_3}^{-1}=\nabla_{S_2}\nabla_T$．補題 3 によって，$S_2=S\overline{W}$ なる S，$\overline{W}(\in\mathfrak{G})$ が存在する．更に補題 4 によって，S は identity，$f\ (\in\mathfrak{D}(T))$ に対して，$\nabla_{S_3}\nabla_T\nabla_{S_3}^{-1}f=\nabla_{S_2}\nabla_T f=\alpha_T(f)\alpha_{\overline{W}}(f)f$ a.e.，$\nabla_T f=\alpha_T(f)f$ a.e. であるから，$\mathfrak{D}(T)$ の element は $S_3TS_3^{-1}T^{-1}$ の proper function．補題 1 によって，$S_3TS_3^{-1}T^{-1}\in C_1(T)$，即ち $S_3\in C_2(T)$．

次に，$C_0(T)$，$C_1(T)$ は $\mathfrak{G}$ の subgroup であることは明らかであるから，$C_2(T)$ が $\mathfrak{G}$ の subgroup であることを示す．$S_2, S_2'\ (\in C_2(T))$ に対して，補題 2 によって，$S\,[S']$，$\overline{W}\,[\overline{W}']\ (\in\mathfrak{G})$ が存在する，そして $S_2=S\overline{W}\ [S_2'=S'\overline{W}']$．ここで，$\nabla_{(S_2'S_2^{-1})T(S_2'S_2^{-1})^{-1}T^{-1}}(\nabla_{S'}f)=\alpha_T(\nabla_{S'}f)^{-1}\alpha_T(\nabla_S f)\nabla_{S'}f$ a.e. であるから，$\mathfrak{D}(T)$ の element は $(S_2'S_2^{-1})T(S_2'S_2^{-1})^{-1}T^{-1}$ の proper function．故に，$S_2'S_2^{-1}\in C_2(T)$．これで定理 1 は示された．

定理 1 より次の系をうる．

系 1．有限測度空間 (X,Σ,m) に，$x,y\ (\in X)\ (x\neq y)$ ならば $x\in E_n$，$y\in E_n^c$ なる可算個の可測集合列 $\{E_n\}$ が存在するという条件を与える．そして $T\ (\in\mathfrak{G}')$ が totally ergodic，discrete spectrum をもつとする．このとき，$C_2'(T)=C_3'(T)\ (\neq C_1'(T))$，更に $C_0'(T)$，$C_1'(T)$ そして $C_2'(T)$ は $\mathfrak{G}'$ の subgroup である．

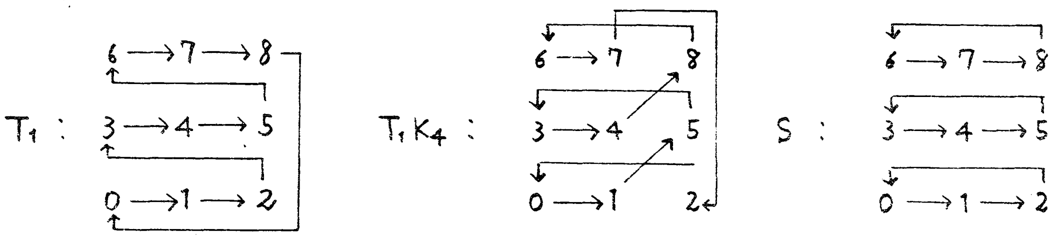
ここで $\mathfrak{G}'$，$C_n'(T)$ は次のように約束する：

$\mathfrak{G}'$ は (X,Σ,m) 上で定義されるすべての automorphism から成

る group . $C'_0(T)=\{S\in G' : S=I \text{ a.e.}\}$ (I は G' の identity),
$C'_n(T)=\{S\in G' : S^{-1}T^{-1}ST\in C'_{n-1}(T)\}$, $n=1,2,\cdots$.

例. discrete spectrum をもつ $T(\in G)$ が ergodic であって totally ergodic でないとき, $C_2(T)\neq C_3(T)$ である例が知られている.

$G(9)=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ は additive group (mod 9) そして $T_k: x\longrightarrow x+k$ (mod 9), そして I は identity とする. T_a が ergodic である必要十分条件は a が $G(9)$ の生成元であることである. $G(9)$ 上の automorphism K_k のすべてを求めると, $K_1(1)=1$, $K_2(1)=2$, $K_4(1)=4$, $K_5(1)=5$, $K_7(1)=7$ そして $K_8(1)=8$. $K_1=(K_2)^3=(K_5)^6=(K_7)^3=(K_8)^2=I$. このとき T_1, T_1K_4 の行動は下図のようになる.



S は上のような permutation とする. このとき, $S^{-1}T_1S=T_1K_4$, $S^3=I$. S は T_aK_k の form ではないことが分かるから, $S\notin C_2(T_1^{-1})$. $T_3T_1(T_6K_4)=(T_6K_4)T_1$ であるから, $S\in C_3(T_1^{-1})$.

§4. $C_2(T)$ の spectral analysis

補題 5. $T(\in G)$ は totally ergodic, そして discrete spectrum をもつとする. ∇_S は $\nabla_S\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T)$ をみたすとする. もしも

$\mathfrak{D}(T)$ の中に V_S のもとで infinite orbit が存在するならば，$\mathfrak{D}(T)$ には無限に多くの infinite orbit (V_S のもとで) が存在する．

補題5を用いて，次の定理が示される．

定理2．　$T(\in G)$ は ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．このとき，$L^2(X)$ の subspace H が存在して，$S_2(\in C_2(T))$ は H で discrete spectrum をもち，$H^\perp$ で continuous spectrum をもつ．もしも S_2 が totally ergodic であれば，S_2 は $H^\perp$ で infinite Lebesgue spectrum をもつ．

証明．　もしも $S_2 \in C_1(T)$ であれば，S_2 は discrete spectrum をもつことは明らか．従って $S_2 \notin C_1(T)$ そして $S_2 \in C_2(T)$ であるときを示せばよい．補題3によって $S_2 = SW$ なる S，$W(\in G)$，$S \neq I$ が存在する．H は V_S のもとで periodic function $f(\in \mathfrak{D}(T))$ の全体によって span された subspace とする．$H(f)$ は finite orbit $f, \cdots, V_S^{n+1}f$ によって span された subspace とする．H は $H(f)$ の direct sum である．今，$f(\in \mathfrak{D}(T))$ が period n をもてば，$V_{S_2}(V_S^i f) = \alpha_W(V_S^i f) V_S^{i+1} f$ a.e. $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$．(V_{S_2}) は $V_{S_2}|H(f)$ によって決定される matrix とする．このとき，$\det(V_{S_2}) = (-1)^{n-1}\alpha_W(f)\alpha_W(V_S f)\cdots\alpha_W(V_S^{n-1}f)$．$(V_{S_2})$ の character equation は $(-1)^n\lambda^n + \det(V_{S_2})$ で与えられる．Proper value を $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ とすれば，λ_j に対応する proper function g_j が存在して，$H(f)$ は $\{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\}$ によって

spanされる．故に S_2 は H で discrete spectrum をもつ．$O(f_\alpha)$ は V_{S_2} のもとでの $f_\alpha(\in \mathfrak{D}(T))$ の infinite orbit とすれば，$H^\perp = \overline{\mathrm{span} \bigcup_\alpha O(f_\alpha)}$．故に，$S_2$ は $H^\perp$ で continuous spectrum をもつ．もしも S_2 が totally ergodic であれば，S は補題５の条件をみたすから，S_2 は $H^\perp$ で infinite Lebesgue spectrum をもつ．

<u>定理３．</u> $T(\in G)$ は ergodic，そして discrete spectrum をもつとする．もしも $S_2(\in C_2(T))$ が totally ergodic，$S_2TS_2^{-1}T^{-1}$ が ergodic であれば，S_2 は infinite Lebesgue spectrum をもつ．

証明．補題３によって，$S_2=SW$ なる S，$W(\in G)$ が存在する．$f\in\mathfrak{D}(T)$ そして $V_Sf=f$ a.e. と仮定するとき，$V_{S_2}f=V_SV_Wf=\alpha_W(f)V_Sf$，$V_{S_2TS_2^{-1}T^{-1}}f=f$ a.e. 故に $S_2TS_2^{-1}T^{-1}$ が ergodic であるから，$f=$ constant a.e. S_2 の totally ergodicity の条件を使って，S は ergodic であることが分かる．補題５によって，$\mathfrak{D}(T)$ には無限に多くの infinite orbit だけが存在する．これ故に，S_2 は infinite Lebesgue spectrum をもつ．

定理３から次の系をうる．

<u>系２．</u> $T(\in G)$ は ergodic，そして discrete spectrum をもつとして，$S(\in G)$ は $V_S\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(T)$ をみたし，$W(\in G)$ は $\mathfrak{D}(T)$ の element を proper function にもつとする．このとき，SW が infinite Lebesgue spectrum をもつ必要十分条件は S が infinite Lebesgue spectrum をもつことである．

T は ergodic, discrete spectrum をもつとする。このとき，補題3によって，$S_2(\in C_2(T))$ に対して，$V_S\mathbb{D}(T)=\mathbb{D}(T)$，$V_W f=\alpha_W(f)f$ a.e. $(f\in\mathbb{D}(T))$ なる $S, W(\in G)$ が存在して $S_2=SW$ とできる(*)。

$\mathbb{F}(S)=\{f\in\mathbb{D}(T): f$ is periodic under $V_S\}$，$\Lambda(W)=\{\alpha_W(f): f\in\mathbb{D}(T)\}$

このとき，S が ergodic でない必要十分条件は $\mathbb{F}(S)\neq\{1\}$ であることである。$\Lambda(W)$ は K の subgroup である。

定理4. $T(\in G)$ は ergodic，そして discrete spectrum をもつとする。

(1) $C_2(T)$ に属する $S_2=SW$ (S, W は(*)の条件をみたすとする) は continuous spectrum をもたないとする。このとき，S_2 が ergodic である必要十分条件は period n をもつ $f\neq 1\ (\in\mathbb{F}(S))$ に対して，f の S_2^n に関する spectrum $\alpha_{S_2^n}(f)$ が $\alpha_{S_2^n}(f)\neq 1$ であることである。

(2) $S_2\ (\in C_2(T))$ が ergodic，そして $\Lambda(W)$ は1を除いて finite order を含まないとする。このとき，S_2 が totally ergodic である必要十分条件は，$f(\in\mathbb{D}(T))$ に対して $V_{S_2}^n f=\alpha_{S_2^n}(f)f$ a.e. であれば，$V_{S_2}f=\alpha_{S_2}(f)f$ a.e. なることである。

証明．(1)：$f\neq 1\in\mathbb{F}(S)$ は period n として，$V_{S_2}^n f=\alpha_{S_2^n}(f)f$ a.e. に対して $\alpha_{S_2^n}(f)=1$ と仮定する。このとき，$h=\sum_{k=0}^{n-1}V_{S_2}^k f\neq$ constant a.e. そして $V_{S_2}h=h$ a.e. であるから，S_2 は ergodic ではない。逆に，period n をもつ $f(\in\mathbb{F}(S))$ に対して，f の S_2^n に関する

spectrum を $\alpha_{S_2^n}(f)$ として，$\alpha_{S_2^n}(f)\neq 1$ と仮定する．$V_{S_2}h = h$ a.e. ($h\in L^2(X)$) に対して，h の Fourier 展開を $h=\sum_i \langle h, f_i\rangle f_i$ ($f_i\in \mathbb{D}(T)$) とする．もしも $f_i\neq 1\notin \mathbb{F}(S)$ であるとき，h と $V_{S_2}h$ の Fourier 係数を比較すると，$\langle h, f_i\rangle = 0$．もしも $f_k\neq 1\in\mathbb{F}(S)$ その period が n であれば，$\langle h, f_k\rangle = \alpha_{S_2^n}(f_k)\langle h, f_k\rangle$．仮定によって $\alpha_{S_2^n}(f_k)\neq 1$ であるから，$\langle h, f_k\rangle = 0$．故に，$S_2$ は ergodic．(1)は示された．

(2)：S_2 が totally ergodic であるとする．このとき，補題4の証明から，$f(\in \mathbb{D}(T))$ に対して $V_S^n f = f$ a.e. であれば，$V_S f = f$ a.e. 逆に，$V_{S_2}^n f = f$ a.e. ($f\in L^2(X)$) と仮定する．このとき，S_2 の ergodicity から，$f =$ constant a.e.，故に S_2 は totally ergodic．(2)は示された．

文　献

[1] L.M. Abramov : Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum, Amer. Math. Soc. Transl. 39, (2) 37-56 (1967).

[2] R.L. Adler : Generalized commuting properties of measure preserving transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 115, 1-13 (1965).

[3] N. Aoki : On generalized commuting properties of metric automorphisms, Proc. Jap. Acad. 44, 467-471

(1968).

[4] N. Dinculeanu and C. Foias : A universal model for ergodic transformations on separable measure space , Michigan Math. Jour. 13 , 109-117 (1966).

[5] F. J. Hahn : On affine transformations of compact abelian groups, Amer. Jour. of Math. 85, 428-446 (1963).

[6] F. J. Hahn and W. Parry : Minimal dynamical systems with quasi-discrete spectrum , Jour. London Math. Soc. 309-323 (1965).

[7] P. R. Halmos : Lectures on ergodic theory , Math. Soc. of Japan , Tokyo (1956).

[8] P. R. Halmos and J. von Neumann : Operator methods in classical mechanics II , Ann. of Math. 43, 332-350 (1942).

[9] A.H.M. Hoare and W. Parry : Semi-groups of affine transformations , Oxford Quart. Jour. Math. 17, 106-111 (1966).

[10] A. G. Kurosh : The theory of groups I, Chelsea, New York (1955).