数理解析研究所講究録
第 56 巻 1968 年 36-49

ボルツマン方程式に関する Kac–McKean の研究について

東大 理　田中 洋

統計力学の研究の1つとして，最近 McKean は Kac の考えに基づいてボルツマン方程式およびその類似物に関する研究を行った（[3] — [6]）．この報告では，Kac–McKean の研究の概略を紹介する．詳しくは文献参照．その中心的部分は "propagation of chaos" である．先づ hard sphere に対する Boltzmann's equation の場合について簡単にふれ，次に Maxwellian gas に対する Kac の1次元モデルの場合の取扱いの概略をのべる．この場合は主として [1][2][3] で取扱われているが，ここでのべる方法は [3][5][7][8] の方法を整理したもので，propagation of chaos を適当な Banach 空間の上の semigroups の列の収束の問題として取扱う．最後に [3][6][7][8] に関連して，いくつかの注意を与える．

§1. Hard sphere のボルツマン方程式に対する Kac のマスター方程式．

体積Vの容器にN個の分子(hard sphere)があり，δを分子の直径とする．外力がないとして，時刻$t(\geq 0)$において位置がdr，速度がdvの範囲にある分子数が

$$N u(t,v)\,dv\,\frac{dr}{V}$$

であるとするとき，ボルツマン方程式は

$$(1.1)\quad \frac{\partial u(t,v)}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{V}\cdot\delta^2\int_{R^3}dw\int_{S^2}dl\,\{u(t,v^*)u(t,w^*)-u(t,v)u(t,w)\}\,|(w-v,l)|$$

となる．ただし，S^2は原点中心，半径1の球面，dlはS^2上の一様な確率測度で，

$$v^*=v+(w-v,l)l$$
$$w^*=w-(w-v,l)l$$

である．((,)は内積)

方程式(1.1)はいわゆる"Stosszahlansatz"の下に導かれるものであるが，Kacは Stosszahlansatzには確率論的考えがあるにもかかわらずそれが確率論的な形でのべられていないとして，次のようにアプリオリに全体の分子の運動(速度に関する)を確率論的に定めて，それからボルツマン方程式を導こうとした．

n個の分子に1からnまでの番号をつけ，i番目の分子の速度を$v_i(\in R^3)$とし，$\underline{v}=(v_1,\cdots,v_n)\in R^{3n}$と表

わす．$1 \leq i < j \leq n$, $S^2 \ni \ell$ に対して (i, j, ℓ)-衝突（または $(i, j, d\ell)$-衝突）とは，i番目とj番目の分子の衝突でとくに衝突時においてi番目の分子の中心からj番目の分子の中心へ向うunit vectorがℓ（または$d\ell$の範囲）であるような衝突であるとする．(i, j, ℓ)-衝突の結果，$\underline{\underline{v}}$は

$$A_{ij}(\ell)\underline{\underline{v}} = (v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i + (v_j - v_i, \ell)\ell, v_{i+1}, \cdots, v_{j-1}, v_j - (v_j - v_i, \ell)\ell, v_{j+1}, \cdots, v_n)$$

になるとする．そして$\underline{\underline{v}}$は次のような確率論的法則にしたがって変って行くものと仮定する．

時刻tでの速度が$\underline{\underline{v}}$のとき，$(t, t+dt)$内に

$\underline{\underline{v}}$が$A_{ij}(\ell)\underline{\underline{v}}$になる確率は $\psi_{ij}\, d\ell\, dt/n$

$\underline{\underline{v}}$が変化しない確率は $1 - \left(dt \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{S^2} d\ell\, \psi_{ij} / n\right)$.

ただし，$\psi_{ij} = \frac{\delta^2}{V} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(|(v_j - v_i, \ell)| - (v_j - v_i, \ell) \right)$.

このとき，時刻tにおける$\underline{\underline{v}}$の確率密度を$u_n(t, \underline{\underline{v}})$とすると，$u_n(t, \underline{\underline{v}})$のみたす方程式は，マルコフ過程論でいわゆるKolmogorovのforward equationとして知られているもので，次のようになる．

$$(1.2) \quad \frac{\partial u_n(t, \underline{\underline{v}})}{\partial t} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{S^2} d\ell \left\{ u_n(t, A_{ij}(\ell)\underline{\underline{v}}) - u_n(t, \underline{\underline{v}}) \right\} \psi_{ij}.$$

この方程式はn個の分子全体の速度の確率論的変化を記述し

ているが，Kacはこれからある1つの分子の速度の確率論的変化を記述する方程式を考え，その $n \to \infty$ のときの極限として，次のボルツマン方程式(1.3)を導こうとした。

$$(1.3)\quad \frac{\partial u(t,v)}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{V}\int_{R^3} dw \int_{S^2} dl \{u(t,v^*)u(t,w^*) - u(t,v)u(t,w)\}\,|(w-v,l)|\,.$$

このためには，propagation of chaos（次節で単純な場合に説明する）を証明することになるが，この完全な証明はまだ与えられていない。

(1.2)がKacのマスター方程式である。これはいわば確率論的にアプリオリに設定され，力学的考察が不充分と思われるが，少くとも次のような点で非常に興味がある。即ち，非線型問題(1.3)に対して，線型の方程式系(1.2)が考えられること，またこの考えはBurger's equation等かなり広いクラスのnon-linear parabolic equationにも共通している点である（[4][6][7][8]）。

§2. Maxwellian gasに対するKacの1次元模型.

Kac[1]は，上記の考えを，次のような単純なモデルに対してたしかめた。

$(x,y)\in R^2$, $0\le\theta<2\pi$ に対して

$$x^\theta = x\cos\theta - y\sin\theta,\quad y^\theta = x\sin\theta + y\sin\theta$$

とおき，(1.3) の単純化として

$$(2.1)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{u(t,x^\theta)u(t,y^\theta)-u(t,x)u(t,y)\}\,d\theta\,dy$$

を考える．ここで，$f(x)$ を R^1 上の確率密度としたとき，$u(0+,\cdot)=f(\cdot)$ の条件の下で，各 $t>0$ に対してやはり確率密度となるような解 $u(t,x)$ を問題にするわけである．次のような記号を導入する．R^1 の任意のボレル集合 Γ に対して

$$\pi(x,y,\Gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi_\Gamma(x\cos\theta+y\sin\theta)\,d\theta$$

（χ_Γ は Γ の定義函数）

とし，R^1 上の確率分布 u に対して

$$(2.2)\quad (Au)(\Gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(x,y,\Gamma)u(dx)u(dy)-u(\Gamma)$$

とおき，次の方程式を考える．

$$(2.3)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=(Au(t,\cdot))(\Gamma)\\ u(0+,\cdot)=f(\cdot)\ (=R^1\text{上の確率分布})\end{cases}$$

これは R^1 上の確率分布に関する方程式であるが，密度函数をもつ場合（初期値 f が密度函数をもてば解もそうなる）には，その density form が (2.1) になる．次に R^n 上の確率分布 u に対して

$$(A_n u)(\Gamma)=\int_{R^n}u(dx_1\cdots dx_n)\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}}\{\pi(x_i,x_j,\chi_\Gamma)-\chi_\Gamma\}$$

とおく．ただし，Γ は R^n のボレル集合，$\chi_\Gamma = \chi_\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ は Γ の定義函数で，

$$\pi(x_i, x_j, \varphi) = \int_{R^1} \pi(x_i, x_j, dx)\varphi(\cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots)$$

とする．(2.3) に対する Kac のマスター方程式は，

$$(2.4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_n(t,\Gamma)}{\partial t} = (A_n u_n(t,\cdot))(\Gamma) \\ u_n(0+,\cdot) = f^n \quad , \quad n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

となる．ここで，f^n は (2.3) の初期分布 f の n 重直積測度である．方程式系 (2.4) から次のような意味で (2.3) が導かれる．(2.4) の解 $u_n(t)$ は，$n \to \infty$ のとき，(2.3) の解 $u(t)$ の可算無限直積測度 $u(t)^\infty = u(t) \otimes u(t) \otimes \cdots$ に収束する．即ち，任意の $t > 0$，任意の m および R^m 上の任意の有界連続函数 $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_m)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^n} \varphi(x_1, \cdots, x_m) u_n(t, dx_1 \cdots dx_n) = \int_{R^m} \varphi \, d(\overbrace{u(t) \otimes \cdots \otimes u(t)}^{m\text{個}}).$$

$u_n(t) \to u(t)^\infty$ のことを，$\{u_n(t)\}$ が chaotic であると呼ぶことにすると，(2.4) の初期分布系が $\{f^n\}$ である限り，任意の $t > 0$ における分布系が chaotic であるということになる．これが "propagation of chaos" である．

以下，(2.3) に associate したある種の線型半群 $\{H_t\}$ の

構成と propagation of chaos の証明の概略についてのべる。

Φ^n を R^n 上の有界ボレル可測函数の全体とし，supremum norm を $\|\cdot\|$ とおく．Φ^n を $R^\infty = R^1 \times R^1 \times \cdots$ 上の函数族と見なして，$\Phi^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^n$ とおき，Φ^∞ の $\|\cdot\|$ による completion を Φ とおく．R^1 上の確率分布の全体を $\mathcal{M}$ とし，$f \in \mathcal{M}$ に対して，

$$f^n = \overbrace{f \otimes \cdots \otimes f}^{n} \qquad (R^n\text{上の確率分布})$$

$$f^\infty = f \otimes f \otimes \cdots \qquad (R^\infty\text{上の}\ 〃\ 〃),$$

$$\mathcal{N} = \text{the closure of } \{\varphi \in \Phi^\infty : \langle f^\infty, \varphi \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{M}\}$$

とおく．ただし記号 $\langle g, \varphi \rangle$ は，測度 g による函数 φ の積分を表わす．$\varphi - \psi \in \mathcal{N}$ のとき，$\varphi \sim \psi$ とかく．$\hat{\Phi}$ を quotient Banach space $\Phi/\mathcal{N}$ とし，$\varphi \in \Phi$ を含む coset を $\hat{\varphi}$ で表わす．$\theta : \Phi \longrightarrow \hat{\Phi}$ を $\theta\varphi = \hat{\varphi}$ により定義し，$\hat{\Phi}^n = \theta(\Phi^n)$，$\hat{\Phi}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\Phi}^n$ とおく．各 $\hat{\Phi}^n$ は $\hat{\Phi}$ の closed subspace で，$\hat{\Phi}^\infty$ は $\hat{\Phi}$ で dense である．

各 $n \geq 2$ に対して，$G_n : \Phi^n \longrightarrow \Phi^n$（線型有界）を

$$(G_n\varphi)(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \{\pi(x_i, x_j, \varphi) - \varphi\}$$

によって定義する．

<u>補題1</u>．$\varphi, \psi \in \Phi^n$ かつ $\varphi \sim \psi$ ならば $G_n\varphi \sim G_n\psi$．

この補題によって，$D_n : \hat{\Phi}^n \longrightarrow \hat{\Phi}^n$ を

$$D_n \hat{\varphi} \equiv \theta G_n \varphi \quad , \quad \hat{\varphi} \in \hat{\Phi}^n, \ \varphi \in \hat{\varphi} \cap \Phi^n,$$

によって定義することが出来る．D_n はやはり線型有界となる．そこで，D_n を生成作用素とする $\hat{\Phi}^n$ 上の強連続半群を $H_{n,t}$ とすると，明らかに

$$H_{n,t} \hat{\varphi} = \theta T_{n,t} \varphi \quad , \quad \hat{\varphi} \in \hat{\Phi}^n, \ \varphi \in \hat{\varphi} \cap \Phi^n$$

が成立する．ただし，$T_{n,t}$ は G_n を生成作用素とする Φ^n 上の強連続半群である．

<u>補題2</u>．$\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}^{\infty}$ に対して，$\lim_{n \to \infty} D_n \hat{\varphi}$ が存在する．その極限を $D\hat{\varphi}$ とすると，$\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}^m$ に対しては，

$$D\hat{\varphi} = \theta \sum_{i=1}^{m} \{ \pi(x_i, x_{m+1}, \varphi) - \varphi \}, \quad \varphi \in \hat{\varphi} \cap \Phi^m$$

と表わされる．

次に $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\Phi}$ に対して，$\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} \ (\in \hat{\Phi})$ を定義する．先づ，$\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\Phi}^{\infty}$ のときは，$\hat{\varphi}, \hat{\psi}$ の代表元

$$\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_m)$$
$$\psi = \psi(x_1, \cdots, x_n)$$

をそれぞれ勝手にえらんで来て，

$$\hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} = \theta \varphi(x_1, \cdots, x_m) \psi(x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})$$

と定義する．この定義は，代表元 φ, ψ のえらび方によらな

い。$\hat{\Phi}^\infty$ が $\hat{\Phi}$ で dense なことと，$\|\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi}\|\le\|\hat{\varphi}\|\cdot\|\hat{\psi}\|$ によって，この定義は，$\hat{\Phi}\times\hat{\Phi}$ の上まで連続的に拡張出来る。

<u>補題3.</u> $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\hat{\Phi}^\infty$ に対して

$$D(\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi})=D\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi}+\hat{\varphi}\otimes D\hat{\psi}.$$

以上の準備のもとに次の定理が得られる。

<u>定理.</u> $\hat{\Phi}$ 上の強連続半群 $\{H_t\}$ で次をみたすものが存在する。

i) $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\hat{\Phi}$ に対して，$H_t(\hat{\varphi}\otimes\hat{\psi})=(H_t\hat{\varphi})\otimes(H_t\hat{\psi})$
(multiplicative property)

ii) $\hat{\varphi}\in\hat{\Phi}^\infty$ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(H_t\hat{\varphi}-\hat{\varphi})=D\hat{\varphi}\qquad(\text{強収束})$$

iii) $f\in\mathcal{M}$ に対して

$$\langle f^\infty, H_t\hat{\varphi}\rangle=\langle u(t),\varphi\rangle,\ \hat{\varphi}\in\hat{\Phi}^1,\ \varphi\in\hat{\varphi}\cap\Phi^1$$

によって定まる $u(t)$（各 $t\geq 0$ に対して $\in\mathcal{M}$）は方程式 (2.3) の unique solution である。

iv) $\lim_{n\to\infty}H_{n,t}\hat{\varphi}=H_t\hat{\varphi},\ \hat{\varphi}\in\hat{\Phi}^\infty.$

<u>系.</u> Propagation of chaos が成立する。

定理の証明は省略して，系の証明だけを与えておく．

$\varphi(x_1, \cdots, x_m) = \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_m(x_m)$ ，$\varphi_j \in \Phi^1$，とおく．

A_n, G_n の定義から容易に

$$\left\langle e^{tA_n} f^n, \varphi \right\rangle = \left\langle f^n, T_{n,t}\varphi \right\rangle, \quad n \geq m.$$

ただし，ここでは φ を R^n 上の函数と見る．よって

$$\begin{aligned}
\left\langle u_n(t), \varphi \right\rangle &= \left\langle e^{tA_n} f^n, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle f^\infty, T_{n,t}\varphi \right\rangle \quad \left(\text{ここでは } T_{n,t}\varphi \text{ を } R^\infty \text{ 上の函数と見る}\right) \\
&= \left\langle f^\infty, H_{n,t}\hat{\varphi} \right\rangle \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \left\langle f^\infty, H_t\hat{\varphi} \right\rangle \\
&= \left\langle f^\infty, (H_t\hat{\varphi}_1)\otimes\cdots\otimes(H_t\hat{\varphi}_m) \right\rangle \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left\langle f^\infty, H_t\hat{\varphi}_j \right\rangle \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left\langle u(t), \varphi_j \right\rangle = \left\langle u(t)^m, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

§3. 注意．

1° (2.1) の解の $t \to \infty$ における行動について．

$f(x)$ を，$f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \sigma^2$ をみたすものとし，$u(t,x)$ を，f を初期値とする (2.1) の解とする．McKean [3] は，$u(t,x)$ に関する Wild の

表示式やエントロピーに関する計算等を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,x) - g(x)|\,dx \leq \text{const.}\, t^{\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{9}\left(\frac{8}{3\pi}-1\right)t} \quad (t \uparrow \infty)$$

を証明している。ここで $g(x)$ は

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$2°$. 方程式(2.3)は，binary collision だけある場合である。いわば多重衝突のようなものもある一般の場合については，状態空間が2点集合のとき Dudley Johnson [7] により，一般の空間の場合に T. Ueno [8] によって研究された。$(\Omega, \mathcal{F})$ を1点から成る集合を可測にするような可測空間とし，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 u に対して，(2.2)の代りに

$$(Au)(\Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Gamma)\, u(dx)\, u(dx_1) \cdots u(dx_n)$$

とおき，(2.3)に対応して

$$\frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t} = (Au(t,\cdot))(\Gamma)$$

を考える。ただし，$\Gamma \in \mathcal{F}$ で，各 $n \geq 0$ に対し $A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Gamma)$ は次の性質をもつとする。

i) $x, x_1, \cdots, x_n \in \Omega$ を固定したとき，$A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Gamma)$ は Γ につき signed measure で，

$$0 \leq A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Gamma) < \infty, \quad x \notin \Gamma$$
$$A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Omega) = 0.$$

ii) $\Gamma \in \mathfrak{B}$を固定したとき、$A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Gamma)$は$(x,x_1,\cdots,x_n)$につき可測で、$x$も固定したとき$(x_1,\cdots,x_n)$につき対称。

iii) $A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\{x\})$は$(x,x_1,\cdots,x_n)$につき可測。

$$g_n = \sup_{x,x_1,\cdots,x_n \in \Omega} A_n^{(x_1,\cdots,x_n)}(x,\Omega-\{x\})$$

とおく。Dudley Johnsonは、$\Omega=\{-1,+1\}$のとき

仮定(A)：$\exists L<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} g_n n^p < L^p \cdot p!$, $p=1,2,\cdots$

の下に、T. Uenoは、Ωが一般のときやはり同じ仮定(A)の下にpropagation of chaosを証明した。

仮定(A)は次の仮定(B)までゆるめられる。

仮定(B)：$g=\sum_{n=0}^{\infty} g_n < \infty$で

$\forall \varepsilon \in (0,1)$に対し、$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dt}{g-\sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n} = \infty.$$

3°. すでにのべたようにpropagation of chaosはhard sphereのBoltzmann's equationの場合には完全な証明がない。さらに次のような典型的な例についても未解決と思われる。

(i) Burger's equation.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2), \qquad (x \in R^1).$$

これについては，かなりの考察が[6]で与えられている．

(ii) Carleman's 2-state fictitious gas [9]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = v^2 - u^2 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = u^2 - v^2, \end{cases} \qquad (x \in R^1).$$

文　献

[1] M. Kac, Foundations of kinetic theory, Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol. 3, 171–197.

[2] ——, Probability and Related Topics in the Physical Sciences, New York 1959. (Chap. III, §16–§18).

[3] H. P. McKean, Jr., Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 21 (1966), 343–367.

[4] H. P. McKean, Jr., A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations, P. N. A. S. 56(1966), 1907–1911.

[5] ————, An exponential formula for solving Boltzmann's equation for a Maxwellian gas, J. Comb. Theory, 2(1967), 358—382.

[6] ————, Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations, to appear.

[7] D. P. Johnson, On a class of stochastic processes and its relationship to infinite particle gases, to appear.

[8] T. Ueno, A class of Markov processes with non-linear bounded generators, to appear.

[9] T. Carleman, Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz, Uppsala 1957.