数理解析研究所講究録
第 56 巻 1968 年 30-34

A.N.Kolmogorov — V. I. Arnold の定理について

京大 理　丹羽敏雄

非線型の相互作用をもつ力学系はエルゴード的であるとはよく言われることであるが，相互作用が非常に弱い時には一般にはそうでないことが次の Kolmogorov — Arnold の結果から示される。我々はこのノートでその厳密な結果を紹介する。

n 個の自由度をもつ力学系を考え，その相空間は

$$\Omega = \mathbb{R}^n \times T^n = \{(p, q) \mid \begin{array}{l} p = (p_1, \cdots, p_n) \\ q = (q_1, \cdots, q_n) \mod 2\pi \end{array}\}$$

とする.

今そのハミルトニアン，$H = H(p, q)$ が運動量，p だけの関数であるとする：

$$H = H_0(p).$$

このとき、この系の運動方程式：

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H_0}{\partial p} = \omega(p) \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

は直に積分可能であり， $p = \text{const.}$ は不変なトーラスを表わし、その上には概周期運動がのっている。

さて上の系の摂動系（perturbed system）：

$$(*) \qquad H = H_0(p) + H_1(p, q)$$

を考えよう。この時、次の結果が知られている。

<u>定理</u>（Kolmogorov－Arnold）

ハミルトニアン(*)は、領域 D： $p \in B$，$|\mathrm{Im}\, q| \leq \rho$（$B$は複素領域）で解析的であり、成分 $q = (q_1, \cdots, q_n)$について周期 2π をもつとする。

もし領域 D において

$$(**) \qquad \det\left|\frac{\partial \omega}{\partial p}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j}\right| \neq 0$$

ならば、任意の $K > 0$ に対して、ある $M = M(K, D, H_0) > 0$ が存在して、もし領域 D において

$$|H_1(p, q)| \leq M$$

ならば、正準方程式

$$(***) \qquad \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

で定義される運動は次の性質をもつ。

1°) 領域 Re D (i.e. D において虚数部分が0の所) は次のように分解される：

$$\mathrm{Re}\, D = D_1 + D_2$$

ここで、D_1は不変 (i.e. D_1の点を通る運動の(相空間における)軌道は永久にD_1にとどまる。)、D_2は小さい、i.e.

$$\text{measure of } D_2 < K \times (\text{measure of } \mathrm{Re}\, D)$$

2°) D_1は次の方程式によって定義される不変なn次元トーラスよりなる：

$$p = p_\omega + f_\omega(Q) \quad , \quad q = Q + g_\omega(Q) .$$

ここで、f_ω, g_ω は $Q = (Q_1, \cdots, Q_n)$ の周期2πの解析関数であり、ωはトーラス T_ω を定めるパラメーターである。

3°) 上の不変トーラス I_ω はトーラス $p=p_\omega$ に近い：

$$|f_\omega(Q)| < \kappa, \quad |g_\omega(Q)| < \kappa .$$

4°) トーラス I_ω 上の運動 (***) は周期 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ をもつ概周期運動である：

$$\dot{Q} = \omega, \quad ここで \quad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial p}\Big|_{p=p_\omega} .$$

上の結果を大ざっぱに言えば次のように言える。即ち、摂動項が非常に小さければ相空間の大部分は不変トーラス族に分れる。従って、大部分の初期値に対して、系はエルゴード的でない。残りのトーラスに分れない部分については、ほとんど何もわかっていない。その部分ではエルゴード的であろうとの予想もある。

上の結果は解析性を除くとかあるいは条件 (**) を取りはずすとかのいくつかの一般化がなされている。(特に後の方の一般化は天体力学において重要である。) それらについて、及び上の結果の証明に関しては下にあげた文献を参照されたい。

— 文献 —

1. A. N. Kolmogorov : On the conservation of quasi-periodic motions for a small change in the hamiltonian function, Dokl. Akad. Nauk. 98 N4 (1954) p.527 - 530

2. ―――――― : The general theory of dynamical systems and classical mechanics, Int. Math. Congress, Amsterdam, 1954

3. V. I. Arnold : Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Uspehi Math. Nauk. V18 N5 (1963) p.13 - 40. ≊ Russian Math. Surveys V18 N5 (1963) p.9 - 36.

4. ―――――― : Small denominators and problems of motion in classical and celestial mechanics, Uspehi Math. Nauk. V18 N6 (1963) p.91 - 196. ≊ Russian Math. Surveys V18 N6 (1963) p.85 - 193.

5. ――― & A. Avez : Problèmes Ergodiques de la Mecanique Classique, Gauthier-Villars, Paris (1966).