数理解析研究所講究録
第 59 巻 1968 年 85-95

離散スペクトルをもつ CLASSICAL FLOWS について.

京大 理 丹羽敏雄

§0. 序文

多様体M上に定義された、ある連続な測度μを保つなめらかな1パラメータ変換群を我々は Classical flow と呼ぶ。このときM上の複素数値二乗可積分な関数全体の作るヒルベルト空間上には、自然にこの Classical flow (φ_t) から、ユニタリ作用素の1パラメータ群$\{U_t\}$が生成される。この$\{U_t\}$の固有値や、固有関数の微分可能性などは classical flow の invariants であるが、ある種の class においてはこれらの invariants が classical flow として完全な inv. であることがわかる。即ち:

"Classical flow (φ_t) がエルゴード的であり、離散(純点)スペクトルをもち、かつすべての固有関数が微分可能である場合、(φ_t)はよく知られたトーラス上の概周期運動とみなしうる" (Mはコンパクトとする)

のである。又一般に、エルゴード的な classical flow (φ_t) が微分可能な固有函数を有する場合、(φ_t) がその上に定義されている多様体Mは底空間がトーラスであるような局所自明ななめらかなファイバー空間の全空間とみなしうる。この際 (φ_t) は ファイバーを保ち、従って底空間上に自然にひきおこされる変換群は概周期運動となる。

flow は、より抽象的には測度空間上の測度を保つ1パラメータ変換群として定義されるが（これを abstract flow と呼ぼう）エルゴード的な離散スペクトルをもつ class に対しては固有値が abstract flow としての完全な inv. であることが von Neumann によって示された。しかしながら classical flow に対しては一般的なことはよくわかっていない。例えば、エルゴード的な classical flow の固有値全体 —— これは実は、実数の加法による（可算な）部分群をなすのであるが、この群のランクが有限であるか否かすら分っていない。上の結果によれば、この問題の特別な場合に対して解答が与えられる。［1］,［2］ を参照。

ここでエルゴード理論において知られている結果を以下に必要な限りにおいて述べる。なお詳細については、［4］,［5］［6］,［7］ を参照されたい。

定義1 (M, μ, φ_t) : classical flow

$\Leftrightarrow$ i) M : C^∞-manifold

ii) μ : finite measure on M defined by a positive continuous density ($\mu(M)=1$ とする.)

iii) (φ_t) : one-parameter group of diffeomorphisms of M which preserve the measure μ.

$H = L^2(M, \mu)$ とし. $\{U_t\}$ を

$$(U_t f)(x) = f(\varphi_t x) \quad . \text{ for } \quad f \in H$$

によって定まる. ユニタリ作用素の1径数群とする. $\{U_t\}$の固有値や固有関数などを flow (φ_t) の固有値, 固有関数と呼ぶ. 特に, λが(φ_t)の固有値であることは ある $f_\lambda \in H$ $f_\lambda \neq 0$ が存在して

$$U_t f = e^{2\pi i \lambda t} f \qquad \text{for all } t$$

を意味する.

定義2 (φ_t) : エルゴード的

$\Leftrightarrow$ $\mu(\varphi_t A \ominus A) = 0$ for all t, ならば $\mu(A) = 0$ あるいは $\mu(A) = 1$.

このとき次の結果はよく知られている。

定理1. (φ_t): エルゴード的

$\Leftrightarrow$ $\lambda=0$ が単純な固有値

定理2 (φ_t): エルゴード的とし, Λを(φ_t)の固有値の全体とし, $H^{(\lambda)}$を固有値λに属する固有空間とする.

$\Rightarrow$ (i) Λ は実数群$\mathbb{R}$の加法的な部分群.

(ii) $\forall \lambda\in\Lambda$ に対して $\exists\, \varphi_\lambda\in H^{(\lambda)}$ s.t.

$\sum_{i=1}^{n} k_i\lambda_i=0$ $(k_i\in\mathbb{Z})$ ならば $\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\lambda_i}^{k_i}=1$

又 $|\varphi_\lambda|=1$.

(iii) $H_d \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus} H^{(\lambda)}$, $\mathbb{B}_d=\mathcal{B}(H_d)$

ならば $H_d=L^2(\mathbb{B}_d)$

ここで classical flow としての同型の概念を与える.

定義3 (M,μ,φ_t), (N,ν,ϕ_t) を classical flows

(M,μ,φ_t)が(N,ν,ϕ_t)に classical flows として C^ρ-isomorphic であるとは MからNの上へのC^ρ-diffeomorphism ψがあって, $\psi\circ\varphi_t=\phi_t\circ\psi$, $\psi(\mu)=\nu$が成り立つときをいう. このとき我々は次のように書き表わす:

$$(M,\mu,\varphi_t)\underset{C^\rho}{\simeq}(N,\nu,\phi_t).$$

§1. 主な結果

ここで主な結果を述べる為に必要な定義を与える。

<u>定義4</u>　$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \{(x_1,\cdots,x_n) ; x_i \in \mathbb{R}, \bmod 1, i=1,\cdots,n\}$ を普通のルベーグ測度 $dm = dx_1\cdots dx_n$ をもった n 次元トーラスとする。(T^n, m, ψ_t) が振動数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ をもった Jacobi flow であるというのは (ψ_t) が

$$\psi_t x_i = x_i + \omega_i t \mod 1 , \quad i=1,\cdots,n$$

で与えられているときをいう。又振動数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ が $\mathbb{Z}$ 上1次独立であるときに限り Jacobi flow の軌道は T^n 上稠密であるが、このときはとくに概周期運動という。

<u>主定理1</u>　(M, μ, φ_t) をエルゴード的な classical flow, M をコンパクト, Λ^p をそれに属する固有関数が C^p-class であるような固有値の全体とする*)。このとき、もし $\lambda_1,\cdots,\lambda_r \in \Lambda^p\ (p \geq 1)$ が $\mathbb{Z}$ 上1次独立であれば、M は局所自明な C^{p-1} smooth なファイバー空間の全空間とみなせる。その底空間は r 次元トーラス T^r であり、そのファイバーは M の C^{p-1} 部分多様体である。flow (φ_t) はファイバーを保ち、従って底空間 T^r 上に自然にひきおこされる flow は概周期運動である。又その振動数は $\lambda_1,\cdots$

*) Λ^p は Λ の部分群をなす。

λ_r である。ファイバーは連結とできるがこのときは振動数は $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ と異なる。

注意 主定理1において、flow (φ_t) のエルゴード性の仮定は弱めることができ、M上至る所 dense であるような軌道が1本でも存在すればよい。なお (φ_t) がエルゴード的であれば、ほとんどすべての軌道はM上至る所 dense である。

系 主定理1の仮定のもとで rank $\Lambda^p \leq \dim M$

主定理2 (M,μ,φ_t) をエルゴード的な classical flow, M をコンパクトとする。$(p \geqq 1)$

$$H=\sum^{\oplus}_{\lambda\in\Lambda^p} H^{(\lambda)} \Rightarrow (M,\mu,\varphi_t) \underset{C^p}{\simeq} (T^{\dim M}, m, \psi_t)$$

§2. 主定理の証明

主定理1の証明にあたっては次の補助定理の証明が本質的である。

補助定理 主定理1の仮定の下で、$f_1,\cdots,f_r$ を夫々固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ に属する C^p-class の微分可能な固有関数とする。このとき $df_1,\cdots,df_r{}^{*)} \in T^*(M)$ は M 上至る所1次

独立である。

*) $f_j(x)$ は複素数関数であるが、証明の step1 でわかるように、$f_j(x) = e^{2\pi i \theta_j(x)}$, $\theta_j(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とおけるこの $d\theta_j$ のかわりに df_j とかく。

証明

Step 1. $f_j(x)$ $(j=1,\cdots,r)$ はエルゴード的な flow (φ_t) の連続な固有関数であるから、

$$|f_j(x)| = \text{const.} \quad (\text{例えば} = 1)$$

$$(*) \qquad f_j(\varphi_t x) = e^{2\pi i \lambda_j t} f_j(x) \quad \text{for all } x \in M,\ t.$$

さて、写像 P_k を次のように定義する。$(1 \leq k \leq r)$

$$P_k : M \longrightarrow \mathbb{T}^k \cong T^k \ : \ x \rightsquigarrow (f_1(x), \cdots, f_k(x))$$

ここで $\mathbb{T} \equiv \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$

$\mathbb{T}^k$上の flow (ψ_t^k) を $\psi_t^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (e^{2\pi i \lambda_1 t}\alpha_1, \cdots, e^{2\pi i \lambda_k t}\alpha_k)$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{T}^k$, と定義すれば明らかに次の図式は可換

$$\begin{tikzcd} \varphi_t : M \arrow[r] \arrow[d, "P_k"] & M \arrow[d, "P_k"] \\ \psi_t^k : \mathbb{T}^k \arrow[r] & \mathbb{T}^k \end{tikzcd}$$

Mはコムパクトで (ψ_t^k) の軌道は $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ の独立性から致る所denseであるから、P_k は上への写像である。

Step 2. さて $df_1, \cdots, df_k$ が致る所1次独立、即ち写像 P_k はM上致る所 full rank であると仮定しよう。

よく知られているように、集合 $P_k^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in T^k$ は M の部分多様体になる. しかも任意の $\alpha_0 \in T^k$ に対してある α_0 の近傍 $U_0 \subset T^k$ があって $P_k^{-1}(U_0) \subset M$ には直積の構造が入る. 即ち:

$$\exists\, \tau_0 : U_0 \times P_k^{-1}(\alpha_0) \longrightarrow P_k^{-1}(U_0)$$

$$\text{s.t.} \quad P_k \circ \tau_0(\alpha, y) = \alpha \quad \text{for } \forall \alpha \in U_0,\ y \in P_k^{-1}(\alpha_0).$$

例えば、このことは M に適当にリーマン計量を定義し、それによって ($P_k^{-1}(\alpha_0)$ はコムパクトに注意して) $P_k^{-1}(\alpha_0)$ における指数写像を少し修正することにより得られる. 詳細については R. Bishop & R. Crittenden [3] を見られたい.

これは次のことを示すものである: $(M, P_k, T^k, P_k^{-1}(\alpha_0))$ は局所自明な C^{p-1}-smooth なファイバー空間であり、底空間は k 次元トーラス、そのファイバーは M の C^p- 部分多様体である.

<u>Step 3.</u> 帰納法により $df_1, \cdots, df_r$ は M 上至る所1次独立であることを示そう. df_1 が至る所独立であることは (*) から明らかであるから $df_1, \cdots, df_k$ の1次独立性を仮定して $df_1, \cdots, df_k, df_{k+1}$ の一次独立性を示そう.

さて df_{k+1} が点 $x_0 \in M$ において $df_1, \cdots, df_k$ に1次従属であると仮定しよう. すると φ_t は微分同型であり $f_j(x)$ は (*) を満たすから、df_{k+1} は $\varphi_t x_0 \in M$ においても $df_1, \cdots, df_k$ に1次従属である. よって x_0 を通る軌道の閉包 C_{x_0} :

$$C_{x_0} = \overline{\bigcup_{-\infty<t<\infty} \varphi_t x_0}$$

の上で df_{k+1} は $df_1, \cdots, df_k$ に1次従属である。これは f_{k+1} を $P_k^{-1}(\alpha)$ (Step.2) 上の関数と考えるとき、$C_{x_0} \cap P_k^{-1}(\alpha)$ の点はすべて f_{k+1} の critical point であることを示す。従って、よく知られたSardの定理により集合 $f_{k+1}(C_{x_0} \cap P_k^{-1}(\alpha))$ の測度は $\mathbb{T}^1$ において零であることを示す。所が C_{x_0} がコンパクトであることと、ψ_t^* (Step 1.) の軌道が $\mathbb{T}^k$ 上至る所 dense であることから、$P_{k+1}(C_{x_0}) = \mathbb{T}^{k+1}$. 故に $f_{k+1}(C_{x_0} \cap P_k^{-1}(\alpha)) = \mathbb{T}^1$. これは明らかな矛盾である。

q.e.d.

主定理1の証明は補助定理の証明中にすでに与えてある。主定理2の証明に移ろう:

主定理2の証明.

補助定理の証明に見られるように $\mathrm{rank}\,\Lambda^\rho = \dim. M$ を示せば十分である。

さて $r = \mathrm{rank}\,\Lambda^\rho$ とし、$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \Lambda^\rho$ を $\mathbb{Z}$ 上1次独立としよう。$f_1, \cdots, f_r$ を夫々 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ に属する C^ρ-class の固有関数とする。今 λ を任意の $(\in \Lambda^\rho)$ 固有値 f_λ をそれに属する C^ρ-class の固有関数とする。r は Λ^ρ の rank

であるから、$\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は $\mathbb{Z}$ 上1次従属. 即ち

$$\exists\, k \neq 0,\ k_1, \cdots, k_r \in \mathbb{Z}$$

$$\text{s.t.} \quad k\lambda = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r$$

従って定理2の(ii)から.

$$f_\lambda^{k}(x) = f_1^{k_1}(x) \cdot \cdots \cdot f_r^{k_r}(x)$$

$f_\lambda(x)$ の連続性から $f_\lambda(x)$ は各ファイバー $P_r^{-1}(\alpha)$ の各連結成分上で定数でなければならない. 所で仮定によれば.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda^P}^{\oplus} H^{(\lambda)} = H$$

であったから. これは定理2の(iii)に矛盾する. 直接示すのも容易である.

q.e.d.

—文献—

1. V. Arnold & A. Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris (1966).
2. A. Avez. : Ergodic theory of dynamical systems vol. 1, 2. Lecture note at Univ. of Minneapolis, Minnesota (1966, 1967)
3. R. Bishop & R. Crittenden : Geometry of Manifolds, Academic press, New York (1964)

4. P. Halmos : Lectures on ergodic theory, Math. Soc. Japan (1956)

5. N. Ikeda, T. Hida & H. Yoshizawa : Theory of flow, Sem. on Prob, vol. 12 (1962) (in Japanese)

6. В. Рохлин : Избранные вопросы метрической теория динамических систем, Успехи матем. наук, Т. IV, В. 2 (1949) pp 57–128.

7. H. Totoki : Flow and entropy, Sem. on Prob. vol. 20 (1964) (in Japanese)