数理解析研究所講究録
第 56 巻 1968 年 50-73

統計力学の基礎的問題

東大 理　　久保 亮五

1.　はじめに

できるだけ精密な記述を目標とする物理学において、何故、確率的な考察を必要とするのか。われわれが直面する物理的対象は、ほとんどつねに非常に多数の自由度をもつ力学系である。できるだけ理想的な条件においてこれを統御することが可能な場合もあるが、多くの場合、完全な統御は不可能である。用意された力学系の初期条件にも、何等かの不定さが残ることもやむを得ない。さらにまた、そのような複雑な力学系について古典力学であれ、量子力学であれ、力学の運動方程式を完全に解くこともできない。一方、そのような複雑さは、かえって確率論的な単純さを生むことを期待させる。われわれが注目する物理量は、ミクロな運動のある射影であり、射影された運動は非決定論的である。

このような期待から、力学と確率論とを結合し、超えがた

い複雑さ（*chaos*）をむしろ積極的（*positive*）な認識の方法に転換するのが統計力学である。したがって、確率的事象としてとらえられるものは何か、そのような事象に賦与される確率は何か、をつかむことがその出発点であり、その基礎である。一旦、これらが与えられた上では、それから組立てられる論理は、確率論と力学の論理であるが、その基礎に立帰ってみると、今さらながらにその基礎作業の困難さに驚かされる。Boltzmann以後、100年もたった今日、統計力学が近代物理学において赫々たる成果をあげている今日、その基礎が難しくてよくわからない、などというのはまことに申訳ないようであるが、考えてみれば当然といえば当然である。

統計力学の基礎として導入される確率論的仮定は、力学から基礎づけられなければならない、すくなくとも、力学とcompatibleでなければならない。一方、多数の自由度をもつ力学系の力学、――簡単に多体系への力学といおう――は数学的に解き得ないからこそ統計力学が必要にもなるわけである。力学を解かなくても言えることがいくつかあって、それが統計力学の論理的な基礎を与えるであろう、というのが望みであるが、この望みには果して根拠があるであろうか、それは今日でも必ずしも明らかではない。エルゴード論については後に述べるが、多体問題の困難を回避して統計力学の

基礎が固められるかどうか、疑問をいだくのも当然であろう。

2. 古典統計力学と量子統計力学

われわれの対象は、多数の粒子から成る系（多粒子系）、または波動場である。前者では自由度は粒子の数に比例し、一応有限であるが、後者では自由度は無限大である。（このための数学的困難は場の理論につきものである。）それらの従う力学は、古典力学、または量子力学である。もとより、実在の物理的世界の力学は量子力学であり、古典力学はその極限としての近似（$\hbar \to 0$）であるから、統計力学も、厳密には量子力学に基礎をおいた量子統計力学でなければならない。しかし、古典力学を基礎とする古典統計力学は、量子統計力学の近似としての意味はもとより、歴史的意義においても、また一つの論理的構造として重要な意義をもっている。この意味で、エルゴード論のごときも、今日なお多く古典統計力学について語られる。このことは裏返せば、量子統計力学の基礎の掘り下げ方がはなはだ不充分であることを示すといってもよかろう。筆者自身をもふくめて、今日の物理学者の多くは、そのような基礎的問題に沈潜する余裕をもたない。今日、確立されている量子統計力学の方法が、充分、論理的な証明を欠くとしても、それが本質的に正しいことを疑う者

はないであろうし、その驚嘆すべき成功はその基礎の不明確さをむしろ経験的に補強するものと受取られる。しかし、量子統計力学の基礎のあいまいさを徹底的に追求することはやはり理論物理学の一つの重要な課題であろう。それが自己満足的な不毛に終るか、何かあたらしい本質を生み出すか、今日、予見することはむつかしい。

古典統計力学の限界について注意すべき重要な一点は、力学系の安定性の保証が一般に古典論の範囲外であることである。簡単な例としては水素原子を思い起こせばよい。陽子と電子の系は、古典力学の範囲では安定に存在し得ない。一般に正、負の電気をもつ粒子系は、プランク定数 $h \neq 0$ の存在によってはじめて安定であり得る。[1]（波動場については、古典力学はこれとはまたちがった意味での不安定、種々の発散の困難に導く。場の量子力学にはまたべつの困難があり得るが。）従って、古典統計力学の範囲では、原子とか、分子とか、力学系の要素として仮定されたものについてはその安定性を頭から仮定しなければならない。またそれらの間に働く力も何か現象的に仮定しなければならない。そのような力はしかし、何であってもよいわけではない。（特に引力についてはかなりきびしい制限が必要である。）勝手に仮想した力をもって相互作用する粒子系の統計力学は、非常に奇妙なも

のになってしまい、物理的世界の現実とは似ても似つかぬものになってしまうかもしれないのである。

3. 熱平衡の統計力学

巨視的な物体を長い時間放置しておくといわゆる熱平衡に達する。たとえば気体を容器の中に入れ、外界から絶縁すれば、最初その中にあった流れや渦はいつか消失して、ある定常状態に達し、温度、圧力、密度といった少数の変数で表わされる状態に落着く。これが熱平衡であるが、微視的にはもちろん、その中の粒子は運動をつづけている。観測する物理量（たとえば圧力）に相当する力学量A（壁に与えられる単位時間あたりの衝撃）は時間的に変化するが、その変化$A(t)$は確率過程であり、それは定常過程である。観測値はふつう、その時間的平均値と考えられるから（単にその平均値ばかりでなく、$A(t)$の観測じしんも可能であろうが，）その値

$$\overline{A_t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} A(t)\, dt \qquad (1)$$

を知ることが統計力学の基本的な問題である。いつもここで採用されるのはエルゴード仮説と等重率の原理である。すなわち、

$$\text{時間平均} = \text{位相平均} \qquad (2)$$

という仮定である。ここに位相平均というのはその力学系として可能な力学的状態についての平均であるが、その重率として、古典統計力学では、位相空間（カノニカルな力学変数の完全な組）の各体積要素にアプリオリに一様な確率を賦与する。また量子統計力学ではその系の可能な量子状態の一つ一つに等しい重率を賦与する。よく知られているように位相空間の体積要素 h^f（f は自由度）が量子力学的な状態の一つ一つに対応するから、古典的、量子的なこの二つの仮定は互に対応している。

この等重率の原理を承認すれば熱平衡状態の統計力学は、その上に確率論的に構成される。われわれがふつうに考える対象は保存系であって、少くも全エネルギーを運動の定数としてもっている。したがって考えるべき位相空間は、その部分空間であってエネルギー曲面の各点が、その系の可能な状態であるが、各点における面積要素 $d\sigma$ に賦与すべき重率は一定ではなく、

$$d\sigma / |\mathrm{grad}\ H| \qquad (3)$$

としなければならない。ここに H はハミルトニアンで grad は $2f$ 次元の位相空間における勾配である。これはエネルギーが E と $E+dE$ の間にあるような殻を考え、その極限とし

て等重率原理から導かれることである。量子力学的には、あるエネルギーの幅 ΔE の範囲にある量子的状態を考え、その数をWとすれば、各量子状態に $1/W$ の確率を与えることになる。

われわれの対象は、マクロな系であり、その自由度はひじょうに大きい。問題はそのようなマクロな系に対する漸近評価であって、熱力学のすべては、自由度の大きい系に対する極限法則として導かれる。

4. 漸近評価と熱力学的極限

古典的な粒子系を考えよう。それらの粒子は互にある力を及ぼし合うものとするが、いまそれらの粒子 N 個が体積 V の容器に閉じこめられているとしよう。いま、

$$N \to \infty, \quad V \to \infty, \quad N/V = n = 一定 \tag{4}$$

の極限を考える。ふつうの物質では、充分大きな N、V に関して、容器の形などによらず、n, その他. $E/N = \varepsilon$（E は全エネルギー）など、少数のパラメタで指定される *bulk* としての状態が定まる。これがわれわれの経験である。しかし、物理的実在を抽象化し、ある力学系として定式化したモデルは必ずしもそのような性質をみたすとは限らない。また、そ

うであるとしても、その数学的証明は必ずしも容易ではない。（この点は、古典的でも、量子的でも同様である。）

等重率の原理から出発すれば、確率論的な問題としては生成関数に当る分配関数の計算に帰着する。分配関数とは、古典的には

$$Z_N(\beta) = \int\cdots\int e^{-\beta H} d\Gamma_N \qquad (5)$$

（Hはハミルトニアン，$d\Gamma_N$はN個の粒子に対する位相空間の体積要素、βは生成関数のパラメタであるが、統計力学的には絶対温度Tと

$$\beta = 1/kT$$

という関係にある。（kはボルツマン定数）量子的には

$$Z_N(\beta) = \sum_j e^{-\beta E_j(N)} \qquad (6)$$

（$E_j(N)$はN個の粒子系のj番目の量子状態のエネルギー）で与えられる。Nが充分大きいとき、

$$\log Z_N(\beta) \sim Nf(n, \beta) \qquad (7)$$

という形をもつことは、この粒子系が熱力学に従うためにまず要求される性質である。さらに、$\beta > 0$に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} > 0 \qquad (8)$$

といった条件が熱力学的安定性の保証として必要である[2]。例として、N個の粒子が独立である場合には、ハミルトニアンが分離されることから(7)の性質が成立つことは明らかである。もちろん、粒子が独立というのは理想化で、物理的な対象としては意味がないようなものではあるが、粒子間の相互作用が弱ければ、そのような理想化は実在からほど遠くはあるまいと考えるのがふつうである。しかし、一般的にいって、粒子間の相互作用が存在する場合、以上のような漸近的条件が成立つかどうか、与えられた力学系のモデルについて証明することは数学的に容易ではない。基礎的な問題としては、そのような漸近的条件を成立たせるようなモデルの範囲を確定することであって熱力学的極限(4)の存在問題とよばれる[3]。

これに関連して二つの点をさらに注意しておこう。第一は(4)のような極限操作を行うという統計力学の伝統的方法をやめて、はじめから $N=\infty$ $V=\infty$ の系を扱おうとする試みである。これはいわゆる C^* algebraとして場の理論から発展しつつあるもので、この研究会において荒木氏がこれを論ぜられる。

第二の点は、（４）の熱力学極限に関する異常性と相転移の存在である。分配関数のラプラス逆変換

$$\Omega_N(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta^*-i\infty}^{\beta^*+i\infty} Z_N(\beta)e^{\beta E}d\beta \qquad (9)$$

はいわゆる状態密度であり、

$$k\log\Omega_N(E)=S(E,N) \qquad (10)$$

はエントロピーである。この逆変換は、ふつう鞍点法によって漸近評価される。，Khinchin は鞍点法の代りに、中央極限定理を用いてこの漸近評価を行ったが、[4)]それには（９）が仮定されている。もう少しくわしく述べれば、Khinchin は独立な系N個の集まりに対して、個々の系がカノニカル分布に従うエネルギー分布をもつとき、全体のエネルギーが中央極限定理に従うことを根拠としたのである。（Khinchin の考えた部分系としては、実際の物質に仕切りの壁を入れてこれを細分した一つ一つと考えてもよいであろうが、それは熱力学極限の存在の証明ではない）相転移が起る場合には、一般に中央極限定理は成立たずそのような仮定は許されない。熱力学極限が存在しないというのではないが、その極限の存在のしかたに何かある異常があるはずであろう。この点もあま

りあきらかでない基礎的問題である。最近、相転移の異常性に関する統計力学はいろんな意味で注目をひき、盛んに研究されているが、このような見地からの研究は乏しい。(9月の統計力学国際会議でVerbovenがC^* algebraの方法で相転移の問題を論じたことは注目される。)(中央極限定理という立場から見れば、互に関係する偶然量の和の漸近分布の問題である。偶然量の系列がマルコフ的であり、そのあいだの相関の確率に適当な条件があれば、中央極限定理が成立つ。これは一次元物質に相転移が存在しないという物理学の定理に対応する。(もっと一般にからみ合っている偶然量の和に対する中央極限定理は数学的はどのくらい研究されているのであろうか、御教示いただきたいところである。)

5. 古典的エルゴード論と統計力学[5,6)]

エルゴード論がボルツマンのエルゴード仮説に端を発し、測度を保存する連続変換に関する時間平均の存在定理、また時間平均と位相平均の相等性の問題として発展したことは周知である。

ハミルトンの運動方程式

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad , \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad j=1, \cdots f \quad (11)$$

によって規定される運動は位相空間の点（位相点）の運動

$$P_t = U^t P_0 \tag{12}$$

を与える。ある位相関数 $f(P)$ について

$$\bar{f}^t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)\,dt \tag{13}$$

は初期点 P_0 が与えられたときの長時間平均、

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(V)} \int f(P)\, d\Gamma \tag{14}$$

は考える位相空間Vについての位相平均である。ただし $\mu(V)$ はその全測度で $d\Gamma$ は位相空間要素の測度である。

Birkoff の定理は

1.) $\bar{f}^t$ の存在

2.) $\langle \bar{f}^t \rangle_V = \langle f \rangle_V$ (15)

3.) $\bar{f}^t = \langle f \rangle_V$ (16)

の順序で進む。$\bar{f}^t$ は P_0 についてVのほとんどどこでも存在する、すなわち測度0の集合を除いて存在する。 2)については測度が保存されること以上の条件は要らないが、3)に対してはVが *metrically indecomposable* であること、すなわちVが不変部分空間に分かれないことが必要且つ充分な条件である。

方程式（11）でハミルトニアン H は時間 t をあらわに含まないから

$$H(p, q) = E \tag{17}$$

がエネルギー積分として存在する。したがって P_t の運動は（17）の超曲面上に限られるが、この曲面上で保存されるmeasureとしては（3）の定義を採用しなければならない。与えられた E については、（16）は従って

$$\bar{f}^t = \langle f \rangle_E \tag{18}$$

となる。

同様に、もし（17）のほかにglobalな積分

$$m(p, q) = M$$

が存在すれば、P_t の運動は、E, M, ‥‥ で定まる部分空間に限られるから、適当なmeasureを導入した上で、（18）はさらに

$$f^t = \langle f \rangle_{E, M, \cdots\cdots} \tag{19}$$

というように修正されなければならない。

Birkoffの定理にいうmetrically indecomposableとは、

このような global な積分を数え上げた上での話ということであるから、(19)を使うためには、そのような積分をすべて見出さなければならない。与えられた力学系について、どうしてそれらを見出すか、それは一般に解かれていない困難な問題である。この意味で、Birkoff の定理は折角ながら、ergodic という言葉を indecomposable という言葉に置き代えただけで、統計力学の基礎を与えることにあまり役立たないことになる。

統計力学を実際に適用する物理学者の論理は次のようなものであろう。例として理想気体を考えよう。等重率の原理を仮定した上では、(5)の分配関数を相互作用のない粒子系について求めることは容易で、それからすべての熱力学的問題は答えられる。しかしもちろん、相互作用がない粒子系が(少くも、特別な位相関数を除き、一般的に)エルゴード性をもたないことは明らかである。したがって仮定されていることは、

(a) 粒子のあいだには弱い相互作用項があって、エルゴード性を保証する。

(b) 一方、その相互作用は分配関数(5)に対してはほとんど影響を与えない。

という条件であり、これらが理想化を可能ならしめる。

このような理想化が可能であろうということはいわば物理学者の楽観的な（半経験的な）信条であろう。しかし、それが手放しでは許されないことも明らかである。まず、このような理想化が相互作用項の性質によることは当然であろう。これを ε 項とおき、$\varepsilon \to 0$ の極限が理想化であるといっても項のたちが悪いとその極限は存在しない。またそれは存在しても、熱力学極限（4）に対して（7）のような素直なものは存在しないかもしれない。§2に触れた力学系の安定性も問題であろう。

この研究会で田中氏が紹介されたところによると（ウロ覚えで恐縮である。あるいは記憶ちがいかも知れないが）粒子系に小さい摂動を加えたとき、摂動パラメタ（ε）のある範囲では global な積分がなお存在しつづける？というようなことでもある。また斉藤氏が論ぜられた非称型振動系についても、同様案外な積分の存在が示されるということである。とすれば、相互作用のない粒子系、相互作用のない振動子系に、相互作用を導入すれば、ほとんどつねに、エルゴード性が回復されるという楽観論は大いに吟味を要するところである。

理想気体の統計力学の基礎づけすらあやしい、ということでは統計力学者の怠慢だと叱られてもしかたないようである。しかしこれは異常な数学的困難の根深さを物語っている、と

降参せざるを得ないのが現状である。

剛体球の系についてエルゴード性を証明したという Cinai の理論は、幾分なりとも実在的な系についての最初の例として物理学者のあいだにも関心をよんでいる。これについては別の紹介があるし、また筆者はこれを勉強していないので立入ることはできない。

6. 位相関数の性質とエルゴード定理

古典的なエルゴード理論はボルツマンのエルゴード仮説をあまりに正直に受取りすぎていたようである。(2)の仮定が任意の位相関数について成立つことは必ずしも統計力学に必要なわけではないし、考える力学系も任意であるわけではない。必要なのは、多自由度系についての物理的な量についての定理である。この観点から問題を立て直そうとしたのは Khinchin であった。[4]

たとえば多粒子系を考えよう。実際の物理的な対象では、たとえばA種粒子が N_A, B種粒子が N_B ….. というように、同種の粒子が多数に存在する。観測する量も、

$$F_1 = \sum_j f_j \quad , \quad F_2 = \sum_j \sum_k f_{jk} \quad \ldots \qquad (21)$$

のように、粒子 j に関する量 f_j の和、2個の粒子 j, k の組

合せできまる量f_{jk}の和といったいわゆる sum function であることがふつうである。粒子系の運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー、その和としての全エネルギーも sum function の例である。

たとえば全エネルギー一定の超曲面上で(3)の測度を考えてこのような sum function の値の分布を考えると、すくなくとも§4で述べたように、熱力学極限の成立をゆるすような事情のもとでは、中央極限定理が成立ち、その分散は相対的に小さい。すなわち、

$$\frac{\langle (F-\langle F\rangle_E)^2\rangle}{\langle F\rangle_E^2}=\sigma_F^2 \tag{20}$$

とおけば

$$\sigma_F=O(N^{-\frac{1}{2}})$$

（Nは粒子数）となるであろう。このことは、このような量Fが定エネルギー面上でほとんど一定の値をとることを意味する。とすれば、そのような量の時間平均はその一定値をとるわけで、(2)ははなはだ trivial のように見える。つまり，粒子数Nが大きければ、（2）が成立たないような初期点の集合の measure は非常に小さいといってよい。大きい系の sum functions に対するエルゴード定理として統計力学を基

礎づけるに充分であるように思われる。

しかしこれにも文句はつけられる。なるほど、例外的な点の集合の測度は小さいとしても、物理的な確率が小さいかどうかは別問題である。もしその力学系になにか global な積分が存在していたとすれば、位相点はその値できめられる部分空間に限られるが、その集合の測度は元来の意味では零である。にも拘らずその系はその中に存在する。したがって、global な積分が存在しないことがわかっていれば安心であるが、そうでない限り、新しい解釈も統計力学を基礎づけることにはならないであろう。むしろ当然のことではあるが、与えられた系についてエルゴード定理が適用できるかどうかの問題はふたたび、global な積分が存在するかどうかの判定に帰してしまう。

7. 量子統計力学とエルゴード定理

von Neumann は古典的なエルゴード論に手を染めるより も早く、量子力学におけるエルゴード定理を論いた。[7] 孤立した力学系の量子的な状態が $t=0$ で

$$\psi(0) = \sum a_k \phi_k \tag{22}$$

であったとする。ϕ_k は系のハミルトニアン H の固有関数で、

この系の状態を表わすヒルバード空間の完全系をなす。後の時刻では

$$\Psi(t)=\sum a_k\, e^{-iE_k t/\hbar}\,\phi_k \qquad (23)$$

が系の運動を与える。任意の力学量 A に対して時刻 t での期待値は

$$A(t)=(\Psi\, A\, \Psi)$$
$$=\sum_{k,l} a_k\, a_l\, A_{kl}\, e^{-i(E_l-E_k)t/\hbar}$$

となるから、その時間平均

$$\overline{A}^{t}=\lim\frac{1}{T}\int_0^T(\Psi(t)\;A\,\Psi(t))\,dt$$

$$=\sum_k |a_k|^2 A_{kk}+\sum_{\substack{k\neq l\\(E_k=E_l)}} a_k^* a_l A_{kl} \qquad (24)$$

で与えられる。ここに

$$A_{kl}=(\phi_k\;A\;\phi_l)$$

は A の行列要素。(24)では $E_k\neq E_l$ の項は長時間平均で消え、$E_k=E_l$ の部分だけに対してこの第２項が残る。一方、状態（22）による量子力学的期待値

$$\sum_{k,l} a_k^* a_l A_{kl}$$

について複素係数 a_k の位相が 0 から 2π まで自由だとしての平均をとったものを位相平均とみなすと、

$$\text{位相平均} = \sum_k |a_k|^2 A_{kk} \tag{25}$$

これと (24) とのちがいは (24) の第2項である。もしエネルギー E_k ----が縮退をもたないなら (24) の第2項は無いから

位相平均 = 時間平均

となりそうである。

しかし、(25) の解釈は役に立たない。与えられた系のある状態について、a_k がどんなものであるか、われわれが知っているのは、

$$\sum_k |a_k|^2 = 1$$

の条件だけであり、その系をわれわれの観測にもちこす際に $|a_k|^2$ がとる値が知れない以上これは役に立たないし、これは実際、等重率の原理として §3 に述べたものとはちがう。

von Neumann はこのような fine-grained theorem が役に立たないことを認識して、coarse-grained theorem を

打立てることに努力した。古典エルゴード定理とはちがって、この立場では§6と同様、自由度の大きいマクロな observables についてエルゴード定理を立てようとするのである。この立場からはマクロな系、マクロな量が何であるかをまず定義しなければならないが、明確な定義は容易ではない。一つの特徴は大きい縮退ということであるが、それ以上にたとえばハミルトニアンをマクロな系としてどう特徴づけるべきであろうか。また、さらにマクロな量のマクロな観測とは何であるか、ということまではっきりさせなければならない。

von Neumann 以来、かなり多くの研究があるが、[8] 量子統計力学のエルゴード定理が何であるか、満足な解答はおろか、その問題の formulation も明確でないのが現状である。古典論の場合とちがって、これでは数学者の前に出せる段階ではないというべきであろうから、これ以上ここには立入らない。

8. おわりに

以上、はなはだ pessimistic な話ばかりで申訳ない次第といわなければならない。統計力学の基礎がかくもあやしげであるとはまことに困ったものではあるが、前にもいったように本質的に極めて困難な問題なのであろう。§6にふれたよう

に、実際に問題にしなければならないのは、多自由度のマクロな系に関するマクロな量である。それらのマクロな量の運動は、§1にもいったように全体系の運動の投影であり、それは非決定論的な運動として把握される。統計力学の問題は、その運動を確率過程としてとらえることができるか、どうか、それをどうとらえるかということであり、エルゴード論もひっきょうはその見地からとらえられてはじめて物理的な意義をもつものであろう。その古典的に典型的な例として、古典的な気体についてのボルツマン方程式がある。Boltzmannは2個の分子の衝突の過程を考え、これが確率的に起るものとして粒子の速度分布関数の時間的変化を表わす方程式を立てた。彼はこれを証明したのではなく、衝突数算定の仮定をおくことによって、これをもっともらしいものとして仮定したのである。この方程式の定常解として気体分子のボルツマン分布が出る。

したがって、力学の基礎方程式からボルツマン方程式を厳密に導くことができるならば、それはエルゴード定理によって気体の統計力学を基礎づけることと同じことである。このようなプログラムはBogolubovによって行われた。[9] 彼は、稀薄な気体の極限において、またある時間の範囲について、これに成功した。しかし、数学的な厳密性においてこれが満足

すべきものであるかどうか、必ずしも明らかではないように思われる。彼の方法を濃い気体に進めることには非常な困難があるであろう。

一方、これと同様なアプローチは一般に実際的な問題の取扱いとしてひろく用いられている。近年発展した量子統計力学の種々の方法は、基本的には、多粒子系の運動方程式を、種々の段階の物理量に対する方程式の系列に引直し、時間的、空間的なある制限（それらは coarse-graining とよばれる）のもとに妥当するある漸近解を得ようとするものである。[10] このような方法によって、物理学者は具体的な問題に対する具体的な解答を得ようとするのであるが、その数学的な吟味ははなはだ乏しい。しかしながら、このようなアプローチはマクロな系に対するマクロな量という概念を定式化する途であり、エルゴード定理をそのようにして定式化することも可能であるように思われる。問題は、一つ一つの対象の特殊性をどのように脱却して一般的なものとしてこれを行うことができるか、ということであろうが、すべては将来に委ねなければならない。

1) F. J. Dyson and A. Lenard, J. Math. Phys. 8 423 (1967)

2) 久保他. 熱学統計力学 裳華房 P. 187

3) P. Mazur, "Statistical Mechanics" edited by Bak, Benjamin 1967, p. 72
J. van der Linden, 上掲書 P. 89

4) A. I. Khinchin, Mathematical Foundation of Statistical Mechanics, Dover, New York 1949.

5) 古い文献であるが、学術研究会議編「物理学講演集(I)」(丸善 昭16) 中の伏見康治氏の論文は示唆に富む.

6) 比較的最近に物理学者の立場からよくまとめられたものとして、
I. E. Farquhar, "Ergodic Theory in Statistical Mechanics," Interscience Pub. 1964 をすすめる。なお 3)にあげられた Bak の本にも Farquhar の短かい論文がある。

7) J. von Neumann, Z. Physik 57 30 (1929)

8) 上掲 Farquhar の著書、その他最近のものとして "Ergodic Theories" Academic Press, 1961, を参照

9) N. N. Bogolubov, Problems of a dynamical theory in statistical physics in "Studies in Statistical Mechanics Vol. 1" ed. de Boer and Uhlenbeck, North Holland 1962, E. G. D. Cohen in "Fundamental Problems in Statistical Mechanics" ed. E. G. D. Cohen, North Holland 1962 p. 110.

10) たとえば A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinski, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics, Prentice Hall, 阿部龍蔵. 統計力学. 東大出版会、1966.