数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 24-33

対称な Brownian resolvent に関する注意

阪大理 渡辺毅

従来，Markov 過程の resolvent $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ は，有界可測関数の族 $\mathcal{B}$ あるいは有界連続関数の族 $\mathcal{C}$ の上の作用素として捉えられ，2 (p) 乗積分可能な関数の族 L^2 (L^p) 上の作用素と考えて議論されることは少なかった。しかし具体的に与えられた微分（あるいは微積分）作用素を生成作用素にもつような resolvent の構成やその性質を論じる際に，G_α に対する L^2-theory の有効性が最近福島氏などの研究によって明らかにされつつある（[3], [4], [1]）。これは一口に言うと，楕円型偏微分方程式における関数解析的方法を，「必要な modification」の下で確率論に結びつけるものである。ここでは，L^p-theory が有効であるような1つの例を示す。

1. 定理

E は n 次元ユークリッド空間 R^n の領域である。
Δ はラプラシアン, $A=\frac{1}{2}\Delta$ とする。

$\{G_\alpha(x,dy),\ \alpha>0\}$ がつぎの条件を満足するとき *resolvent* であるという。

(i) E の各点 x に対し, $G_\alpha(x,\cdot)$ は E 上のボレル測度で, $\alpha G_\alpha(x,E)\leqq 1$ をみたす。

(ii) E の各ボレル集合 B に対し, $G_\alpha(\cdot,B)$ は E 上のボレル可測関数である。

(iii) レゾルベント方程式をみたす:

$$G_\alpha(x,B)-G_\beta(x,B)+(\alpha-\beta)\int_E G_\alpha(x,dy)\,G_\beta(y,B)=0.$$

E 上の関数で無限回連続微分可能な関数（C^∞-関数）の全体を $\mathcal{C}^\infty$, その中でコンパクトな台の関数全体を $\mathcal{C}_0^\infty$ で表わす。

任意の $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ に対し, $u=G_\alpha f=\int_E G_\alpha(\cdot,dy)f(y)$ が, 方程式

(1) $$(\alpha-A)u=f$$

の解であるとき，$\{G_\alpha(x, dy),\ \alpha>0\}$ を Brownian resolvent と呼ぶ．

E 上の測度 μ が $\{G_\alpha, \alpha>0\}$ に関して excessive であるとしよう；$\mu(B) \geqq \alpha\,\mu G_\alpha(B) = \alpha\int_E \mu(dx) G_\alpha(x, B)$．$\mu$ に関して p 乗積分可能な関数の全体を $L^p(\mu)$ で表わす．この時，$f \longrightarrow G_\alpha f$ は $L^p(\mu)$ からそれ自身への作用素で，$\|\alpha G_\alpha\|_{L^p,\mu} \leqq 1$ をみたす．
実際，Hölder の不等式によって

$$
\begin{aligned}
|\alpha G_\alpha f| &\leqq (\alpha G_\alpha |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\alpha G_\alpha 1)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqq (\alpha G_\alpha |f|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\|\alpha G_\alpha f\|^p_{L^p,\mu} &= \int_E |\alpha G_\alpha f|^p d\mu \\
&\leqq \int_E \alpha G_\alpha |f|^p(x)\, d\mu(x) = \int_E |f|^p(y)\, \mu\alpha G_\alpha(dy) \\
&\leqq \int_E |f|^p(y)\, \mu(dy) = \|f\|^p_{L^p,\mu}.
\end{aligned}
$$

μ に関する内積 $\int_E f g\, d\mu$ を $(f, g)_\mu$ で表わす．
任意の可測な正の関数 f, g に対し

$$
(2) \qquad (G_\alpha f, g)_\mu = (f, G_\alpha g)_\mu
$$

をみたすとき，$\{G_\alpha, \alpha>0\}$ を $\underline{\mu\text{-symmetric}}$ な resolvent であるという。このとき，μ は $\{G_\alpha, \alpha>0\}$ に関して excessive である．実際，$f\geqq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\int_E f(y)\,\alpha\mu G_\alpha(dy) &= \int_E \alpha G_\alpha f(x)\,\mu(dx) \\
&= (\alpha G_\alpha f, 1)_\mu \\
&= (f, \alpha G_\alpha 1)_\mu \\
&\leqq (f, 1)_\mu = \int_E f(y)\,\mu(dy).
\end{aligned}
$$

__定理 1.__ $\{G_\alpha(x,dy), \alpha>0\}$ を Brownian resolvent, $\mathcal{B}$ を E 上の有界可測関数の全体，$\mathcal{C}^1$ を連続な偏導関数をもつ E 上の関数全体とする。この時，任意の $f\in\mathcal{B}$ に対し $G_\alpha f\in\mathcal{C}^1\cap\mathcal{B}$ である．

__定理 2.__ (μ は空でないすべての開集合に対し正の値を取る測度とする.) $\{G_\alpha(x,dy), \alpha>0\}$ を μ-symmetric な Brownian resolvent とする。この時，つぎのような関数の系 $\{g_\alpha(x,y), \alpha>0\}$ が唯1つ存在する．

(i) $\qquad G_\alpha(x,dy) = g_\alpha(x,y)\,\mu(dy)$

(ii) $g_\alpha(x,y)$ は x, y に関して対称で，2変数 (x,y) の関数として可測，かつ一方を固定したとき残りの変数に関して下に半連続である．

(iii) yを固定したとき，$g_\alpha(x,y)$はxの関数として，$\{G_\alpha, \alpha>0\}$に関してα-excessiveである：

$$\beta G_{\alpha+\beta}\, g_\alpha(x,y) \uparrow g_\alpha(x,y), \quad \beta \to \infty.$$

定理1は方程式(1)に対するL^p-theoryの結果から容易に導びかれる。定理2は定理1と[2, p496, Theorem 1]から証明される．これらの性質は，E上のルベック測度に関して対称なBrownian resolventのより深い解析のために必要な基本的性質である．

2. 証明

つぎの記号を用いる．

$L^p = \{ f ; f$はE上の関数で$\int_E |f|^p dx < \infty \}$,

$L^p_{loc} = \{ f ;$ 任意の $a \in C_0^\infty$ に対し，$af \in L^p \}$,

$k = (k_1, \cdots, k_n)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$ で

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \cdots\cdots \partial x_n^{k_n}} f, \quad \left(\begin{array}{l}\text{微分は超関数}\\ \text{の意味に取る}\end{array}\right)$$

$$\mathcal{E}^m_{L^p} = \{ f ; D^k f \in L^p, \ |k| \leqq m \},$$

$$\| f \|_{p,m} = \sum_{|k| \leqq m} \| D^k f \|_{L^p},$$

$$\mathcal{E}^m_{L^p(loc)} = \{ f ; \text{任意の } a \in C_0^\infty \text{ に対し}, af \in \mathcal{E}^m_{L^p} \}.$$

方程式(1)を超関数の意味で考えたものを

$$(3) \qquad (\alpha - A)u = f \quad \text{in } (\mathcal{D}')$$

と表わす．方程式(3)については，つぎの結果が知られている．

<u>補題 1.</u> u が(3)の解で，かつ $u \in L^p_{loc}$ であるとする．その時，$f \longrightarrow u$ は $\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ から $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ への連続な対応を与える．厳密に言うと，$\mathcal{E}^m_{L^p(loc)}$ の関数列 f_j に対し L^p_{loc} に属する解 u_j が与えられているとする．その時，$u_j \in \mathcal{E}^{m+2}_{L^p(loc)}$ であり，さらに任意の $a \in \mathcal{C}^\infty_0$ に対し af_j が $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の中で 0 に収束すれば，au_j は $\mathcal{E}^{m+2}_{L^p}$ の中で 0 に収束する．

つぎの結果は L^p に対する Sobolev の補題である．

<u>補題 2.</u> $\mathcal{E}^m_{L^p}$ の定義で，特に $E = R^n$ としたものを $\mathcal{E}^m_{L^p}(R^n)$ で表わす．R^n 上の関数で，すべての $|k| \leqq m$ に対し $D^k f$ が有界連続であるものの全体を $\mathcal{C}^m_b(R^n)$，そこでのノルムを $|f|_m = \sum_{|k| \leqq m} \sup |D^k f|$ とする．その時，

$$(4) \qquad \mathcal{E}^{[\frac{n}{p}]+1+l}_{L^p}(R^n) \subset \mathcal{C}^l_b(R^n).$$

厳密に言うと，(4)の左辺に属する任意の f に対し，

それと殆んどいたる所で一致する関数 $\tilde{f}$ が存在して

$$|\tilde{f}|_{\ell} \leqq C \times \|f\|_{p,[\frac{n}{p}]+1+\ell}$$

である.

<u>定理1の証明</u>

$f\in\mathcal{B}$ ならば $u=G_\alpha f\in\mathcal{B}$ であるから, $L^p_{loc}=\mathcal{E}^0_{L^p(loc)}$ に属する. さらに $G_\alpha f$ は(3)の解である. 実際 $u=G_\alpha f$ が(3)の解であるような $f\in\mathcal{B}$ の全体は単調族をなし, 特に $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ ならば仮定によって $u=G_\alpha f$ は(3)をみたすからである. したがって補題1により, $G_\alpha f\in\mathcal{E}^2_{L^p(loc)}$ である.

$p>n$ なる p を取ると, $[\frac{n}{p}]=0$ だから補題2により $\mathcal{E}^2_{L^p}(R^n)\subset\mathcal{C}^1_b(R^n)$. したがって, 任意の $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ にたいし, $a\cdot G_\alpha f$ と a.e. で一致する連続関数が存在する. $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ は任意だから, $G_\alpha f$ と a.e. で一致する連続関数が存在する. これを $\widetilde{G_\alpha f}$ で表わす.

$0\leqq f_j\in\mathcal{B}$ が各点で 0 に減少するとしよう. 任意の $a\in\mathcal{C}_0^\infty$ に対し af_j は $L^p=\mathcal{E}^0_{L^p}$ の中で 0 に収束するから, 補題1により $aG_\alpha f_j\longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}^2_{L^p}$ である. したがって補題2により $a\widetilde{G_\alpha f_j}\longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^1_b(R^n)$ である. 特に E の各点 x に対し

$$\widetilde{G_\alpha f_j}(x) \longrightarrow 0, \qquad j \to \infty.$$

xを固定したとき, $\widetilde{G_\alpha f}(x)$ は $\mathcal{B}$ 上の正の汎関数だから,

$$\widetilde{G_\alpha f}(x) = \int_E f(y)\,\widetilde{G}_\alpha(x,dy), \qquad f \in \mathcal{B}$$

をみたす測度 $\widetilde{G}_\alpha(x,dy)$ が唯1つ存在する. 特に $f \in C_0^\infty$ のときは $G_\alpha f$ 自身が連続だから, Eのすべての点xで $G_\alpha f(x) = \widetilde{G_\alpha f}(x)$. 故に $G_\alpha(x,dy) = \widetilde{G}_\alpha(x,dy)$ である. これで, 任意の $a \in C_0^\infty$ に対し, $a\,G_\alpha f \in C_b^1(R^n)$ であること, すなわち $G_\alpha f \in \mathcal{B} \cap C^1$ が示された.

定理2の証明

[2]の用語と結果を用いる. 条件(2)は $\{G_\alpha, \alpha>0\}$ がそれ自身の1つのco-resolventであることを示している. $1 \ge f \ge 0$ が μ-a.e. で 0 であるとする. そのとき

$$(G_\alpha f, 1)_\mu = (f, G_\alpha 1)_\mu = 0$$

であるから, $G_\alpha f$ は μ-a.e. で 0 である. 定理1により $G_\alpha f$ は連続だから, μ に関する仮定から $G_\alpha f$ は恒等的に 0 である. したがって, 各 $x \in E$ に対し, 測度 $G_\alpha(x,dy)$ は μ に関して絶対連続である.

故に [2; p496, Theorem 1] によって, 定理2の

(i), (iii) および (iv) $G_\alpha(y, dx) = g_\alpha(x, y)\mu(dx)$, (v) xを固定したとき, $g_\alpha(x, y)$ は yの関数としもα-excessive である, という性質をもつ (x, y)-可測な核 $g_\alpha(x, y)$ が唯1つ存在する. (i), (iv) により, yを固定したとき, $f(x) = g_\alpha(x, y)$ と $g(x) = g_\alpha(y, x)$ は μ-a.e. でひとしく, (iii), (v) により共に α-excessive である. したがって

$$\beta G_{\alpha+\beta} f(x) = \beta \int_E f(y) g_{\alpha+\beta}(x, y)\mu(dy)$$

$$= \beta \int_E g(y) g_{\alpha+\beta}(x, y)\mu(dy) = \beta G_{\alpha+\beta} g(x).$$

$\beta \to \infty$ の時, 左辺は $f(x)$ に右辺は $g(x)$ に増加するから, $f(x) = g(x)$ がすべての $x \in E$ で成り立つ. 故に $g_\alpha(x, y)$ の対称性が証明された.

$\mathcal{B} \ni f$ ならば $G_\alpha f$ は連続であるから, 任意の可測な非負関数 f に対し, $G_\alpha f$ は下に半連続である. したがって f が α-excessive なら, それは下半連続な関数列 $\alpha G_{\alpha+\beta} f$ の単調増加な極限であるから矢張り下に半連続である. これで定理2が証明された.

注意

定理1の証明からつぎのことも分る. f_β が 0に有

界収束するならば，$G_\alpha f_j$，$D^1 G_\alpha f_j$ はすべてのコンパクト集合の上で一様に0に近づく．

文献

[1] 国田寛；Banach束におけるsubmarkov半群について，本報告集

[2] H. Kunita and T. Watanabe, Markov processes and Martin boundaries, Part I, Illinois J. Math. 9(1965), 485—526

[3] M. Fukushima, On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] T. Shiga and T. Watanabe, On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion, Osaka J. Math. 5(1968), 1—31.