数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 34-48

Canonical Dirichlet space と推移確率の絶対連続性

東京教育大　福島正俊

§1. Canonical Dirichlet space と hitting probability

X を局所 compact, Hausdorff 可分な空間とする。$C(X)$ は X 上の連続関数のうち無限遠で 0 となるものの全体を表わすものとする。

<u>定義 1</u>　(Ray resolvent)

$C(X)$ を $C(X)$ に移す sub-Markov resolvent $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ が Ray resolvent であるとは $C^+(X)$ の可算部分族 C_1 が存在し，C_1 は X の点を分離し $\forall x \in X$, $\exists u \in C_1$, $u(x) \neq 0$, 又 $\alpha G_{\alpha+1} u \leqq u$, $\forall u \in C_1$, $\forall \alpha > 0$.

<u>定義 2</u>　(canonical Dirichlet space)

$(m, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ が canonical Dirichlet space であるとは,

(i) m は X 上 everywhere dense な Radon 測度

(ii) $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ は $L^2(X) = L^2(X; m)$ に関する Dirichlet space (c.f [1, §1])

(iii) $\exists \{G_\alpha, \alpha > 0\}$: Ray resolvent on $C(X)$ such that $\forall u \in L^2(X) \cap C(X), \forall \alpha > 0$,

(1.2) $\mathcal{E}^\alpha(G_\alpha u, v) = (u, v)_X$, $\forall v \in \mathcal{F}$

(1.3) $C_1 \subset \mathcal{F}$,

ただし C_1 は $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ によって定義1の条件を満たす関数族である。

<u>注意 1</u>

(1) Canonical Dirichlet space は次の性質をもつ。

(iii)' $\mathcal{F} \cap C(X)$ は $C(X)$ 内で一様 norm の意味で dense.

(2) (i) (ii) (iii) を満す $(m, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ を正則 (regular) な Dirichlet space という。
上の注意よりわかるように canonical Dirichlet space は regular である。

<u>定義3</u> (平衡 potential, capacity, polar set)

$(m, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ を regular Dirichlet space とする。

(i) $X \supset E$ が open set で $\bar{E}$ は compact とする。

$\mathcal{G}_E = \{u \in \mathcal{F}\ ;\ u \geqq 1\ \ m\text{-a.e on } E\}$

とおく。 $\mathcal{G}_E$ の中で $\mathcal{E}^\alpha(u, u)$ を最小にする一意元 $p_E^\alpha \in \mathcal{F}$ が存在するが (c.f [1, §1.1]) これを E の平衡 potential という。

$$(1.4)\qquad \mathrm{Cap}(E) = \mathcal{E}^\alpha(p_E^\alpha, p_E^\alpha)$$

を E の (α-) capacity と呼ぶ。

(ii) outer capacity 0 の集合を polar set と呼ぶ (これは $\alpha > 0$ に依存しない)。

<u>補題1</u>. regular Dirichlet space に於て

(i) $u \in \mathcal{F} \cap C(X)$ ならば, $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathrm{Cap}\{x\ ;\ |u(x)| > \varepsilon\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{E}^\alpha(u, u),$$

(ii) E open $\bar{E}$ compact とするとき

$$\int_X p_E^\alpha(x)\, m(dx) \leqq \frac{1}{\alpha}\sqrt{\mathrm{Cap}(E)}$$

<u>証明</u>. (ii) 任意の compactum K に対し

$$\int_K p_E^\alpha(x) m(dx) \leqq \sqrt{\mathcal{E}^\alpha(G_\alpha\chi_K, G_\alpha\chi_K)}\sqrt{\mathcal{E}^\alpha(p_E^\alpha, p_E^\alpha)}$$

$\leq \frac{1}{\alpha}\sqrt{Cap(E)}$ ただし G_α は $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に対応する $L^2(X)$-resolvent.

さて canonical Dirichlet space $\{X, m, \mathcal{F}, \mathcal{E}\}$ が与えられたとする。対応する Ray resolvent を $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ とする。これに対応する X 上の強 Markov 過程 (c.f [1, §5]) を $\underset{\sim}{X} = (X_t, P_x, x \in X)$ とおく。

$$(1.3) \quad X_b = \{x \in X \,;\, \lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f(x) \neq f(x),\ {}^{\exists} f \in C(X)\}$$

を branching set と呼ぶ。

<u>補題 2.</u>

branching set は polar である。

<u>証明</u> Ray の criterion によれば

$$X_b = \bigcup_{f\in\widetilde{C}_1} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\alpha>0} \{f(x) - \alpha G_{\alpha+1} f(x) > \tfrac{1}{n}\},$$

但し $\widetilde{C}_1 = \{f \wedge c \,;\, f \in C_1,\ c > 0 \text{ 有理数}\}$.

$E_{\alpha,n}^{f} = \{x : f(x) - \alpha G_{\alpha+1} f(x) > \frac{1}{n}\}$ は開集合で α と共に単調減少である。

一方 $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ であり $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ は可分距離空間だから (c.f [1, §9]), $\widetilde{\mathcal{C}_1} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$. そこで補題 1 (i) と [1] の §1 より

$$Cap(E_\alpha, \tfrac{f}{n}) \leqq n^2 \mathcal{E}^\alpha(f - \alpha G_{\alpha+1} f, f - \alpha G_{\alpha+1} f) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 0.$$

$\widetilde{C_1}$ は可算集合だから $\widetilde{C_1} = \{f_1, f_2, \cdots, f_k, \cdots\}$ とし, $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\Sigma \varepsilon_k < \varepsilon$,
各 f_k と n につき $\exists \alpha_n^k$, $Cap(E_{\alpha_n^k, n}^{f_k}) < \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}}$. $X_b \subset \bigcup_k \bigcup_n E_{\alpha_n^k, n}^{f_k}$

だから $Cap(X_b) < \varepsilon$. q.e.d.

$X \supset E$ を closure が compact であるような open set とする.

$$\sigma_E = \inf\{t > 0, X_t \in E\},$$

$$G_\alpha^0 f(x) = E_x\left(\int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha t} f(X_t)\, dt\right),$$

$$H_\alpha^E v(x) = E_x(e^{-\alpha \sigma_E} v(X_{\sigma_E}))$$

とおく.

<u>補題 3</u>　以後 $C(X)$ を $\mathcal{C}$ と書くことにする．

(i) $(G_\alpha^0 f, g)_X = (f, G_\alpha^0 g)_X$，$\forall f, g \in L^2 \cap \mathcal{C}$

(ii) $G_\alpha f = G_\alpha^0 f + H_\alpha^E (G_\alpha f)$，$\forall f \in \mathcal{C}$，

(iii) $H_\alpha^E v - H_\beta^E v + (\alpha - \beta) G_\alpha^0 H_\beta^E v = 0$

$\forall v \in \mathcal{C}$．

<u>定理 1</u>　$(\mathcal{F}, \mathcal{E}^\alpha)$ の直和分解

(i) $G_\alpha^0(\mathcal{C} \cap L^2) \subset \mathcal{F}$ かつ

$u = G_\alpha^0 f$，$f \in \mathcal{C} \cap L^2$ に対し

$\mathcal{E}^\alpha(u, u) = (u, f)_X < +\infty$．

(ii) $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^\alpha)$ は次のように直和分解される．

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\alpha^E$$

ただし　$\mathcal{F}^{(0)} = \overline{G_\alpha^0(\mathcal{C} \cap L^2)}$

$\mathcal{H}_\alpha^E = \overline{H_\alpha^E G_\alpha(\mathcal{C} \cap L^2)}$．

<u>証明</u>

(i) $u = G_\alpha^0 f$，$f \in \mathcal{C}$ とする．

$\mathcal{E}_\beta^\alpha(u, u) = \beta(u - \beta G_{\beta+\alpha} u, u)_X$

$= \beta(u - \beta G_{\beta+\alpha}^0 u, u)_X - \beta^2 (H_{\beta+\alpha}^E G_{\beta+\alpha} u, u)_X$

$= I_\beta - II_\beta$．

$$I_\beta = \beta(G^0_{\beta+\alpha} f,\ G^0_\alpha f)_X = (G^0_\alpha f - G^0_{\beta+\alpha} f,\ f)_X$$

$$\xrightarrow[\beta\to\infty]{} (u,\ f)_X < +\infty .$$

$$\mathrm{II}_\beta = \beta^2 (H^E_{\beta+\alpha} G_{\beta+\alpha} u,\ u)_X$$

$$= \beta(\beta G^0_\alpha H^E_{\beta+\alpha} G_{\beta+\alpha} u,\ f)_X = \beta(H^E_\alpha G_{\beta+\alpha} u,\ f)_X$$

$$- \beta(H^E_{\beta+\alpha} G_{\beta+\alpha} u,\ f)_X .$$

一方 $\tilde{u} = G_\alpha f$ とおくと

$$\beta H^E_\alpha G_{\beta+\alpha} u(x) = \beta H^E_\alpha G_{\beta+\alpha} \tilde{u}(x) - \beta H^E_\alpha G_{\beta+\alpha} H^E_\alpha \tilde{u}(x)$$

$$\xrightarrow[\beta\to\infty]{} H^E_\alpha \tilde{u}(x) - H^E_\alpha H^E_\alpha \tilde{u}(x)$$

ところが E は open だから $\forall \varepsilon > 0,\ \sigma < {}^\exists t < \sigma + \varepsilon,$

$X_t \in E$, したがって $\sigma(\omega^+_\sigma) = 0$, したがって

$H^E_\alpha H^E_\alpha \tilde{u} = H^E_\alpha \tilde{u}$. 又 $|\beta H^E_\alpha G_{\beta+\alpha} u| \leq |u|$

だから $\lim_{\beta\to\infty} \mathrm{II}_\beta = 0$.

故に $u = G^0_\alpha f \in \mathcal{F}$ で $\mathcal{E}^\alpha(u, u) = (u, f)_X$.

(iii) $f,\ g \in C \cap L^2$

$$\mathcal{E}^\alpha(G^0_\alpha f,\ H^E_\alpha G_\alpha g) = \mathcal{E}^\alpha(G^0_\alpha f,\ G_\alpha g)$$

$$- \mathcal{E}^\alpha(G^0_\alpha f,\ G^0_\alpha g) = (G^0_\alpha f,\ g)_X - (G^0_\alpha f,\ g)_X = 0 .$$

<u>定理 2</u>　　$v \in \mathcal{F} \cap C$ ならば

$$P_{\mathcal{H}_\alpha^E} v(x) = H_\alpha^E v(x) \quad , \quad m\text{-a.e.}$$

ただし $P_{\mathcal{H}_\alpha^E}$ は $\mathcal{H}_\alpha^E$ への projection を表わす.

<u>証明</u>　$v \in \mathcal{F}$ だから [1] §1 より

$\beta G_\beta v \xrightarrow[\beta \to \infty]{} v$ in $\mathcal{F}$, したがって

$P_{\mathcal{H}_\alpha^E}(\beta G_\beta v) \longrightarrow P_{\mathcal{H}_\alpha^E} v$ in $\mathcal{F}$, この収束は部分列を選んで m-a.e. とできる。一方,

$$P_{\mathcal{H}_\alpha^E}(\beta G_\beta v) = H_\alpha^E(\beta G_\beta v)$$

$$= E_x(e^{-\alpha\sigma_E} \beta G_\beta v(X_{\sigma_E}) \; ; \; X_{\sigma_E} \in X - X_b)$$

$$\xrightarrow[\beta \to \infty]{} E_x(e^{-\alpha\sigma_E} v(X_{\sigma_E})) = H_\alpha^E v(x) .$$

<u>補題 4</u> .

$u(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E})$ とおくと $u \in \mathcal{H}_\alpha^E$ であり かつ $\mathcal{E}^\alpha(u, v) \geq 0$, $\forall v \in \mathcal{F} \cap C$, such that $v(x) \geq 0$ on E.

<u>証明</u>　右連続強 Markov 過程の一般論より $u(x)$ は α-excessive , つまり $\beta G_{\beta+\alpha} u \leq u$, $\forall \beta > 0$.
又 $v_0 \in \mathcal{F} \cap C$　$v_0 = 1$ on E なる v_0 が存在するから 定理 2 より $u(x) = H_\alpha^E v_0 \in \mathcal{H}_\alpha^E$.

[1], §10 の定理 10.3 により $\mathcal{E}^\alpha(u, w) \geqq 0$, $\forall w \in \mathcal{F}$ $w \geqq 0$, m-a.e on X. 今 $v \in \mathcal{F} \cap C$, $v \geqq 0$ on E とする. 定理2より $\mathcal{E}^\alpha(u, v) = \mathcal{E}^\alpha(u, P_{\mathcal{H}_\alpha^E} v)$ $= \mathcal{E}^\alpha(u, H_\alpha^E v)$. ところが $H_\alpha^E v(x) =$ $E_x(e^{-\alpha\sigma_E} v(X_{\sigma_E})) \geqq 0$, $\forall x \in X$. したがって $\mathcal{E}^\alpha(u, v) \geqq 0$.

<u>定理 3</u>

$$p_E^\alpha(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E}) \quad , \quad m\text{-a.e.}$$

<u>証明</u>, 先ず p_E^α が次の2条件によって特徴づけられることに注意する.

(1.5) $\quad p_E^\alpha = 1 \qquad m$-a.e on E

(1.6) $\quad \mathcal{E}^\alpha(p_E^\alpha, v) \geqq 0 \quad , \quad \forall v \in \mathcal{F} \cap C$ such that $v \geqq 0$ on E.

(c.f. [1] §11). 一方 $u(x) = E_x(e^{-\alpha\sigma_E})$ はこの性質をもつ. (1.6) は前補題による. (1.5) については明らかに $x \in E - X_b$ のときは $u(x) = 1$. 補題2より $\mathrm{Cap}^*(X_b) = 0$. 補題1(ii) より $m(X_b) = 0$. したがって u は (1.5) をみたす.

§2. 推移確率の絶対連続性

$(X, m, \mathcal{F}, \mathcal{E}, G_\alpha)$ を canonical Dirichlet space に対応する強Markov過程を $\underset{\sim}{X} = \{X_t, P_x, x \in X\}$ とする。 $\underset{\sim}{X}$ の推移確率を $p(t, x, dy)$, semi-group を T_t であらわす。

以後 $\alpha > 0$ を固定し 以下の仮定をおく。

仮定

(A.1) 各 $x \in X$ につき Green measure $G_\alpha(x, dy)$ は m に関して絶対連続。

(A.2) $T_t \; ; \; C(X) \longrightarrow C(X)$ 。

定理 4 (推移確率の絶対連続性)

仮定 (A.1) (A.2) の下で 各 $t > 0$, $x \in X$ 毎に $p(t, x, \cdot)$ は m に関し絶対連続である。

補題 5

$u \in C_0(X)$ ならば $T_t u \in \mathcal{F}$ であり

$$\mathcal{E}(T_t u, T_t u) \leq \frac{1}{2t} \{ (u, u)_X - (T_t u, T_t u)_X \}$$

ただし $C_0(X)$ は台がcompactな連続関数の全体。

補題5の証明はあとまわしにしてこれを認めた上で定理4の証明をしよう。方法は [2] のそれである。

定理4の証明. $t>0$, $x\in X$ を固定する. $u\in C_0^+(X)$, $\|u\|_0=\sup_{x\in X}|u(x)|\leqq 1$ とする.

$B_\varepsilon=\{x\in X,\ T_{t/2}u(x)>\varepsilon\}$ とおく.

仮定(A.2)より B_ε は open. 補題1.(i)と5より

(2.1) $\mathrm{Cap}(B_\varepsilon)\leqq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{E}^\alpha(T_{t/2}u,\ T_{t/2}u)$

$$\leqq\frac{1}{t\varepsilon^2}(u,u)_X+\alpha/\varepsilon^2(T_{t/2}u,\ T_{t/2}u)_X .$$

一方 $T_tu(x)=T_{t/2}(T_{t/2}u)(x)$

$$=\frac{\alpha}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}}\int_0^{t/2}e^{-\alpha s}T_{t/2}(T_{t/2}u)(x)\,ds$$

$$=\frac{\alpha}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}}\int_0^{t/2}e^{-\alpha s}T_s[T_{t/2-s}(T_{t/2}u)](x)\,ds$$

$$\leqq\frac{\alpha}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}}\int_0^{t/2}e^{-\alpha s}T_s[p(\tfrac{t}{2}-s,\ \cdot,\ B_\varepsilon)+\varepsilon](x)\,ds$$

$$\leqq\frac{\alpha e^{+\frac{\alpha t}{2}}}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}}\int_0^{t/2}e^{-\alpha s}T_s(p_\alpha^{B_\varepsilon})(x)\,ds+\varepsilon$$

ここで定理3を使っている。結局

(2.2) $T_t u(x) \leqq \dfrac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}} G_\alpha p_\alpha^{B_\varepsilon}(x) + \varepsilon$.

仮定 (A.1) により $G_\alpha(x, dy) = G_\alpha(x, y)\, m(dy)$ なる $G_\alpha(x, y)$ が存在するが (2.2) より

(2.3) $T_t u(x) \leqq \dfrac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \left\{ \int_{G_\alpha(x,y)>N} G_\alpha(x, y)\, m(dy) \right.$

$\left. + N \int_X p_\alpha^{B_\varepsilon}(y)\, m(dy) \right\} + \varepsilon$

ところが 補題1 (ii) および (2.1) より

(2.4) $\int_X p_\alpha^{B_\varepsilon}(y)\, m(dy) \leqq \dfrac{1}{\alpha} \sqrt{Cap(B_\varepsilon)}$

$\leqq \dfrac{1}{\alpha\varepsilon} \sqrt{\dfrac{1}{t} + \alpha} \sqrt{(u, u)_X}$.

今 $\sqrt{(u, u)_X} = \|u\|_1$ とおくと (2.3) と (2.4) より次の評価に達する。

(2.5) $T_t u(x) \leqq \dfrac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_{G_\alpha(x,y)>N} G_\alpha(x, y)\, m(dy)$

$+ \dfrac{N e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\varepsilon(1-e^{-\frac{\alpha t}{2}})} \sqrt{\dfrac{1}{t} + \alpha}\, \|u\|_1 + \varepsilon$.

(2.5) に於ける ε, N は $u \in C_0^T$, $\|u\|_0 \leqq 1$ なる u に依存しない。この式から $p(t,x,dy)$ の m に関する絶対連続性がしたがう。実際，P を空でない closure compact なる開集合，$u \uparrow \chi_P$ とすれば (2.5) より

$$(2.6)\quad p(t,x,P) \leqq \frac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1-e^{-\frac{\alpha t}{2}}}\int_{G_\alpha(x,y)>N} G_\alpha(x,y)\,m(dy)$$

$$+\frac{N e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\varepsilon(1-e^{-\frac{\alpha t}{2}})}\sqrt{\frac{1}{t}+\alpha}\cdot m(P)+\varepsilon .$$

$P \downarrow$ とし $m(P) \downarrow 0$ とする。$\varepsilon \downarrow 0$, $N \uparrow \infty$ $\frac{N}{\varepsilon}m(P) \longrightarrow 0$ と出来る。わかったことは $A \subset X$, $m(A)=0$ ならば $p(t,x,A)=0$.

q.e.d.

補題5が残っているがこれは次の定理([1, §2])の結果として得られる。

定理5

(i) $\mathcal{F}$ の $L^2(X)$ 内での closure を $L_0^2(X)$ とおく。

$\exists\{\tilde{T}_t, t \geqq 0\}$; $L_0^2(X)$ 上の強連続 contraction semi-group such that

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{T}_t u\,dt = \tilde{G}_\lambda u \quad , \quad u \in L_0^2(X).$$

ただし $\{\tilde{G}_\lambda, \lambda>0\}$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に対応する L^2-re-
-solvent.

(iii) $\tilde{T}_t \;:\; L_0^2(X) \longrightarrow \mathcal{F}$ であり

$\forall u \in L_0^2(X)$, $\forall t>0$,

$$\mathcal{E}(\tilde{T}_t u, \tilde{T}_t u) \leqq \frac{1}{2t}\{(u,u)_X - (\tilde{T}_t u, \tilde{T}_t u)_X\}.$$

<u>補題 5 の証明</u>.

先ず $L_0^2(X) = L^2(X)$ である. 実際 $\mathcal{F}\cap C$ は C 内で dense であるから容易にわかるように

$L_0^2(X) \supset C_0$. したがって $L_0^2(X) = L^2(X)$.

定理 5 から補題 5 を導くためには次のことをいえばよい.

(2.7) $\quad u \in C_0 \Longrightarrow T_t u(x) = \tilde{T}_t u(x) \quad m$-a.e.

$A_\lambda = \lambda(\lambda G_\lambda - I)$ とおく.

$$e^{tA_\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \tilde{T}_t \qquad \text{on } L_0^2(X)$$

$$e^{tA_\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} T_t \qquad \text{on } R = G_\alpha(C) \text{ である}.$$

したがって $u \in R\ (\subset C)$ ならば $T_t u(x) = \tilde{T}_t u(x)$, m-a.e が成立する. 次に $u \in C_0$ とする. $\quad T_t u(x) = \lim_{\alpha\to\infty} T_t(\alpha G_\alpha u)(x)$,

一方 $u \in L_0^2(X)$ だから $\alpha G_\alpha u \longrightarrow u$ in L^2.
$\tilde{T}_t$ は L_0^2 上の有界作用素. したがって
$\lim_{\alpha\to\infty} \tilde{T}_t(\alpha G_\alpha u)(x) = \tilde{T}_t u(x)$ m-a.e.
したがって $T_t u(x) = \tilde{T}_t u(x)$, m-a.e.

文献

[1] Dirichlet space の表現とその応用(福島正俊)
to appear in 'Seminar on Probability'

[2] On absolute continuity of transition probabilities of a multidimensional Brownian motion (A. D. Wentzell).
Theory of probability and its appl. vol 13
No 1 (1968).