数理解析研究所講究録
第56巻 1968年 93-113

非可換エルゴード理論

京大　数研　　荒　木　不二洋

§1. 序

有限個粒子系の量子力学の数学的基礎はヒルベルト空間論である。これを無限個の粒子系（無限に広い空間に有限密度で拡がつているような場合）の統計力学へ拡張する場合の自然な数学的枠としては、現在 C* 環の理論が考えられている。最近この枠組の中で非可換エルゴード理論と称するものが展開されているので、その解説を試みたい。

まず C* 環についての簡単な準備。

C* 環（ B* 環とも言う）とは、具体的には、ヒルベルト空間の有界作用素の作る *環（加法、複素数による掛算、乗法、エルミト共軛の演算 *,で閉じた集合）で作用素のノルムについて閉じたもの（極限をすべて含むもの）と思つてよい。抽象的には *バーナツハ環で $\|A^*A\| = \|A\|^2$ をみたすものとして定義される。

C* 環 $\mathfrak{A}$ の表現 π とは、 $\mathfrak{A}$ の各元 A に、あるヒルベルト空間 H上の作用素 $\pi(A)$ を対応させ、線形結合、乗法、* 、の各演算を保存するものを言う。自動的に $\|\pi(A)\| \leqq \|A\|$ 。表現が忠実であるとは、$A \neq 0$ なら $\pi(A) \neq 0$ のこと。このとき、$\|\pi(A)\| = \|A\|$ 。H_1 上の表現 π_1 と H_2 上の表現 π_2 とがユニタリ同値とは、H_1 から H_2 へのユニタリ写像 U（内積を保存する一対一 H_2 上への写像）が存在して $U\pi_1(A)U^{-1} = \pi_2(A)$ となることを言う。Hのベクトル Ω が巡回的とは、$\pi(A)\Omega$ $(A \in \mathfrak{A})$ の全体がHを張ることを言う。

C* 環 $\mathfrak{A}$ の状態 ϕ とは、 $\mathfrak{A}$ の各元 A に複素数 $\phi(A)$ （ A の期待値 ）を対応させるもので、線形 $(\phi(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1\phi(A_1) + c_2\phi(A_2))$ ， 正 $(\phi(A^*A) \geqq 0)$ ， かつ規格化された（ $\sup_A |\phi(A)|/\|A\| = 1$ ， $\mathfrak{A}$ に単位元 1 があれば $\phi(1) = 1$ が必要十分 ）ものを言う。任意の状態 ϕ に対し、ヒルベルト空間 H_ϕ ， $\mathfrak{A}$ の H_ϕ 上表現 π_ϕ ，巡回ベクトル Ω_ϕ が存在して、

$$\phi(A) = (\Omega_\phi \ , \ \pi(A)\Omega_\phi)$$

となる。このような H_ϕ π_ϕ Ω_ϕ の組はユニタリ同値を除き ϕ により一意的にきまる。［ここで物理学者の慣用に従い、ヒルベルト空間の内積 $(\Psi \ , \ \chi)$ は χ について線形、Ψ について共軛線形。］

§ 2. 古典統計力学の簡単な例

まず古典統計力学の場合、 C* 環の枠組にどのようにはまるか簡単な例で説明する。この場合は可換 C* 環により枠組が与えられ、通常のエルゴード理論に対応する。ただし、この例では時間発展の意味を持つ一パラメター群は考えない。

2.1. ポテンシャル

$\mathbf{Z}$ ： 整数全体。格子点（ 一次元 ）を表わす。

I ： $\mathbf{Z}$ の有限または無限部分集合。

V(I) ： I の体積すなわち I の元の数。 $I = \{j_1 \cdots j_k\}$ なら k が V(I) である。

$\Phi(I)$ ： 有限な $I \subset \mathbf{Z}$ の実関数。 $I = \{j_1 \cdots j_k\}$ なら、 $j_1 \cdots j_k$ の各格子点にいる粒子の間の k 体ポテンシャル。

$U_\Phi(I) = \sum_{J \subset I, V(J) < \infty} \Phi(J)$ ： I の各点に粒子がいるときの総ポテンシャルエネルギー。

$\|\Phi\| \equiv \sum_{J\ni 0, V(J)<\infty} |\Phi(J)|/V(J)$: $\mathbf{Z}$ の有限部分集合上の関数の L_1 ノルム。

$\mathcal{B}$: 次の二条件をみたすポテンシャル Φ が作るバーナッハ空間、ノルムは上記のもの。

1 $\Phi(I+\ell) = \Phi(I)$ (不変性)ただし $I = \{j_1 \cdots j_k\}$ なら $I + \ell = \{j_1 + \ell, \cdots j_k + \ell\}$ 。

2 $\|\Phi\| < \infty$ (遠距離および多体での振舞に対する制限)

2.2. 物理量の作る C* 環とその状態

K : 0 と 1の二点から成る集合。粒子がある格子点にいる (1) かいないか (0) を区別するのに使う。

K^I : $I \subset \mathbf{Z}$ の各点に Kを考え、その位相積を作つたもの。

$x = \{x_i \ ; \ i \in I\}$: K^I の元。Iのどの格子点 kに粒子がいて $(x_k = 1)$ どの格子点 ℓ に粒子がいない $(x_\ell = 0)$ という configuration を表わす。

$S_I(x) \equiv \{i \in I \ ; \ x_i = 1\}$: Iの中で粒子がいる格子点の全体。

$\mathcal{C}(K^I)$: K^I 上有界連続関数の作るバーナッハ空間。ノルムは $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ 。例えば、 $N_J(x) \equiv \sum_{i\in J} x_i$ (粒子数)、 $E_J(x) \equiv U_\Phi(S_J(x))$ (エネルギー)、等は有限な $J \subset I$ に対しては $\mathcal{C}(K^I)$ の元である。

$\mathcal{M}(K^I)$: K^I 上の実測度の作るバーナッハ空間。 $\mathcal{C}(K^I)$ の共軛空間。

$f \in \mathcal{C}(K^I)$, $\mu \in \mathcal{M}(K^I)$ に対し次の記号を使う。

$$(\mu, f) \equiv \int f(x)\mu(x)dx$$

$\mathfrak{A} \equiv \mathcal{C}(K^Z)$: 物理量の作るC* 環。 $N_J(x)$, $E_J(x)$ 等はJが有限ならば $\mathfrak{A}$ の元だが、無限集合Jに対しては、必ずしもそうでない(特に $N_J(x)$ はいつでもそうでない)ことに注意。

$\mathcal{S} \equiv \mathcal{M}(K^Z)_1^+$: $\mathfrak{A}$ の状態全体。規格化された正測度。

以下は少々技術的になるが、有用な記号を定義する。

$J \subset I \subset \mathbf{Z}$ のとき $K^I = K^J \cdot K^{I \setminus J}$ と書ける。ただし $I \setminus J$ は J における の補集合。このとき $x_I \in K^I$ は $(x_J, x_{I \setminus J})$, $x_J \in K^J$, $x_{I \setminus J} \in K^{I \setminus J}$ のように座標を分けて書くことができる。

α_{IJ} : $\mathcal{C}(K^J) \to \mathcal{C}(K^I)$ という写像で次式により定義。

$$(\alpha_{IJ} f)(x_I) = f(x_J) \qquad (x_{I \setminus J} \text{ によらぬ。})$$

α^*_{JI} : α_{IJ} の共軛写像： $(\alpha^*_{JI}\mu, f) = (\mu, \alpha_{IJ} f)$ i.e.

$$(\alpha^*_{JI}\mu)(x_J) = \int dx_{I \setminus J}\mu(x_I)$$

2.3. ギッブスのアンサンブル

$(a,b]$: 区間 $\{i \in \mathbf{Z} \; ; \; a < i \leqq b\}$

$\gamma_{ab} \in \mathcal{M}(K^{(a,b]})$: $\gamma_{ab}(x) = e^{-U_\Phi(S_{(a,b]}(x))}$ （ギッブス測度）

$U_\Phi(S_{(a,b]}(x))$ は区間 $(a,b]$ 内にいる粒子の全相互作用エネルギー。ただし温度のパラメターは $\Phi(I) = \beta\Phi_0(I)$ のように Φ に入れて考える。また化学ポテンシャルは一体ポテンシャルとして $\Phi(\{i\}) = \beta\mu$ のように入れておく。β や μ をいろいろ変えるとポテンシャル Φ としては $\mathcal{B}$ の中の二次元部分空間を考えることになる。

$$Z_{b-a} \equiv \int_{(a,b]} \gamma_{ab}(x)dx \qquad \text{（状態和）}$$

$$\bar{\gamma}_{ab}(x) \equiv Z^{-1}_{b-a}\gamma_{ab} \qquad \text{（規格化されたギッブス測度）}$$

無限系 $(a-b \to \infty)$ でのギッブス平衡状態の存在を保証する次の定理が

成立する。

定理 1. $\Phi \in \mathcal{B}$ と仮定する。

(1) $P(\Phi) = \lim_{b-a\to\infty} (b-a)^{-1} \log Z_{b-a}$ が存在して、Φの関数として凸かつ $\mathcal{B}$ 上連続である。($P(\Phi)$ は系の圧力。)

(2) "殆どすべて" の Φ に対して、(定理4のあと参照)すべての有限な $I \subset \mathbf{Z}$ につき

$$\lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} \alpha^{*}_{I,(a,b]} \overline{\gamma}_{ab} = \rho^{\Phi}_{I} \in \mathcal{M}(K^{I})$$

が存在する。またこの ρ^{Φ}_{I} に対し、$\mathfrak{A}$ の状態 $\rho^{\Phi} \in \mathcal{M}(K^{\mathbf{Z}})$ が存在して

$$\rho^{\Phi}_{I} = \alpha^{*}_{I\mathbf{Z}} \rho^{\Phi}$$

すなわち、$f \in \mathcal{C}(K^{I})$ なら、物理量 $f(x)$ (もつと正確には $\alpha_{\mathbf{Z}I} f$) のギッブス状態 ρ^{Φ} における期待値は

$$(\rho^{\Phi},\ \alpha_{\mathbf{Z}I} f) = \lim\ (\overline{\gamma}_{ab}\ ,\ \alpha_{(a,b]I} f\ )$$

のように極限式で与えられる。

註 この定理は一次元格子に限らず、$\mathbf{Z}$を $\mathbf{Z}^{\nu}$ (ν 次元格子)でおきかえても成立する。

特に一次元格子特有の事情として

定理 2. $\Phi \in \mathcal{B}$ が次の条件をみたすものとする。

$$\sum_{I \ni 0, I \geqq 0,} d(I)|\Phi(I)| < \infty$$

ただし $I = \{j_1 \cdots j_n\}$ のとき $I \geqq 0$ はすべての j_k が $\geqq 0$ を意味し、

$d(I) \equiv \max_{k,\ell}|j_k - j_\ell|$ （今の場合 $d(I) = \max j_k$ ）。

(1) $P(\Phi)$ が有限で、上記条件をみたす Φ の有限次元部分空間で Φ につき連続微分可能。

(2) ρ_I^Φ および ρ^Φ が常に存在して、上記条件をみたす Φ の有限次元部分空間で Φ につき連続。ただし測度の位相としては弱＊位相をとる。

具体的には (ρ, f) が任意の f に対し、 μ , β の連続関数である。これはこの系で相転移が起らないことを意味し、一次元格子でポテンシャルの遠方および多体でのふるまいに上記の制限をつけたという特殊事情による結果と考えられる。

2.4. エントロピー、変分原理、エルゴード性

$\mu \in \mathcal{M}(K^{\mathbf{Z}})$ について、そのエントロピーを次のように定義する。

$$S_I(\mu) \equiv -\int_I dx\mu(x) \log \mu(x) \leqq V(I) \log 2$$

性質：正： $S_I(\mu) \geqq 0$

単調： $I \supset J \Rightarrow S_I(\mu) \geqq S_J(\mu)$

強劣加法的： $S(I_1 \cup I_2) - S(I_1) - S(I_2) + S(I_1 \cap I_2) \leqq 0$

$S(\mu) \equiv \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} (b-a)^{-1} S_{(a,b]}(\mu)$ （平均エントロピー）

〔もっと一般には $\lim_{I\to\infty} V(I)^{-1} S_I(\mu)$ で定義する。ただし、任意の $a > 0$ $a \in \mathbf{Z}$ に対し、$(na, (n+1)a] \subset I$ のようなｎの数を $n_a^+(I)$,

$(na, (n+1)a] \cap I$ が空でないnの数を $n_a^-(I)$ とおき、任意のaに対し $\lim_I n_a^+(I)/n_a^-(I) = 1$ をみたすIの列は $I \to \infty$ であると定義する。]

今考えている系の運動群として平行移動 $i \in \mathbf{Z} \to i+\ell \in \mathbf{Z}$ を考え、対応する $\mathfrak{A}$ や $\mathcal{Y}$ の自己同型を次のように書く。

$$x \in K^I \to T^\ell x \in K^{I+\ell} \ : \ (T^\ell x)_j = x_{j-\ell}$$

$$f \in \mathcal{C}(K^I) \to T^\ell f \in \mathcal{C}(K^{I+\ell}) \ : \ (T^\ell f)(x) = f(T^{-\ell}x)$$

$$\mu \in \mathcal{M}(K^I) \to T^\ell \mu \in \mathcal{M}(K^{I+\ell}) \ : \ (T^\ell \mu)(x) = \mu(T^{-\ell}x)$$

ただし $\ell \in \mathbf{Z}$ 。このとき $(\mu, T^\ell f) = (T^{-\ell}\mu, f)$ 。

状態μが $T^\ell \mu = \mu$ を任意のℓについてみたすときT不変であるという。

定理3. 状態 $\rho \in \mathcal{Y}$ がT不変のとき平均エントロピー $S(\rho) \in [0, \log 2]$ が存在し、ρの関数として affine かつ上半連続である。

$K^{\mathbf{Z}}$ のコンパクト集合で生成されるσ代数をBと書くと、$K^{\mathbf{Z}}$, B, ρ, T の組は、いわゆる dynamical systemで、平均エントロピーはコルモゴロフ・シナイの不変量と一致する。

状態 $\rho \in \mathcal{Y}$, ポテンシャル $\Phi \in \mathcal{B}$ が与えられたとき、ρにおける平均エネルギーは

$$E_\Phi(\rho) = (\rho, A_\Phi)$$

$$A_\Phi(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } x_0 = 0 \\ \sum_{I \ni 0, I \subset S(x)} \Phi(I)/V(I) & \text{if } x_0 = 1 \end{cases}$$

今、 T不変な状態の全体を γ_0 と書くと、変分原理は

定理 4.

$$P(\Phi) = \sup_{\rho \in \gamma_0} (S(\rho) - E_\Phi(\rho))$$

定理１で殆どすべてのΦについてという句は、 P(Φ) のグラフがΦで一意的な接平面をもつようなΦ∈$\mathcal{B}$ についてという形で定理が成立する。このようなΦの集合をDとすると、それは $\mathcal{B}$ の稠密開集合可附番個の共通部分を含んでいる。

定理 5. Φ∈D ならば（したがつて殆どすべての β，μで） $S(\rho)-E_\Phi(\rho)$ の最大値を与えるρが一意的に定まり、それは定理１の状態 ρ^Φ に一致する。このとき ρ^Φ は γ_0 の端点、すなわち $K^{\mathbf{Z}}$ 上のエルゴード的測度である。

Dynamical system $K^{\mathbf{Z}}$ ，ρ，T について、ρ零集合を法として考えたσ代数 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_1$ と書き、そのうち測度０および１の元：空集合と $K^{\mathbf{Z}}$ で作られる部分代数を $\mathcal{B}_0$ と書く。この系がK一系であるとは、 $\mathcal{B}_1$ の部分代数で次の三条件をみたすものが存在することを言う：

(1) $\mathcal{O} < T^{-1}\mathcal{O}$

(2) $T^{-\ell}\mathcal{O}, \ell \in \mathbf{Z}$ の全体は $\mathcal{B}_1$ を生成する。

(3) $T^{\ell}\mathcal{O}, \ell \in \mathbf{Z}$ の共通部分は $\mathcal{B}_0$ である。（long range order がない。）

定理 6. Φが定理２の条件をみたすとき、定理２の ρ^Φ に対し、K^Z, ρ^Φ ，T

はK系である。

$\mathfrak{A}$としては $X \cdot K^{\mathbf{Z} \setminus I}$ で I を $|I| > 0$ なる任意の有限集合、X を K^I の任意の部分集合としたもので生成される $\mathcal{B}_1$ の部分代数をとる。

K系に対しては例えば次のクラスター性が成立する。

$$\lim_{\ell \to \infty} \bar{\rho}(I_1 \cup T^{\ell} I_2) = \bar{\rho}(I_1)\bar{\rho}(I_2)$$

ただし、任意の有限集合 I に対し

$$\chi_I(x) \begin{cases} = 1 & \text{if} \quad I \subset S(x) \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{\rho}(I) = (\rho, \chi_I) \qquad (\text{相関関数})$$

§ 3. 量子統計力学の簡単な例

前節と同じく一次元格子系を考える。今度は $x_i = 0, 1$ に対する解釈を格子点 i にあるスピンの向きが下向き、上向きと解釈してスピン系と思つた方が慣用の記号と一致する。

3. 1. ポテンシャル

H_i : 格子点 i におけるスピン空間。2次元ヒルベルト空間。$H(I) = \bigotimes_{i \in I} H_i$ ただし I は $\mathbf{Z}$ の有限部分集合。

$\Phi(I)$: $H(I)$ 上の作用素、I に属する格子点にあるスピン間の相互作用ポテンシャル。

$U_\Phi(I) = \sum_{J \subset I} \Phi(J) \otimes 1_{I \setminus J}$: I にあるスピンの総エネルギー。ただし $1_{I \setminus J}$ は $H(I \setminus J)$ での単位作用素。$H(I)$ は自然な意味で $H(J)$ と

$H(I \setminus J)$ のテンソル積と考えられる。

$$\|\Phi\| = \sum_{J \ni 0, V(J) < \infty} \|\Phi(J)\|/V(J)$$

T_{ij} : H_i から H_j へのユニタリ写像で $T_{ij}T_{jk} = T_{ik}$, $T_{ii} = 1$ をみたすもの。

$T^{\ell}(I) = \bigotimes_{i \in I} T_{i,i+\ell}$: $\bigotimes_{i \in I} H_i$ から $\bigotimes_{i \in I} H_{i+\ell} = H(I+\ell)$ への写像。

$\mathcal{B}$: 次の二条件をみたすポテンシャル Φ が作るバーナッハ空間、ノルムは上記のもの。

1 $\Phi(I+\ell) = T^{\ell}(I)\Phi(I)T^{\ell}(I)^{-1}$ （不変性）

2 $\|\Phi\| < \infty$ （遠距離および多体での振舞に対する制限）

通常 $a \in H_0$ と $T_{i0}a \in H_i$ を同一視し、一つのヒルベルト空間 H と考える。H 上の作用素は次の四つの行列の一次結合である。H_i の作用素には右肩に (i) をつけて表わす。

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Φ の簡単な例は磁性体模型：

$$\Phi(\{i\}) = \mu\beta\sigma_0^{(i)}$$

$$\Phi(\{ij\}) = \beta J_{|i-j|}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$$

$$\Phi(I) = 0 \quad \text{if } V(I) > 2$$

$$\|\Phi\| = |\beta|\{|\mu| + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|\} < \infty$$

ただし $\sigma^{(i)}\cdot\sigma^{(j)} = \sum_{k=1}^{3}\sigma_k^{(i)}\otimes\sigma_k^{(j)}$.

3.2. 物理量と状態

$\mathcal{C}(I)$: I が有限のとき $H(I)$ 上の作用素全体の C^* 環。

α_{IJ} : $J\subset I$ のとき $A\in\mathcal{C}(J)$ に対し $\alpha_{IJ}A = A\otimes 1_{I\setminus J}\in\mathcal{C}(I)$.
この写像により、 $\mathcal{C}(J)$ を $\mathcal{C}(I)$ の部分代数と同一視できる。

$\mathcal{C}(I)$: I が無限のとき、有限な $J\uparrow I$ のときの $\mathcal{C}(J)$ の inductive limit として定義。 α_{IJ} は I,J の一方または双方が無限で $J\subset I$ のときにも自然に拡張できる。

$\mathfrak{A} = \mathcal{C}(\mathbf{Z})$ 物理量の C^* 環として採用。ハイパー型 C^* 環とよばれ、また可附番無限次元クリフォード環と同一視できる。

$\mathcal{Y}(I)$: $\mathcal{C}(I)$ の状態全体。特に I が有限ならば、 $\mu\in\gamma(I)$ は $H(I)$ 上の行列 μ で $\mu\geqq 0$, $\mathrm{tr}\mu = 1$ のものと考えることができて、 $\mu(A) = \mathrm{tr}\mu A$. $(A\in\mathcal{C}(I).)$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathbf{Z})$$

H, $H(I)$, $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{Y}(I)$ がそれぞれ前節の K , K^I, $\mathcal{C}(K^I)$, $\mathcal{M}(K^I)$ に相当している。

α^*_{JI} : $J\subset I$ のとき、 $\mu\in\mathcal{Y}(I)$ に対し、 $\alpha^*_{JI}\mu\in\mathcal{Y}(J)$ は
$\alpha^*_{JI}\mu(A) = \mu(\alpha_{IJ}A)$, $A\in\mathcal{C}(I)$ で定義する。

$\mu\in\mathcal{Y}$ は $\mu_I \equiv \alpha^*_{IZ}\,\mu$ (I は有限)で決定される。 $J\subset I$ がともに有限なら、 $\mu_J = \mathrm{tr}_{I\setminus J}\mu_I$ である。逆にこの条件をみたす規格化された正作用素 μ_I が各有限な I に対し与えられれば、 $\mu_I = \alpha^*_{IZ0}\mu$ となる $\mu\in\mathcal{Y}$ が一意的に存在する。

3.3. ギッブスのアンサンブル

$$\gamma_\Phi(I) \equiv e^{-U_\Phi(I)}$$

$$Z_\Phi(I) \equiv \mathrm{tr}_I e^{-U_\Phi(I)} \qquad (\mathrm{tr}_I\text{はH(I)でのトレース})$$

$$\bar{\gamma}_\Phi(I) \equiv Z_\Phi(I)^{-1}\gamma_\Phi(I) \in \gamma(I) \qquad (\text{規格化されたギッブス状態})$$

定理7.　$\Phi \in \mathcal{B}$ と仮定する。

(1)

$$P(\Phi) = \lim_{I\to\infty} V(I)^{-1} \log Z_\Phi(I)$$

が存在し、Φ の関数として $\mathcal{B}$ 上凸かつ連続である。

(2)　$P(\Phi)$ のグラフが一意的な接平面をもつているような $\Phi \in \mathcal{B}$ の全体をDとする。すなわち $\mathcal{B}$ の共軛空間の元 $\hat{\rho}_\Phi$ で、任意の $\Psi \in \mathcal{B}$ に対し、$P(\Phi+\Psi) \geqq P(\Phi) - (\hat{\rho}_\Phi, \Psi)$ をみたすものが唯一つあるとする。このとき

$$A_\Psi \equiv \sum_{I\ni 0, V(I)<\infty} \alpha_{\mathbf{Z}I}\Psi(I)/V(I)$$

$$\rho^\Phi(A_\Psi) \equiv (\hat{\rho}_\Phi, \Psi)$$

から線形結合により、任意の $A \in \alpha_{\mathbf{Z}I}\mathcal{C}(I)$, I : 有限に対して $\rho^\Phi(A)$ を定義すると、ρ^Φ は $\mathfrak{A}$ の状態を与え、かつ $A \in \alpha_{\mathbf{Z}I}\mathcal{C}(I)$ に対し

$$\rho^\Phi(A) = \lim_{J\to\infty} \mathrm{Tr}\bar{\gamma}_\Phi(J)\alpha_{JI}A$$

となる。

3.4. エントロピー、変分原理

状態 $\rho \in \mathcal{Y}$ についてエントロピーを次のように定義する。

$$S_I(\rho) \equiv -\mathrm{Tr}(\rho_I \log \rho_I) \;,\quad \rho_I = \alpha^*_{I\mathbf{Z}}\rho \;.$$

性質　正：　$0 \leqq S_I(\rho) \leqq V(I)\log 2$

劣加法的：　$S_{I_1 \cup I_2}(\rho) \leqq S_{I_1}(\rho)+S_{I_2}(\rho)$　　if　$\rho_1 \cap \rho_2 =$ 空

affine　性に関し：　$\alpha S_I(\rho_1)+(1-\alpha)S_I(\rho_2)$

$\leqq S(\alpha\rho_1+(1-\alpha)\rho_2)$

$\leqq \alpha S_I(\rho_1)+(1-\alpha)S_I(\rho_2)-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha)$

註　強劣加法性は予想されているが、まだ証明は与えられていない。

$$S(\rho) \equiv \lim_{a\to-\infty,\,b\to\infty}(b-a)^{-1}S_{(a,b]}(\rho) \quad （平均エントロピー）$$

$\mathcal{C}(I)$ から　$\mathcal{C}(I+\ell)$ への写像　T^ℓ は　$\mathfrak{A}$ の自己同型写像へ拡大できる。状態　$\rho \in \gamma$ が任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対し　$\rho(T^\ell A) = \rho(A)$　をみたすとき、T不変であるという。

定理8.　T不変な状態 ρ に対し　$S(\rho) \in [0,\ \log 2]$ が存在し、ρ の関数として　affine　かつ上半連続である。（ここに γ には弱*位相を入れる。）

定理9.　μ が　γ の端点上の正測度で、状態　$\rho \in \gamma$　が $\rho(A)=\int \rho'(A)d\mu(\rho')$ のように分解されれば、　$S(\rho) = \int S(\rho')d\mu(\rho')$.

T不変な状態全体を　γ_0　と書くと変分原理は

定理10.

$$P(\Phi) = \sup_{\rho\in\gamma_0}\,(S(\rho)-\rho(A_\Phi))$$

定理11.　$\Phi \in D$　なら、最大値を与える ρ は一意的に存在し、それは定理7の　ρ^Φ である。このとき ρ^Φ　は　γ_0　の端点である。

3.5. 時間的発展

物理の立場からは系の時間的発展を記述する一パラメター群が重要である。今考えている例では次の式で定義される。

$$\tau_t^{\Phi}A \equiv \lim_{a\to-\infty,\, b\to\infty} e^{itH([a,b])}Ae^{-itH(a,b])}$$

$$H(I) \equiv \alpha_{ZI}U_{\Phi}(I)$$

定理12. $\Phi \in \mathcal{B}$ でかつある整数Nより $N(I)$ が大きいときは $\Phi(I)=0$ とする。（N体以上のポテンシャルが0）このとき極限 $\tau_t^{\Phi}A$ が存在して、$\mathfrak{A}$ の自己同型を与える。各Aに対し、$\tau_t^{\Phi}A$ は $(t,\Phi)\in R\times\mathcal{B}$ から $\mathfrak{A}$ への写像として連続である。有限なIに対し、$A\in\alpha_{\mathbf{Z}I}\mathcal{C}(I)$ ならば、十分小さい t では

$$\tau_t^{\Phi}A = \sum(it)^n L_{\Phi}^n A$$

$$L_{\Phi}A \equiv [U_{\Phi},\ A] \equiv \sum_I [\alpha_{\mathbf{Z}I}\Phi(I),\ A]$$

この自己同型に関して、前項の状態 ρ^{Φ} は次の性質をもつている。

定理13. ρ^{Φ} は τ_t^{Φ} で不変で（すなわち $\rho^{\Phi}(\tau_t^{\Phi}A) = \rho^{\Phi}(A)$ ）、次のKMS境界条件をみたす。任意の A, B $\in \mathfrak{A}$ に対し、$0 \leq \mathrm{Im}\ t \leq 1$ で連続、$0 < \mathrm{Im}\ t < 1$ で正則な関数 $F_{AB}(t)$ があつて、実数 t に対し $F_{AB}(t) = \rho^{\Phi}((\tau_t^{\Phi}B)A)$, $F_{AB}(t+i) = \rho^{\Phi}(A\tau_t^{\Phi}B)$ となる。

この定理の性質をもつ状態についての一般的な定理を次節でのべる。今考えている場合にはこのような性質を持つ状態は一意的かもしれないが、この点は

明らかにされていない。

§4. 非可換エルゴード理論

4.1. 物理量

$\mathfrak{A}$:　C*環（準局所的物理量）

G :　位相群。以下 $G = R^n$ または $\mathbb{Z}^n$ として定理を述べる。一般の場合についても同様の結果が出せる。（特に柔順群の場合。）

τ:　$\mathfrak{A}$ の自己同型によるGの表現。

τ が連続であるとは $g \in G \to \tau(g)A \in \mathfrak{A}$ が各 $A \in \mathfrak{A}$ について連続なことである。

τが漸近的可換とは任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\lim_{g\to\infty} \| [\tau(g)A, B] \| = 0$$

が成立することである。

例1　前節でGとして格子点の平行移動の群 $\mathbb{Z}$ をとると、連続、漸近的可換な τ が得られる。時間的発展 τ_t^Φ については、連続であることは定理に述べたが、漸近的可換かどうかはΦにもよるであろうが、わかつていない。

一般に $\mathfrak{A}$ が $\tau(g)\mathfrak{A}_0$, $g \in G$ の全体で生成され、$\mathfrak{A}_0$ と $\tau(g)\mathfrak{A}_0$ が十分大きいgに対し可換なら $\mathfrak{A}$ は漸近的可換である。上記の例では有限な I について $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}(I)$ととればよい。

例2　2節の例でGとして格子点の平行移動の群 $\mathbb{Z}$ をとれば、τ は連続になる。$\mathfrak{A}$ が可換であるから、任意の τ は漸近的可換である。

4.2. 状　態

$\mathcal{S}$: $\mathfrak{A}$ の状態全体。

$\mathcal{S}_0$: $\mathfrak{A}$ の不変状態全体。

$\psi \in \mathcal{S}$ に対し H_ψ, π_ψ, Ω_ψ が一節で定義された。

$U_\psi(g)$: $\psi \in \mathcal{S}_0$ のとき $U_\psi(g)\pi_\psi(A)\Omega_\psi = \pi_\psi(\tau(g)A)\Omega_\psi$ により一意的に定義される G の連続ユニタリ表現。

$\chi_\alpha(g)$: $\alpha \in G^*$ に対し、指標 $e^{i(\alpha,g)}$

E_α : $U_\psi(g)$ の固有値 $\chi_\alpha(g)$ に属する固有空間への射影子。とくに、E_0 は不変ベクトル全体への射影子。

M : 群 G 上の不変平均。すなわち

$$M(F) \equiv \lim_{D\to\infty} \int_D F(g)dg \Big/ \int_D dg$$

ただし dg は不変測度で $D \to \infty$ は §2.4.のような意味。

補題

$$w - \lim M\{U_\psi(g)\chi_\alpha(g)^*\} = E_\alpha$$

4.3. エルゴード状態

定理 1 4. ($\mathfrak{A}$, G, τ) が与えられ、連続、漸近的可換とする。このとき $\psi \in \mathcal{S}_0$ に対する次の条件はたがいに同値である。

(1) ψ は $\mathcal{S}_0$ の端点

(2) $E_0 H_\psi = \{c\Omega_\psi\}$

(3) $M\{\psi(A\tau(g)B)\} = \psi(A)\psi(B)$ (弱クラスター)

(4) $M\{\tau(g)A\} = \psi(A)\mathbf{1}$ (弱収束の意味で)

(5) $M\{\psi(A_1\{\tau(g)B\}A_2)\} = \psi(A_1A_2)\psi(B)$

(6) $\pi_\psi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ と $U_\psi(g)$, $g \in G$ の全体で生成される作用素環

$\{\pi_\psi(\mathfrak{A}),\ U_\psi(G)\}''$ が既約である。

(7) $\{\pi_\psi(\mathfrak{A}),\ U_\psi(G)\}''$ の中心が単位作用素の定数倍だけ。

このような状態は前項の例2の場合、 dynamical system の意味のエルゴード性と一致する。

定理15. τ が漸近的可換で、 $\pi_\psi(\mathfrak{A})''$ の中心が単位作用素だけ（このとき ψ は $\mathfrak{A}$ のファクター状態という）なら

$$\lim_{g\to\infty}|\phi(A\tau(g)B)-\phi(A)\phi(\tau(g)B)| = 0$$

$$\text{w-}\lim_{g\to\infty}\{\pi_\psi(\tau(g)A)-\psi(\tau(g)A)\mathbf{1}\} = 0.$$

これは強クラスター性とよばれる。前項の例2の場合は、 mixing の性質といわれている。ただし前項の例2の場合、 $\mathfrak{A}$ が可換なので、この定理の条件がみたされるのは H_ψ が一次元のときだけなので利用価値がない。しかし量子統計力学の場合 ψ がファクター状態であるという条件は意味があるように思われる。そして純粋相の定義として ψ が時間的に不変なファクター状態としてとらえることができるのではないかと予想している。 $\mathfrak{A}$ が可分なら任意の状態はファクター状態の積分に一意的に分解できることが知られている。

4.4. 分解定理

定理16. $(\mathfrak{A},G,\tau)$ が与えられていて、連続、漸近的可換とする。$\mathfrak{A}$ が可分なら任意の $\psi\in\gamma_0$ は、 γ_0 上の端点全体（ γ_{0e} と書こう）の上の測度 μ で

$$\psi(A) = \int_{\gamma_{0e}}\xi(A)\,d\mu(\xi)$$

のように分解され、μ は一意的に定まる。

温度 T の状態 ρ_T に対し、任意の weight $f(T) \geqq 0$, $\int f(T)dT = 1$ で平均した $\int \rho_T(A)f(T)dT$ もまた時間的に不変な状態である。これを逆に純粋相 ρ_T に分解しようというのが上記の定理のねらいである。

定理 1 7. $(\mathfrak{A}, G, \tau)$ で $G = G_1 + T$, T は一パラメター群（時間的発展）、τ は連続で G_1 については漸近的可換とする。$\rho \in \Upsilon_0$ が T について KMS 境界条件をみたせば、ρ は G_1 について不変な状態全体の端点で、しかも T 不変かつ T について KMS 境界条件をみたす状態へ一意的に分解できる。

定理 1 8. $(\mathfrak{A}, G, \tau)$ で τ が連続、漸近的可換で、$1 \in \mathfrak{A}$ とする。G の部分群 H に対し G/H がコンパクトであるとし、μを G/H 上の G 不変測度で $\int d\mu = 1$ とする。$\psi \in \Upsilon_{0e}$ ならば H不変状態の端点 ψ_H が存在して

$$\psi(A) = \int_{G/H} \psi_H(\tau(g)A)d\mu(g)$$

ψ_H は $\tau(g)$ による変換を除いて一意的である。

定義 $\psi \in \Upsilon_{0e}$ を次のように分類する。

(1) E_I状態：どの H に対しても $\psi_H = \psi$

(2) E_{II} 状態：ある $H \neq G$ に対し $\psi_H \neq \psi$ が $(\mathfrak{A}, H, \tau)$ につき E_I 状態。このときそのような H の最大のものを H_0 とすると

$$\psi_H(A) = \int_{H/(H_0 \cap H)} \psi_{H_0}(\tau(g)A)d\mu(g)$$

(3) E_{III} 状態：上記二つの場合以外。

4. 5. スペクトル

定理１９.　($\mathfrak{A}$, G, τ)　で　τ が連続、漸近的可換とし、$\psi \in \mathcal{V}_{0e}$ とする。このとき $\dim E_\alpha H \leqq 1$ で、＝が成立する α の全体は G^* の部分群 G_0^* を作る。この部分群が、(1) 0だけ、(2) G^* で集積点をもたず、0 以外の元を含む、(3) G^*で集積点をもつ、に従つて ψ は E_I, E_{II}, E_{III} 状態である。(2)の場合、$H_0 = (G_0^*)^\perp$ で、$E_\alpha H$ のベクトルで作つた状態 ψ_α は

$$\psi_\alpha(A) = \int_{G/H} \psi_H(\tau(g)A)\chi_\alpha(g)d\mu(g)$$

のように与えられる。

E_I 状態は前の例２では weakly mixing という概念と一致する。結晶状態をある格子点の位置につき単位格子分だけ平均すると、空間の平行移動に関し不変な状態になるが、これが E_{II} 状態に相当し、上記の分解を行うことにより純粋相である結晶状態が得られることになる。前節で述べたような変分原理や、あるいは $v \to \infty$ の極限として得られた状態 ρ^Φ はいろいろの対称性（空間移動、全スピンの廻転等について Φ が不変な場合）について常に不変であるが、場合によつては上記のように不変でない状態に分解される。このとき broken symmetry ということばを使う。結晶、強磁性のような場合がそれにあたる。これに反し、気体に対しては ρ^Φ が E_I 状態であると期待される。

定理２０.　($\mathfrak{A}$, G, τ)　で　$G = G_1 \dotplus T$, T が一パラメタ群、τ は連続で G_1 について漸近的可換とする。ψ が G_1 不変状態の端点で、T 不変かつ T について KMS 境界条件をみたすものとする。G_1, T の H_ψ でのユニタリ表現（§ 4.2）を U_ψ, V_ψ とし、そのスペクトル射影子の台を $S(G_1)$, $S(T)$ とする。そのとき $S(G_1)$, $S(T)$ ともに群をなし、$S(G_1)$ の離散部分も群をなし、$S(G_1)$ の離散部分の多重度は１で、対応する固有空間は V_ψ で不変である。

文　献

Lecture Note　としては

H. ARAKI, C* algebra approach in quantum statisitcal mechanics,
Univ. of Maryland Technical Report No. 728 (1967).

C* 環的方法の物理における最初の論文は

R. Haag and D. Kastler, J. Math. Phys. 5 (1964), 848-861.

§ 2の内容については

G. Gallavotti and S. Miracle-Sole, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 317-323.

D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 324-329.

D. Robinson and D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 288-300.

D. Ruelle, Statistical Mechanics of a One-Dimensional Lattice gas

これに関係したものとしては気体の古典統計力学に関して

D. Ruelle, The State of classical statistical mechanics.

D. Ruelle, J. Math. Phys. 6 (1965), 201-220.

§ 3の内容については

O. E. Lanford III and D. W. Robinson, Mean Entropy of States in Quantum Statistical Mechanics.

D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 151-160.

D. W. Robinson, Statistical Mechanics of Quantum Spin Systems II.

関係したものとしては

D. Ruelle, Cargèse Lecture Notes (1965),

R. G. Streater, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 233-247.

J. Ginibre, J. M. P. 6 (1965), 238-262.

自由ガスの場合については

H. Araki and E. J. Woods, J. M. P. 4 (1963), 637-662.

H. Araki and W. Wyss, Helv. Phys. Acta 37 (1964), 136-159.

§4の内容については

S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 1-28.

D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 133-150.

D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 151-180.

D. Ruelle and D. W. Robinson, Ann. Inst. H. Poincaré,

O. E. Lanford and D. Ruelle, J. M. P. 8 (1967), 1460-1463.

E. Stφrmer, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.

S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 101-120.

S. Doplicher and D. Kastler, Commun. Math. Phys. 7 (1968), 1-20.

D. Ruelle, Almost periodic states on C*-algebras.

これに関連したものとして

E. Stφrmer, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 194-204.

R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink, Commun. Math. Phys.

N. M. Hugenholtz, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 189-193.

作用素環については

竹崎正道、数学 18 (1967), 208-215.

J. Diximer, "Les Algèbres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien", (Paris, 1957); "C* Algebres et burs Applications" (Paris, 1964)

M. A. Naimark, "Normed Rings" (英訳, Groningen, 1959)

C. E. Rickart, "General Theory of Banach Algebras" (Von Nostrand, 1960).