数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 78-102

マルコフ過程の分解
―境界近傍のpathの行動とFeller－上野分解―

東大 理 岡部靖憲

§1 序

本尾氏の論文[6]における未解決問題のひとつを解決する。Sを第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff空間とし、DをSのopen subsetで、Sで稠密、$\partial D=S-D$がコンパクトになるものとする。

$M^{min}=(W, P^{min}_x; x\in S)$を次の$(M^{min}.1)\sim(M^{min}.3)$をみたすマルコフ過程とする；

$(M^{min}.1)$ Hunt process,

$(M^{min}.2)$ reference measureを持つ,

$(M^{min}.3)$ $P^{min}_\xi(x_t=\xi, \forall t)=1, \quad \xi\in\partial D.$

このとき、次の$(M.1)\sim(M.3)$をみたすマルコフ過程$M=(W, P_x; x\in S)$がどの位あるかを追求する；

$(M.1)$ Hunt process,

$(M.2)$ reference measureを持つ,

$$(M.3) \quad E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right) = E_x^{min}\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t)dt\right) \equiv G_\alpha^0 f(x),$$
$$E_x(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) = E_x^{min}(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) \equiv H_\alpha f(x),$$

但し、σ は ∂D への到達時間であり、$\alpha>0$, $x\in S$, $f\in B(S)$ である。

正の数 $r>0$ をひとつ固定する。本尾氏は[6]において、さらに次の仮定；

$(M^{min}.4)$ $G_\alpha^0(C(S)) \subset C(S)$, $\alpha>0$.
$H_\alpha(C(\partial D)) \subset C(S)$, $\alpha>0$.

$(M^{min}.5)$ $\alpha>0$, $f\in C(S)$ に対して、$\dfrac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1}$ は ∂D にまで、連続に拡張される。拡張した函数を $\hat{H}_\alpha f$ とおく。

$(M^{min}.6)$ $\hat{H}_\alpha(C(S))$ は $C(S)$ で稠密である。

の下で、M はいわゆる "boundary system" $(\hat{M}, l, m, Q)$ によって決定されることを証明した。未解決問題とは、"上の条件、特に $(M^{min}.5)$; $(M^{min}.6)$、をより深い確率論でかつ一般的なものでおきかえよ" ということである。

この報告では、まず、$(M^{min}.1) \sim (M^{min}.3)$ の下で、次の定理を示す。

定理 (Feller－上野 分解)

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha\left\{ l f + (P+Q)\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1}\right)\right\},$$

$\alpha>0$, $x\in S$, $f\in B(S)$, l は $B(\partial D)^+$ の元、P は、$\mathcal{M} \equiv \left\{\dfrac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1}\right.$; $\left.\alpha>0,\ f\in B(D)\right\}$ とおくとき、$\overline{\mathcal{M}}\ (\subset B(D))$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への

bounded operator で、positive であり、(ν は dt の ∂D への r 次の掃散更の canonical measure である。[3]の P.146.)、$\mathbb{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の bounded kernel であり、K^α は ∂D の上の α 次 U-process ([2]の P.63) の 0 次の resolvent である。

注意　定理の $l, \mathbb{Q}$ は本尾氏の $l, \mathbb{Q}$ にあたり、$\mathbb{P}1$ が本尾氏の m にあたる。

次に、$\mathbb{P}$ の特徴付けを与える。それには、$\mathcal{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1} ; \alpha > 0, f \in C_\infty(D) \right\}$ とおくとき、次の仮定が必要となる。

$(*_1)$　$C_\infty(D) \subset \overline{\mathcal{M}_\infty} \, (\subset B(D))$

定理　($\mathbb{P}$ の特徴付け)

仮定 $(*_1)$ の下で、$\mathbb{P}(C_\infty(D)) = \{0\}$ である。

そして、Feller－上野分解の一意性が成り立つ。

注意　entrance boundary を導入せずに、$\mathbb{P}$ の特徴付けを行うには、上の仮定 $(*_1)$ が必要となる。しかし、entrance boundary を導入することによって、一般な条件 $((*_2))$ に $(*_1)$ をおきかえることができる。それは、次に述べる定理である。

定理　($\mathbb{P}$ の表現)

D^* を D の $\mathcal{M}_\infty$－compact 化とする[1]。これは、$G_\alpha^0 f$ を $G_r^0 1$ で優調和変換した resolvent を $G_\alpha^1 f = \frac{G_\alpha^0 (f G_r^0 1)}{G_r^0 1}$ とおくとき、D の $G_\alpha^1(C(D))$－compact 化と一致する。(次の仮定Iの下で。)

(※2) <u>仮定 I</u>　$G_\alpha^0(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$,　　$G_r^0 1 \in C_\infty(D)$

<u>仮定 II</u>　$G_\alpha^* f = G_\alpha' f|_D$ の連続拡張.　$f \in C(D^*)$ とおくとき、$\{f \in C(D^*)^+ ;\ \forall \alpha > 0\ \ \alpha G_\alpha^* f \le f\}$ が内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離する。

この仮定の下で、$\{G_\alpha^* ; \alpha > 0\}$ は Ray の仮定（[9]）をみたすので、その branching point 全体を D_b^* とおくとき、次のことが成り立つ。

∂D の各点 ξ に対して、D^* 上の（有界）測度 $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2), (3) を満たす;

(1)　$\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　ν-a.e. ξ　　$P\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$

　但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張した函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D^*) \le P1(\xi)$

(3)　$\forall \xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D_b^*) = 0$

　上の (1), (2), (3) をみたす $\mu(\xi, d\eta)$ は ν-測度 0 の ξ を除いて唯ひとつである。

<u>注意</u>　仮定 II は、Ray's hypothesis をみたすために必要になる。このとき、Ray の結果がうまく使えるのである。

Choquet の結果（[8] の P.43）を使って証明しようと試みると、G_α^* の range $R(G_\alpha^*)$ が内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離するということが必要になる。

このときは、もちろん仮定IIをみたすわけであるが、D_b^* の補集合 $D^*-D_b^*$ は $\mathcal{R}(\mathfrak{G}_x^*)$ に対する D^* の Choquet boundary と一致することが示せる。([8]のP.45)。いずれの場合も、この段階では、$\mu(\xi, d\eta)$ の support が D^*-D にあることは主張していないが、このことをもっと精密に述べるのが次の定理である。

定理　($\mu(\xi, d\eta)$ の support)

∂D の各点 ξ に対して、$S_\xi \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{x\in D;\ dist(x,\xi)<\varepsilon\}}$

(closure は D^* において) とおくとき、

(1)　$S_\xi \subset D^*-D$

(2)　$\mu(\xi, D^*-S_\xi)=0$

注意　本尾氏の仮定 $(M^{mi}5)$, $(M^{mi}6)$ の下では、$D^*=S$ となり、$S_\xi=\{\xi\}$ である。それ故、$\mu(\xi, d\eta)$ の support を S_ξ の proper subset におとすことは不可能である。
上の2つの定理において、Dの $\mathfrak{M}_\infty$-compact化を行ったために、仮定IIが必要になったが、Dの $\mathfrak{M}_\infty$-completion を行うときは、仮定IIは不必要となり、上の2の定理の内、最後の定理の(1)を除いて(これは、$\mathfrak{M}_\infty$-completion をとったときは、Dが homeo に入らないことによる(一般には))、すべて成り立つ。一般的に、Q-compact化とQ-completionとの関係が分ったのだが、この

ことに関しては、別の機会に　する。

§2　　$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}$ と $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}$

正の数 $r>0$ を固定する。time additive functional $t\wedge\zeta(w)$ の ∂D への r 次掃散を Φ とし、その右逆函数を τ とする。ν を Φ の canonical measure（[3] の p.145）、(P, L) を M の Lévy system（[4], [11]）とし、$P_D f(x) = \int_D P(x,dy) f(y)$ と定義するとき、[6] において、我々の仮定の下で、次の事実が示されている。

補題2.1　（[6] の p.88 の(31)）

$\exists\, l,\ m,\ n \in B^+(\partial D)$, $\exists Q : \partial D \times D$ 上の bounded kernel such that

(1)　$l \cdot \Phi \approx \chi_{\partial D} \cdot dt$

(2)　$E_x\left(\int_0^\infty e^{-rt} m\, d\Phi\right) = E_x\left(\sum_{s \in T_c} \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-rt} dt\right)$, $\quad \forall x \in S$

(3)　$Qk \cdot \Phi \approx \chi_{\partial D} P_D (k G_r^0 1) \cdot L$　, $k \in B(D)$

(4)　$n(\xi) = Q(\xi, D)$

(5)　$l(\xi) + m(\xi) + n(\xi) = 1$　　ν-a.e. $\xi \in \partial D$.

ここで、

$$T(w) \equiv \{ s \,;\, 0<s,\ \tau(s-)<\tau(s) \wedge \zeta(w) \}$$

$$T_c(w) = \{ s \in T(w) \,;\ x_{\tau(s-)-}(w) = x_{\tau(s-)}(w) \}$$

$$T_d(w) = \{ s \in T(w) \,;\ x_{\tau(s-)-}(w) \neq x_{\tau(s-)}(w) \}$$

定義 2.1　　$f,\ g,\ k \in B(S)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $x \in S$ に対して

$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,k)(x) \equiv E_x\left(\sum_{s \in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} k(x_t)\, dt \right)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) \equiv E_x\Big(\sum_{s\in T_d} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) \equiv E_x\Big(\sum_{s\in T} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \equiv \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

と定義する。

<u>補題2.2</u>

(1) $|\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)|,\ |\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)|,\ |\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)| \leq \dfrac{\|f\|\cdot\|g\|\cdot\|h\|}{\alpha\wedge\beta}$

(2) $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) + \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)$

(3) $\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f\times g,\ h)(x)$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x) = 0\ ,\quad \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ \chi_{\partial D})(x) = 0.$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_{\partial D},\ g)(x)$

(4) $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x) = 0,\quad \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ \chi_{\partial D})(x) = 0.$

$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_D,\ g)(x) \qquad \forall x\in S.$

<u>補題2.3</u> ([6]の P86の [5.4])

$f,\ g \in B^+(S),\quad \alpha>0$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D\, g(x_{R_n(k)})\Big)$$
$$= E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t)\, P_D g(x_t)\, d L(t)\Big) \qquad \forall x\in S.$$

$\{R_n(k)\}$は [6]の P82の (2)で定義されたマルコフ timeの列である。

補題2.4　$f,\ g \in C(\mathfrak{Z}),\ h \in B(\mathfrak{Z}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^\circ h(x_{R_n(k)})\Big) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f,\ g,\ h)(x).$$

補題2.5　$f \in C(\mathfrak{Z}),\ g \in B^+(\mathfrak{Z}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \overline{R_n(k)}} f(x_{\overline{R_n(k)}-})\, G_\beta^\circ g(x_{\overline{R_n(k)}})\Big) = E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta\Big)$$

$\{\overline{R_n(k)}\}$は[6]のP87の(21)で定義されたマルコフtimeの列である。

補題2.6　$f \in B(\mathfrak{Z}),\ g \in B^+(\mathfrak{Z}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{Z}$

$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta\Big) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f,\ g)(x) + E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(G_\beta^\circ g)(x_t)\, dL\Big)$$

補題2.7　$f,\ g,\ h \in B(\mathfrak{Z}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^\circ h(x_{R_n(k)})\Big) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\alpha}(f,\ g,\ h)(x)$$

補題2.8　$f,\ g,\ h \in B(\mathfrak{Z}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{Z}$

(1)
$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\alpha}(f,\ g,\ h)(x) = E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(g\, G_\beta^\circ h)(x_t)\, dL(t)\Big) = H_\alpha K^\alpha\Big\{ f\ \mathcal{D}\Big(g\cdot \frac{G_\beta^\circ h}{G_\gamma^\circ 1}\Big)\Big\}(x)$$

(2)
$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\alpha}(f,\ g)(x) = H_\alpha K^\alpha\Big\{ f\ \mathcal{D}\Big(\frac{G_\beta^\circ g}{G_\gamma^\circ 1}\Big)\Big\}(x).$$

但し、K^αは、$K^\alpha g(\underset{\partial D}{\overset{\xi}{\uparrow}}) = E_\xi\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(x_t)\, d\Phi(t)\Big)$ である。

補題 2.9　　$f \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0$,　$x \in \mathfrak{S}$

$$G_\alpha(f\chi_{\partial D})(x) = H_\alpha K^\alpha(\ell[f]_{\partial D})(x)$$

補題 2.10　　$f \in B(\mathfrak{S})$,　$g \in B^+(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathfrak{S}$

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\,\widehat{(\chi_D g \cdot dt)}_\beta\right)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g)(x)$$

補題 2.11　　$f, g \in C(\mathfrak{S})$,　$h \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0, \beta > 0$,　$x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha R_k(n)} f(x_{R_k(n)-})\, g(x_{R_k(n)})\, G_\beta^0 h(x_{R_k(n)})\right)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x)$$

補題 2.12　　$f, g, h \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0, \beta > 0$,　$\delta > 0$. $x \in \mathfrak{S}$

(1)　$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f, g, h)(x) - \mathcal{E}_{\alpha,\delta}^c(f, g, h)(x) + (\beta - \delta)\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f, g, G_\delta^0 h)(x) = 0$

(2)　特に $f \geq 0$,　$g \geq 0$,　$h \geq 0$ のとき

$$e^{-\beta t}\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f, g, T_t^{min} h)(x) \leq \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f, g, h)(x) \quad \forall t > 0$$

同じ事実が $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^d$, $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ に対しても成立する。

補題 2.13　　$f \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0$,　$x \in \mathfrak{S}$,　$\xi \in \partial D$

(1)　$\mathcal{E}_{\alpha,r}^c(f, 1)(x) = H_\alpha K^\alpha(m f)(x)$

(2)　$\mathcal{E}_{\alpha,r}(f, 1)(x) = H_\alpha K^\alpha((m+n) f)(x)$

(3)　$K^\alpha f(\xi) = \mathcal{E}_{\alpha,r}(f, 1)(\xi) + G_\alpha(f\chi_{\partial D})(\xi)$

以上の補題 2.2～2.13 は [6] の §4 の結果を用い、§5 と同じ考えのもとに示すことができる。詳しいことは省くことにする。

§3 $\mathbb{P}$

<u>補題3.1</u> 各 $\beta>0$ に対して、

$$\exists\ \hat{\hat{H}}_\beta : B(\mathfrak{z}) \longrightarrow L^\infty(\partial D,\nu) \quad \text{such that}$$

(1) bounded linear (2) positive

(3) $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f,g)(x) = H_\alpha K^\alpha(f\,\hat{\hat{H}}_\beta g)(x),\ \forall\alpha>0,\beta>0, x\in\mathfrak{z}.$

<u>証明</u> $g\in B^+(\mathfrak{z}),\ \alpha>0,\ \beta>0$ を固定する。[5] の P322 の proposition 3.4 より $\gamma\le\beta$ のとき $\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma$, $0<\beta<\gamma$ のとき、$\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + (\gamma-\beta)\widehat{(U^0_\beta\cdot dt)}_\gamma$, ここで、$U^0_\beta(x) = E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\beta t}d(\chi_D g\cdot dt)\right) \le \frac{\|g\|}{\beta}$ 従って、いずれの場合も、$\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + \frac{|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\widehat{(dt)}_\gamma \ll \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\,\Phi$

従って、[2] の P13 の 定理1.7 より $0\le\ ^\exists\tilde{H}_\beta g \le \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|$

$$\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \tilde{H}_\beta g\cdot\Phi$$

そこで、$\hat{\hat{H}}_\beta g \equiv \tilde{H}_\beta g - \mathbb{Q}\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)$ とおくと、補題2.8, 2.10 より $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f,g)(x) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,g) - \mathcal{E}^d_{\alpha,\beta}(f,g)(x)$

$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,\tilde{H}_\beta g(x_t)d\Phi\right) - E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x_t)\,\mathbb{Q}\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)(x_t)d\Phi\right)$

$= H_\alpha K^\alpha(f\,\hat{\hat{H}}_\beta g)(x).$

$g\in B^+(\mathfrak{z})$ に対して定義された $\hat{\hat{H}}_\beta$ を $B(\mathfrak{z})$ にまで拡張することはわけがなく、$\mathbb{Q}1\le 1$（補題2.1）と $\tilde{H}_\beta g$ の評価式より、$\hat{\hat{H}}_\beta$ は $B(\mathfrak{z})$ から $L^\infty(\partial D,\nu)$ の中への bounded linear operator となり、結論の (1), (3) はみたされ、(2) は (3) と $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}$ の定義式より分る。

補題3.2　　$f,\ g \in B(\mathfrak{Z}),\quad \alpha>0,\ \beta>0$ に対して、

$$\frac{G_\alpha^\circ f}{G_\gamma^\circ 1}(x)=\frac{G_\beta^\circ g}{G_\gamma^\circ 1}(x)\ \ \forall x\in D \implies \hat{\hat{H}}_\alpha f=\hat{\hat{H}}_\beta g$$

証明　$\forall k\in C(\mathfrak{Z})$ fix. 補題2.4より、仮定の下で、$\mathcal{E}_{\gamma,\alpha}^{c}(k,f)(x)=\mathcal{E}_{\gamma,\beta}^{c}(k,g)(x)\ \forall x\in\mathfrak{Z}$. 従って、補題3.1より $H_\gamma K^\gamma(k\,\hat{H}_\alpha f)(x)=H_\gamma K^\gamma(k\,\hat{H}_\beta g)(x)\ \forall x\in\mathfrak{Z}$. これより、$\hat{\hat{H}}_\alpha f=\hat{\hat{H}}_\beta g$ が従う。

定理3.1　　$(\mathbb{P})$

$$\mathfrak{M}\equiv\left\{\varphi\in B(D);\ \exists\alpha>0,\ \exists f\in B(\mathfrak{Z})\ s.t.\ \varphi=\frac{G_\alpha^\circ f}{G_\gamma^\circ 1}\right\}$$

とおくとき、

(1) $\mathfrak{M}$ は $B(D)$ の linear subspace であり、1_D を含む。

(2) $\exists\,\mathbb{P}:\overline{\mathfrak{M}}\longrightarrow L^\infty(\partial D,\nu)$ s.t.

(イ) bounded linear　　(ロ) positive

(ハ) $\mathfrak{M}\ni\varphi=\dfrac{G_\alpha^\circ f}{G_\gamma^\circ 1}$ に対しては、$\mathbb{P}\varphi=\hat{\hat{H}}_\alpha f$

(ニ) $\mathbb{P}1=m$

証明　(1)は $\{G_\alpha^\circ;\alpha>0\}$ が resolvent equation をみたすことより。(2)は、補題3.2より、$\mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^\circ f}{G_\gamma^\circ 1}\right)\equiv\hat{\hat{H}}_\alpha f$ が well-defined となり、$\hat{\hat{H}}_\alpha$ の linearity より $\mathbb{P}$ が $\mathfrak{M}$ において linear となる。$\mathbb{P}$ の $\mathfrak{M}$ における positivity は、$\forall k\in C^+(\mathfrak{Z})$ に対して、補題2.4より、$G_\beta^\circ f\geq 0$ のとき、$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(k,f)(x)\geq 0\ \forall x\in\mathfrak{Z}$. 従って、補題3.1と $\mathbb{P}$ の定義より $H_\alpha K^\alpha\{k\,\mathbb{P}(\frac{G_\beta^\circ f}{G_\gamma^\circ 1})\}(x)\geq 0\ \forall x\in\mathfrak{Z}$.

この関係は $h \in B^+(\partial)$ に対しても成り立つので、$\mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \geq 0$ となる。$\mathbb{P}$ の $\overset{(\mathfrak{m}\text{にかける})}{\text{boundedness}}$ は $\mathbb{P}$ の linearity と positivity があるから、$\mathbb{P}1 = m$ を示せばよいが、$\mathbb{P}1 = m$ は補題2.13より分る。従って、あとは $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ を $\overline{\mathfrak{M}}$ にまで拡張すればよい。

<u>系 3.1</u>　　$f, g, h \in B(\partial), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad x \in \partial$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^0(f, g, h)(x) = H_\alpha K^\alpha \{ f g \, \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right)\}(x)$$

<u>補題 3.3</u>　　$f \in B^+(\partial), \quad \alpha > 0$

$$\widehat{(\chi_D f \cdot dt)_\alpha} \approx (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \cdot \Phi$$

<u>証明</u>　　補題 2.8, 2.10, 系3.1 より。

<u>定理 3.2</u>　　<u>(Feller－上野 分解)</u>

$$f \in B(\partial), \quad \alpha > 0, \quad x \in \partial.$$

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha \{ \ell f + (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right)\}(x)$$

<u>証明</u>　　$f \in B^+(\partial)$ で十分。

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) - G_\alpha^0 f(x) &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t) dt\right) \qquad ((M.3)) \\ &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t) dt\right) + E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} \chi_D f(x_t) dt\right) \\ &= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t) dt\right) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\,\widehat{(\chi_D f \cdot dt)_\alpha}\right) \end{aligned}$$

従って、補題2.9, 3.3 より定理3.2を得る。

<u>補題3.4</u>　$f \in C(\mathfrak{S})$,　$h \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0$,　$\beta > 0$,　$\varepsilon > 0$ fix.

$\{\xi \in \partial D;\ f(\xi) \neq 0\} \ni \forall \xi$　$\xi \in \exists U$ open subset of $\mathfrak{S}$ s.t

$U \cap D \ni \forall x$　$\left|\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x)\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \left| H_\alpha K^\alpha \left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha (|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{P} 1)(x), \quad \forall x \in \mathfrak{S},\ \forall g \in C(\mathfrak{S}).$$

<u>証明</u>　補題2.4, 系3.1 より、

$$H_\alpha K^\alpha \left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^0 h(x_{R_n(k)})\right) \quad ①$$

一方、$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^0 h(x_{R_n(k)})\right)$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1} \cdot G_\gamma^0 1 (x_{R_n(k)})\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)})\, E_{x_{R_n(k)}}\left(\int_0^{\sigma} e^{-\gamma t} 1(x_t)\,dt\right)\right) \quad ((M.3))$$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)}) \int_{R_n(k)}^{S_{n+1}(k)} e^{-\gamma(t-R_n(k))} 1(x_t)\,dt\right)$$

$$= E_x\left(\sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha P(k,\Delta)} \chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{P(k,\Delta)}) \int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))} 1(x_t)\,dt\right) \quad ②$$

そして、$\displaystyle\sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha P(k,\Delta)} \chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{P(k,\Delta)}) \int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))} 1(x_t)\,dt$

$$= \sum_{\Delta \in T_c} \chi(\Delta \in T_k)\, e^{-\alpha P(k,\Delta)} \chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{P(k,\Delta)}) \int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))} 1(x_t)\,dt$$

$$+ \sum_{\Delta \in T_d} \chi(\Delta \in T_k)\, e^{-\alpha P(k,\Delta)} \chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{P(k,\Delta)}) \int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))} 1(x_t)\,dt$$

$$= \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k \quad ③$$

とおくとき、

$$|\mathrm{I}_k|,\ |\mathrm{II}_k| \leq \frac{\|f\| \cdot \|g\|\, \left\|\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right\|}{\alpha \wedge \gamma} \quad ④$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} |\mathrm{I}_k| \leq \sum_{\Delta \in T_c} \left(\varlimsup_{k\to\infty} \chi(\Delta \in T_k) e^{-\alpha P(k,\Delta)} \chi_D f(x_{P(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}(x_{P(k,\Delta)}) \int_{P(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-P(k,\Delta))} 1(x_t)\,dt \right) \quad ⑤$$

[6] の P83の [4.8], [4.9] より、$s \in T_c$ であるから、

$$\rho(k,s) \longrightarrow \tau(s-) \qquad ⑥$$

$$x_{\rho(k,s)-} \longrightarrow x_{\tau(s-)-} \in \partial D \qquad ⑦$$

$$x_{\rho(k,s)} \longrightarrow x_{\tau(s-)} = x_{\tau(s-)-} \qquad ⑧$$

& [6] の P83 の [4.7] より $T_k \longrightarrow T$ ⑨

$f(x_{\tau(s-)-}) \neq 0$ のとき、$\xi = x_{\tau(s-)-} \in \partial D$ に対して、仮定を用いると、$\exists U$ open $\ni \xi$, $D \cap U \ni \forall y$ $\left|\frac{G_\beta^0 R}{G_\gamma^0 1}(y)\right| < \varepsilon$

⑧より kを十分大きくとると、$x_{\rho(k,s)} \in D \cap U$ $(k \in T_k)$

従って、kを十分大きくとると、$\left|\frac{G_\beta^0 R}{G_\gamma^0 1}(x_{\rho(k,s)})\right| < \varepsilon$

従って、このことと、⑥, ⑦, ⑨ と f, g の連続性より、

$$\sum_{s \in T_c}\Big(\varlimsup_{k\to\infty} \chi(s \in T_k) e^{-\alpha\rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| \, \Big|\chi_D g \frac{G_\beta^0 R}{G_\gamma^0 1}(x_{\rho(k,s)})\Big| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\rho(k,s))} 1(x_t)\,dt\Big)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{s \in T_c}\Big(\varlimsup_{k\to\infty} \chi(s \in T_k) e^{-\alpha\rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| \, |\chi_D g(x_{\rho(k,s)})| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\rho(k,s))} 1(x_t)\,dt\Big)$$

$$= \varepsilon \sum_{s \in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| \, |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\tau(s-))} 1(x_t)\,dt) \qquad ⑩$$

一方、③の第二項 II_k については、[6] の P84の [4.15] より、I_k と同じ考え方により、$\varlimsup_{k\to\infty} |II_k| = 0$ ⑪

従って、①、②、③、④、⑩, ⑪ より、

$$|H_\alpha K^\alpha(f g \mathbb{P}(\tfrac{G_\beta^0 R}{G_\gamma^0 1}))(x)|$$

$$\leq \varepsilon \; E_x\Big(\sum_{s \in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| \, |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\tau(s-))} 1(x_t)\,dt\Big)$$

$$= \varepsilon \; \mathcal{E}_{\alpha\gamma}^c(|f|, |g|, 1)(x)$$

$$= \varepsilon \; H_\alpha K^\alpha(|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{P} 1_D)(x) \qquad (系3.1) \quad \forall x \in S.$$

定理 3.3　(quasi-local caracter of $\mathbb{P}$)

$$\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{fix.}$$

$$\partial D \subset {}^{\exists}U \text{ open subset } \subset \mathfrak{F} \text{ s.t. } U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D.$$

証明　$\mathfrak{M} \ni \varphi$ に対して示せば十分である。$0 \leq {}^{\exists}f_0 \leq 1$, $f_0 \in C(\mathfrak{F})$, $f_0(\xi) = 1$, $\xi \in \partial D$.　このとき、$\{\xi \in \partial D;\ f_0(\xi) \neq 0\} = \partial D$. 従って、補題 3.4 より、${}^{\forall}g \in C(\mathfrak{F})$, ${}^{\forall}x \in \mathfrak{F}$

$$|H_\alpha K^\alpha(f_0\, g\, \mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha(|f_0|\,|g|\,\mathbb{P}1)(x)$$

$f_0|_{\partial D} = 1$ ゆえ、$|H_\alpha K^\alpha(g\mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha(|g|\,\mathbb{P}1)(x)$

この不等式は ${}^{\forall}g \in B^+(\mathfrak{F})$ に対して成り立つから、

$$|\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon\, \mathbb{P}1(\xi) \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e. } \xi.$$

(補題 2.1, 定理 3.1 の (2) の (=))

系 3.2　$\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$;

$${}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \partial D \subset {}^{\exists}U \text{ open subset } \subset \mathfrak{F} \text{ s.t.}$$

$$U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$$

系 3.3　$\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$; $\partial D \subset {}^{\exists}U$ open subset $\subset \mathfrak{F}$ s.t.

$$U \cap D \ni {}^{\forall}x \quad \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$$

<u>補題3.5</u>　　$\alpha>0$ fix.　　$f_m \in B(S)^+$, $G_\alpha^0 f_m \underset{(m)}{\uparrow}$

このとき、$\forall f\in C^+(S)$, $\forall x \in S$.

$$H_\alpha K^\alpha \left(f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)})\ G_\gamma^0 1(x_{R_n(k)})\right) \ (\leq +\infty)$$

<u>証明</u>　[6] の p82 の (2) の $\rho(k)$ として、$\rho(k) \equiv \frac{1}{k} \wedge \sigma_{D_R} \wedge \inf\{ t\ ;\ dist(x_t, x_0) \geq \frac{1}{k}\}$ $(k=1,2,\cdots)$ をとると、$\rho(k) \geq \rho(k+1)$　①

をみたす。$\forall f \in C^+(S)$ fix. 補題2.4, 系3.1より、

$$H_\alpha K^\alpha \left(f\ \mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x) = \lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})\right) \quad ②$$

であるから、仮定より、各 k をとめたとき、

$$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})\right) \text{は} \underset{(m)}{\uparrow} \quad ③$$

一方、$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})\right)$

$$= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \int_{R_n(k)}^{\sigma_n(k)} e^{-\alpha t} f_m(x_t)\,dt \right)$$

であるから、① と $\{R_n(k)\}$, $\{\sigma_n(k)\}$の定義と $f\geq 0$, $f_m \geq 0$ より、

各 m をとめたとき、$E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\ G_\alpha^0 f_m(x_{R_n(k)})\right)$ は $\underset{(k)}{\uparrow}$　④

従って、②,③,④ より、$\mathbb{P}$ の positivity を使って、

$$H_\alpha^\alpha K^\alpha \left(f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x)$$

$$= \lim_{m\to\infty} H_\alpha K^\alpha \left(f\ \mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}\right)\right)(x) \qquad (\text{monotone convergence})$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G_\alpha^0 f_m}{G_\gamma^0 1}(x_{R_n(k)})\ G_\gamma^0 1(x_{R_n(k)})\right)$$

が成り立つ。

§4 $\mathcal{D}(\mathbb{P})$

前章の定理3.1において、$\overline{\mathfrak{M}}$上で定義され、値を$L^\infty(\partial D, \nu)$の中に取る有界線型作用素$\mathbb{P}$を導入し、定理3.3によって、$\mathbb{P}$と$\mathbb{Q}$との相異は「$\mathbb{P}$が境界近くでの quasi-*local character property* をもち、$\mathbb{Q}$は$\partial D\times D$上の有界な核である」という事は分ったが、実際問題として、定理3.2の*resolvent*の分解式から、$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$の完全なる分離を行うには、$\mathcal{D}(\mathbb{P})=\overline{\mathfrak{M}}$の考察が必要である。

定理4.1 仮定(※1): $C_\infty(D)\subset\overline{\mathfrak{M}}_\infty$

の下で、$$\mathbb{P}C_\infty(D)=\{0\}$$ である。

証明 系3.3より、$\mathbb{P}C_0(D)=\{0\}$が分り、$C_0(D)$が$C_\infty(D)$で稠密なことと、$\mathbb{P}$の*boundedness*より、$\mathbb{P}C_\infty(D)=\{0\}$が成立する。

それでは、$C_\infty(D)\subset\overline{\mathfrak{M}}_\infty$はいかなる条件の下で成り立つのであろうか？ それに答えるのが次の定理である。

定理4.2

$\{G^0_\alpha;\ \alpha>0\}$はD上の*diffusion*に対応する*resolvent*とし、(1) $G^0_\alpha(C_\infty(D))\subset C_\infty(D)$ (2) $G^0_r 1\in C(D)$ を仮定するならば、$$C_\infty(D)\subset\overline{\mathfrak{M}}_\infty$$ が成り立つ。

証明は省略する。(*Hille-Yoshida*の定理を使う。)

§5 $\mathbb{P}$の表現 (I)

今までの章とは離れて、一般的な事実を証明する。

D を第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff 空間とし、$(V, \mathcal{F}, \nu)$ を測度空間とする。

$\{G^0_\alpha ; \alpha > 0\}$: a family of resolvents

$$\left\{\begin{array}{l} G^0_\alpha : B(D) \longrightarrow B(D) \\ \text{(i) linear (ii) positive (iii) } \alpha G^0_\alpha 1 \leq 1 \\ \text{(iv) } G^0_\alpha - G^0_\beta + (\alpha-\beta) G^0_\alpha G^0_\beta = 0 \\ \text{(v) } f \in C_\infty(D) \text{ に対して、} \alpha G^0_\alpha f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x) \quad (x \in D) \\ \text{(vi) } G^0_\alpha (C_\infty(D)) \subset C_\infty(D) \\ \text{(vii) } \exists \gamma > 0 \text{ s.t. } G^0_\gamma 1 \in C_\infty(D), \quad G^0_\gamma 1(x) > 0, \forall x \in D. \end{array}\right.$$

が与えられたとする。

$$\mathfrak{M} \equiv \left\{ \frac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in B(D) \right\}$$

$$\mathfrak{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G^0_\alpha f}{G^0_\gamma 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in C_\infty(D) \right\}$$

補題5.1

(1) $\mathfrak{M} \subset B(D)$, linear subspace, $\ni 1$.

(2) $\mathfrak{M}_\infty \subset \mathfrak{M} \cap C(D)$, linear subspace, Dの点を分離する。

補題5.2

$C_0(D) \supset \exists C'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $f, g \in C'$, a, b 有理数 $\Rightarrow af + bg \in C'$

(2) C' は $C_0(D)$ において稠密 (sup normで)

証明　K. Ito [7] の P296 の lemma 2.

補題 5.3

$\mathfrak{M}_\infty \supset {}^\exists \mathfrak{M}'$　高々可算集合　s.t.

(1) $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}'$, a, b 有理数 $\Rightarrow a\varphi + b\psi \in \mathfrak{M}'$

(2) $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}_\infty$ において稠密 (sup normで)

証明　補題5-2の C' をとり、$\mathfrak{M}' = \left\{ \frac{G_\beta f}{G_\beta 1} ; f \in C' \right\}$ が求めるものとなる。

定理 5.1

$$\mathbb{P} : \overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(V, \mathfrak{B}, \nu)$$

(1) bounded linear　(2) positive　(3) $\mathbb{P}1 \le 1$

$\Longrightarrow$ V の各点 ξ に対して、D の $\mathfrak{M}_\infty$-compact 化 D^* ([1] の p.96) 上の有界な測度 (もちろん ≥ 0) $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の(1), (2) をみたす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　${}^\exists \nu$-a.e. $\xi \in V$

$$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$$

但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in V$　$\mathbb{P}1(\xi) = \mu(\xi, D^*)$

証明は省く。(Hahn-Banach の定理を使う。)

補題5.4　$\alpha>0$, $f\in B(D)$ に対して、$G^1_\alpha f(x) \equiv \dfrac{G^0_\alpha(f\cdot G^0_\gamma 1)(x)}{G^0_\gamma 1(x)}$

とおくと、　$\{G^1_\alpha\ ;\ \alpha>0\}$ は

(1)　$G^1_\alpha(B(D)) \subset B(D)$.　(2) linear　(3) positive　(4) $\alpha G^1_\alpha 1 \leq 1$

(5)　$G^1_\alpha - G^1_\beta + (\alpha-\beta)G^1_\alpha G^1_\beta = 0$　　(6) $G^1_\alpha(C(D)) \subset C(D)$

(7)　$\forall f \in C(D)$　$\forall x \in D$　$\alpha G^1_\alpha f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$

(8) $\mathcal{R} \equiv \{G^1_\alpha f\ ;\ \alpha>0,\ f\in C(D)\}$ は Dの点を分離する。

(9)　$\mathcal{R}$ は $C(D)$の linear subspace である.　(10) $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_\infty$

(11)　$\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{M}_\infty}$

証明は省く.（(11) は　$f\in C_\infty(D)$に対しては、実は

$\alpha G^0_\alpha f \underset{\alpha\to\infty}{\Longrightarrow} f$　(一様)　が成り立つことよりでる。）

補題 5.5　　Dの$\mathcal{M}_\infty$-compact化を D^* とする。

$f\in C(D^*)$, $\alpha>0$ に対して、$G^*_\alpha f \equiv [G^1_\alpha(f|_D)]^*$ とおく。

（$G^1_\alpha(f|_D) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{M}_\infty$であるから、その連続拡大 $[G^1_\alpha(f|_D)]^*$は

存在する。）このとき、　$\{G^*_\alpha\ ;\ \alpha>0\}$ は

(1)　$G^*_\alpha(C(D^*)) \subset C(D^*)$　(2) linear (3) positive (4) $\alpha G^*_\alpha 1 \leq 1$

(5)　$G^*_\alpha - G^*_\beta + (\alpha-\beta)G^*_\alpha G^*_\beta = 0$

(6)　$\alpha G^*_\alpha f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$　（$f\in C(D^*)$,　$\underline{x\in D}$）

証明は省く。（どれも容易である。）

補題 5.6　$\mathcal{R}^* \equiv \{g^*; g \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{M}^*_\infty \equiv \{g^*; g \in \mathcal{M}_\infty\}$
(g^* は g の連続拡大) とおくとき、

(1) $\mathcal{R}(G^*_\alpha) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{M}^*_\infty$

(2) $\overline{\mathcal{M}^*_\infty} = (\overline{\mathcal{M}_\infty})^*$, $\overline{\mathcal{R}^*} = (\overline{\mathcal{R}})^*$

(3) $\overline{\mathcal{R}(G^*_\alpha)} = \overline{\mathcal{R}^*} = \overline{\mathcal{M}^*_\infty}$

証明は省く。

補題 5.7　$\mathcal{R}(G^*_\alpha)$ は内部の点同志、entrance boundary の点 ($\in D^*-D$) 同志を分離する。

証明 $\mathcal{M}_\infty$-compact 化の定義と補題 5.5 の(6)、5.6 より。

仮定 ($*_2$)　$\{f \in C(D^*)^+; \forall\alpha>0\ \alpha G^*_{\alpha+1/2} f \le f\}$ が D の点と D^*-D の点とを分離する。

補題 5.8

(1) D^* の各点 x に対して、次の性質をもつ substochastic 測度 $\mu_2(x,dy)$ が唯一つ存在する；

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x,dy) f(y) \qquad \forall f \in C(D^*)$$

(2) $\forall f \in C(D^*)$, $\forall\alpha>0$, $\forall x \in D^*$

$$G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x,dy)\, G^*_\alpha f(y)$$

(3) $\forall E$ Borel $\subset D^*$ に対して、$\mu_2(\cdot, E)$ は Borel 可測

(4) $D^*_b \equiv \{x \in D^*; \mu_2(x,dy) \neq \delta_x(dy)\}$ とおくとき、
D^*_b は F_σ-set であり、かつ $\forall x \in D^*$ に対して、

$$\mu_2(x, D_b^*)=0$$

(5) $D_b^* \subset D^* - D$

証明　補題5.7と我々の仮定($*_2$)より $\{G_\alpha^*;\alpha>0\}$ が Ray の仮定をみたすから、[9]. より。(D^*は compact metrizable space である。)　(5)は補題 6.5 の (6) より。

定理 5.2

$$\mathbb{P}: \overline{\mathfrak{m}} \longrightarrow L^\infty(V, \mathfrak{F}, \nu)$$

(1) *bounded linear*　(2) *positive*　(3) $\mathbb{P}1 \leq 1$

$\Rightarrow$ Vの各点ξに対して、D^*上の測度(有界) $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の(1),(2),(3)を満たす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{m}}_\infty$　ν-a.e. $\xi \in V$　$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$

但し、φ^*は D^*上への φの連続拡張函数である。

(2) ν-a.e $\xi \in V$　$\mu(\xi, D^*) \leq \mathbb{P}1(\xi)$

(3) $\forall \xi \in V$　$\mu(\xi, D_b^*)=0$

上の(1),(2),(3)をみたす $\mu(\xi, d\eta)$ は ν-測度0のξを除いて一意である。

証明　定理5.1によって得た測度を $\mu_1(\xi, d\eta)$ とし、補題5.8の $\mu_2(\eta, d\eta')$ を使って、各点 $\xi \in V$に対して、

$$\mu(\xi, E) \equiv \int_{D^*} \mu_1(\xi, d\eta)\, \mu_2(\eta, E) \qquad (E \ \text{Borel} \subset D^*)$$

と D^*上の有界測度を作る。これが求めるものであることは

補題5.8より分る。　一意性も $D^* - D^*_b \ni \forall \eta$ に対して

$\alpha G^*_\alpha f(\eta) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(\eta)$　$(f \in C(D^*))$　（補題5.8の(ii)）

が成り立つことより分る。

§6　　$\mathbb{P}$の表現 (II)

今度は、§3までに戻り、$\{G^0_\alpha ; \alpha>0\}$ は §1のそれとし、

$V \equiv \partial D$, $\mathcal{F} \equiv$ Borel field, $\nu \equiv \Phi$のcanonical measure とし、

§5における仮定を §6においてもおくことにする。即ち、

§5の(vi), (vii), 仮定$(\times_2)$ をおくのである。

<u>補題6.1</u>　∂Dの各点ξに対して、$\mathcal{S}_\xi \equiv \{\eta \in D^* ; \xi \in \forall U$ nbd in $\mathcal{S}$, $\overline{U \cap D} \ni \eta\}$ (closure は D^*において) とおくと、

(1) $\mathcal{S}_\xi = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{x \in D ; dist(x, \xi) < \varepsilon\}}$ (closure は D^*において)

(2) $\mathcal{S}_\xi \subset D^* - D$

<u>証明</u>　(1)は明白である。(2)は DがD^*の中へhomeoに入っていることによる。

<u>補題6.2</u>　$\mathcal{L}_+ \equiv \{f \in C(D^*)^+ ; \forall\alpha>0 \ \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \le f\}$

$\mathcal{L} \equiv \{f_1 - f_2 ; f_1, f_2 \in \mathcal{L}_+\}$ とおく。

(1) $\{G^*_{\frac{1}{2}} f ; f \in C(D^*)^+\} \subset \mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L} \subset C(D^*)$

(2) $\mathcal{L}$は$C(D^*)$のvector latticeで、1を含み、D^*の点を分離する

(3) $\overline{\mathcal{L}} = C(D^*)$

(4) $\mathcal{L}_+ \ni \forall f \qquad \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \underset{(\alpha)}{\uparrow}$

証明　(1)は補題5.5の(5)より．(2)は$\mathcal{L}_+$について、$\mathcal{L}_+ \ni f, g \Rightarrow f+g,\ f\wedge g,\ af \in \mathcal{L}_+\ (a \geq 0),\ \mathcal{L}_+ \ni 1$ をみたすことによる。D^*の点を分離することは、補題5.7と仮定(※$_2$)による。(3)はStone-Weierstrassの定理である。(4)は補題5.5の(5)より分る。

定理6.1　($\mu(\xi, d\eta)$のsupport)

$$\nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D \text{ に対して、} \mu(\xi, D^* - \zeta_\xi) = 0$$

証明　最後まで述べたいのですが、かなり長く、面倒なので省略します。(頁数も多くなったので)。key pointは補題3.5で、補題6.2の(3)をうまく使うことにあります。

以上、証明を省略した所は、どこかに発表されると思います。

文献

[1] C. Constantinescu and A. Cornea ; Ideale Ränder Riemannscher Flächen , Springer-Verlag, 1963

[2] K. Kunita, K. Sato, M. Fukushima and M. Motoo ; 拡散過程と境界上のマルコフ過程 , Seminar on Probability Vol. 22, 1965

[3] M. Motoo ; Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov processes

Scientific Papers of the College of General Education University of Tokyo, Vol. 13, 1963, p143–159

[4] M. Motoo ; マルコフ過程の additive functional Seminar on Probability, Vol. 15, 1963

[5] M. Motoo ; The sweeping-out of additive functionals and processes on the boundary. Ann. Inst. Stat. Math., 16 (1964), 317–345

[6] M. Motoo ; Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes (Lévy system of U-processes), Proc. 5-th. Berkeley Symp., Vol. 2, 1967, P75–110

[7] K. Ito ; 確率論 (岩波) 1953

[8] Robert R. Phelps; Lectures on Choquet's Theorem. D. Van Nostrand Company, Inc. 1966

[9] D. Ray ; Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. Ann. of Math. (2), 70 (1959), 43–72

[10] K. Sato ; A decomposition of Markov processes, J. Math. Soc. Japan, Vol. 17, NO. 3, 1965, P 219–243

[11] S. Watanabe; On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japan. J. Math., Vol. 34 (1964), 53–70