数理解析研究所講究録
第59巻 1968年 109-118

局所凸線形位相空間における線形作用素の半群について

東京女子大 文理 高村多賀子

§1. 序文

本稿は局所凸線形位相空間における線形作用素の作る半群で，必ずしも同等連続でない場合について，その生成を論じるのが目的である。

従来のBanach空間における線形作用素の作る半群の理論は，近年Schwartz [5]，宮寺 [4]，吉田 [6]，小松 [2]，その他により，局所凸空間における線形作用素の同等連続な半群の場合に拡張されたが，その議論はBanach空間の場合とほぼ平行になされた。すなわち $\{T_t;\ t \geq 0\}$ を局所凸空間Eにおける同等連続な半群とし，Aをその生成作用素とすると，$Re(\lambda) > 0$ なる複素数 λ に対して，T_t のLaplace変換とAのresolventが存在して

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x\, dt = (\lambda I - A)^{-1} x, \qquad x \in E$$

が成立し，この関係が上の理論において核心をなしていた。

しかるに同等連続でない半群の場合には，その Laplace 変換も，その生成作用素の resolvent も，もはや必ずしも存在しないので，異った取扱いが必要となる。ここでは一般 Laplace 変換の概念を導入することにより，いわゆる Hille－Yosida の定理に相当するものが得られることを示そう。

§ 2. 半群の基本性質

E を局所凸線形位相空間とし，$L(E,E)$ を E から E の中への連続線形作用素の全体とする．

<u>定義</u>. 作用素の族 $\{T_t \,;\, t \geqq 0\} \subset L(E,E)$ は次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき<u>半群</u>と呼ばれる．

(1) $\quad T_t T_s = T_{t+s}, \quad t, s \geqq 0,$

(2) $\quad T_0 = I$

(3) $\quad \lim_{t \to s} T_t x = T_s x, \quad s \geqq 0, \quad x \in E.$

さらに，半群 $\{T_t \,;\, t \geqq 0\}$ は任意の $0 < s < \infty$ に対して，部分族 $\{T_t \,;\, 0 \leqq t \leqq s\}$ が同等連続（i.e. E の任意の連続な seminorm p に対して，E の他の連続な seminorm q が存在して，すべての $0 \leqq t \leqq s$, $x \in E$ に対して $p(T_t x) \leqq q(x)$ が成立）のとき，<u>局所同等連続</u>と呼ばれる．

<u>注意</u> もしも E が tonnelé ならば，半群はすべて局所同等

連続になる。

半群 $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ の生成作用素 A は

$$Ax=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T_h-I)x$$

によって，右辺の極限が E の中に存在するときに定義される。このとき同等連続な半群の場合と同様にして，次の基本的な事柄が成立する：

$\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ を E における半群とし，A をその生成作用素とするとき，もし $x\in D(A)$ ならば，$T_t x\in D(A)$, $t\geqq 0$ かつ $T_t x$ は t について連続的微分可能で

$$\frac{d}{dt}T_t x = AT_t x = T_t Ax,\qquad t\geqq 0$$

が成立する。

さらに，もし E が点列完備ならば，$D(A)$ は E で稠密である。またもし $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ が局所同等連続ならば，A は閉作用素である。

§3. 一般 Laplace 変換

$\mathcal{D}$ を $R^1=(-\infty,\infty)$ で定義された複素数値無限回連続可微分で compact な台をもつ関数の空間とし，$\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$, $-\infty<a<\infty$ を台が $(-\infty,a]$ に入るような $\mathcal{D}$ の元の全体とし，これらに通常の位相を導入する。各 $\varphi\in\mathcal{D}$ に対し，その共役 Laplace 変換

$\hat{\varphi}$ を

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt \qquad (\lambda:\ \text{複素数})$$

で定義し，変換 $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}$ による $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ の像をそれぞれ $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{(-\infty,a]}$ とし，$\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{(-\infty,a]}$ には，それぞれ $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ と位相同形になるような位相を入れる。

さて，以下 E を点列完備とし，$a>0$ を一つ固定する。$\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ から E の中への連続線形作用素の全体 $L(\mathcal{D}_{(-\infty,a]}, E)$ を考え，$\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$ のすべての有界集合上の一様収束位相を入れる．また $L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)$ についても同様。

$$\mathcal{D}'_a(E) = \{F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty,a]}, E)\ ;\ \ F(\varphi)=0,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}_{(-\infty,0]}\},$$

$$\mathbb{D}'_a(E) = \{\hat{F} \in L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)\ ;\ \ \hat{F}(\hat{\varphi})=0,\ \ \forall\hat{\varphi}\in\mathbb{D}_{(-\infty,0]}\}$$

とおき，これらに $L(\mathcal{D}_{(-\infty,a]}, E)$, $L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)$ からの位相を導入する．

各 $F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty,a]}, E)$ に対して，その一般 Laplace 変換 $\hat{F}$ が

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = F(\varphi), \qquad \hat{\varphi}\in\mathbb{D}_{(-\infty,a]}$$

によって，$L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)$ の元として定義される．このとき対応 $F \longleftrightarrow \hat{F}$ によって $L(\mathcal{D}_{(-\infty,a]}, E)$ と $L(\mathbb{D}_{(-\infty,a]}, E)$，さらに $\mathcal{D}'_a(E)$ と $\mathbb{D}'_a(E)$ は位相同形になっている．この二つの空間 $\mathcal{D}'_a(E)$ と $\mathbb{D}'_a(E)$ が我々の理論において重要な役割を演ずるのである．

Dirac 測度 δ に対して $\delta\otimes x \in \mathcal{D}'_a(E)$ $(\forall x\in E)$ であり，また

$$(\delta\otimes x)^\wedge = 1\otimes x \in \mathbb{D}'_a(E)$$

となる。

§4. 一般 resolvent

$\{T_t ; t\geq 0\}$ を E における局所同等連続な半群とし，これを $t<0$ に対しては $T_t=0$ とおいて拡張し $\{T_t ; -\infty<t<\infty\}$ を作ると，各 $x\in E$ に対して $T_t x$ は $\mathcal{D}'_a(E)$ の元として考えられる。さらに，各 $F\in\mathcal{D}'_a(E)$ に対して合成積 $F*T_t\in\mathcal{D}'_a(E)$ が

$$(F*T_t)(\varphi)=\int_0^\infty T_t(F(\tau_{-t}\varphi))\,dt \quad \left(=\int_0^a T_t(F(\tau_{-t}\varphi))\,dt\right),\ \varphi\in\mathcal{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義され（ただし $\tau_{-t}\varphi(s)=\varphi(s+t)$），変換 $F\to F*T_t$ は $\mathcal{D}'_a(E)$ において連続となる。とくに

$$(\delta\otimes x)*T_t = T_t x .$$

$\mathcal{D}'_a(E)$ における作用素 $*T_t$ に対応して，$\mathbb{D}'_a(E)$ においては作用素 $\mathbb{R}$ を考える。すなわち

$$\mathbb{R}\,\hat{F} = (F*T_t)^\wedge, \qquad \hat{F}\in\mathbb{D}'_a(E)$$

によって $\mathbb{D}'_a(E)$ から $\mathbb{D}'_a(E)$ の中への作用素 $\mathbb{R}$ を定義すると，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{D}'_a(E)$ で連続であり，

$$\mathbb{R}(1\otimes x) = (T_t x)^\wedge$$

が成立する。

$\hat{F}\in\mathbb{D}'_a(E)$ に λ をかけること $\lambda\hat{F}\in\mathbb{D}'_a(E)$ が

$$(\lambda \hat{F})(\hat{\varphi}) = \hat{F}(\lambda\hat{\varphi}), \qquad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義される。

<u>定義</u> AをEにおける線形作用素とするとき，$\mathbb{D}'_a(E)$ における線形作用素Aを，任意の$\hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]}$ について $\hat{F}(\hat{\varphi}) \in D(A)$ かつ変換 $\hat{\varphi} \longrightarrow A(\hat{F}(\hat{\varphi}))$ が $\mathbb{D}'_a(E)$ に属するような $\hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ に対して

$$(A\hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\hat{\varphi})), \quad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]}$$

によって定義する．作用素 $\lambda - A$ に対して $\mathbb{D}'_a(E)$ 上で定義された連続な逆作用素 $(\lambda - A)^{-1}$ が存在するとき，これをAの<u>一般 resolvent</u> と呼ぶ．

<u>命題</u> Eを点列完備とし，$\{T_t ; t \geqq 0\}$ をEにおける局所同等連続な半群，Aをその生成作用素とすると，Aの一般 resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が存在して R にひとしい。

したがって

$$(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x) = (T_t x)^{\wedge}, \quad x \in E$$

が成立する。

§ 5. Hille-Yosida の定理

<u>定義</u> $\hat{F} \in \mathbb{D}'_a(E)$ とする．複素数平面C^1の右半面 $Re(\lambda) > 0$ におけるE-値正則関数 $\hat{F}(\lambda)$ が$\hat{F}$の<u>表現</u>であるとは

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = \frac{1}{i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\hat{F}(\lambda)\,d\lambda, \qquad \forall\hat{\varphi}\in D_{(-\infty,a]},\ \forall\mu>0$$

が成立するときにいう。次にEにおける線形作用素Aの一般resolvent $(\mathbb{A}-\mathbb{A})^{-1}$ が存在しているとき，$Re(\lambda)>0$ において定義された $L(E,E)$-値関数 $R(\lambda)$ が $(\mathbb{A}-\mathbb{A})^{-1}$ の表現であるとは，すべての $x\in E$ に対して $R(\lambda)x$ が $Re(\lambda)>0$ における E-値正則関数で，かつ $(\mathbb{A}-\mathbb{A})^{-1}(1\otimes x)$ の表現になっているときにいう。

このとき Hille-Yosida の定理は次の形に述べられる。

定理　Eを点列完備な局所凸空間とする。このときEにおける線形作用素Aが，一意に決定される局所同等連続な半群 $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ の生成作用素であるための必要十分条件は，Aが次の二条件を満足することである：

1)　Aは稠密な定義域 $D(A)$ をもつ閉作用素である。

2)　任意の a, $a>0$ に対し，空間 $D'_a(E)$ において次の条件が満たされる：

(a)　Aの一般resolvent $(\mathbb{A}-\mathbb{A})^{-1}$ が存在する。

(b)　$(\mathbb{A}-\mathbb{A})^{-1}$ の表現 $R(\lambda)$ で，族 $\left\{\frac{\mu^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{d\mu^n}R(\mu)\,;\,\mu>0,\ n=0,1,2,\cdots\right\}$ が同等連続であるようなものが存在する。

注意1　同等連続な半群 $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ の場合には，通常の Laplace 変換

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\,dt, \qquad x\in E$$

は $Re(\lambda)>0$ における E-値正則関数で，$(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A})^{-1}(1\otimes x)=(T_t x)^{\wedge}$ の表現になっている，すなわち $R(\lambda)$ は $(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A})^{-1}$ の表現であり，さらに

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda)x=(-1)^n\lambda^{n+1}(\lambda I-A)^{-(n+1)}x,\qquad Re(\lambda)>0$$

が成立している。したがって上の定理は同等連続な半群に対する Hille-Yosida の定理の直接の拡張になっている。

注意2. 定理の十分条件に関しては，2) は或る $a>0$ に対して満たされていればよい。

〔証明の概略〕

必要性: A が局所同等連続な半群 $\{T_t ; t\geqq 0\}$ の生成作用素であるとき，

$$R(\lambda)x=\int_0^a e^{-\lambda t}T_t x\,dt,\qquad x\in E$$

とおけばよい。

十分性: いま A が 1) と一つの $a>0$ に対して 2) を満足すると仮定する。

Heaviside 関数を Y とする (i.e. $t\geqq 0$ で $Y(t)=1$, $t<0$ で $Y(t)=0$).

一方，作用素 $\boldsymbol{\lambda}$ に対し $\mathcal{D}'_a(E)$ で連続な逆作用素 $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ が存在し

$$\boldsymbol{\lambda}^{-n}(1\otimes x)=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}Y\otimes x\right\}^{\wedge},\qquad x\in E,\quad n=1,2,\cdots$$

が成立する。

$x\in D(A^3)$ に対し

$$(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A})^{-1}(1\otimes x)=\boldsymbol{\lambda}^{-1}(1\otimes x)+\boldsymbol{\lambda}^{-2}(1\otimes Ax)+\boldsymbol{\lambda}^{-3}(1\otimes A^2x)+\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{A})^{-1}(1\otimes A^3x)$$

と書け，$\boldsymbol{\lambda}^{-1}(1\otimes x)$, $\boldsymbol{\lambda}^{-2}(1\otimes Ax)$, $\boldsymbol{\lambda}^{-3}(1\otimes A^2x)$ の一般逆 Laplace 変換は上式より，$Y\otimes x$, $tY\otimes Ax$, $\frac{t^2}{2!}Y\otimes A^2x$ である。$\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{A})^{-1}(1\otimes A^3x)$ に関してはどうかというと

$$S_t x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{t\lambda}\,\frac{1}{\lambda^3}R(\lambda)(A^3x)\,d\lambda, \qquad \mu>0$$

とおくと，(b) より各 $\mu_0>0$ に対して，$R(\lambda)(A^3x)$ が $\mathrm{Re}(\lambda)\geqq\mu_0$ で有界となることから，右辺の積分は絶対収束し，その値は μ に無関係である。また $S_t x$ は t について連続微分可能で，$t\leqq 0$ で $S_t x=0$ となるから，$S_t x$ は $\mathcal{D}'_a(E)$ の一つの元であり，$\boldsymbol{\lambda}^{-3}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{A})^{-1}(1\otimes A^3x)$ の一般逆 Laplace 変換となる。

$$T_t x = Y(t)x + tY(t)Ax + \frac{t^2}{2!}Y(t)A^2x + S_t x, \qquad t\leqq a$$

とおくと，$T_t x$ は $(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{A})^{-1}(1\otimes x)$ の一般逆 Laplace 変換となる。また $\{T_t\,;\,t\leqq a\}$ は $D(A^3)$ において同等連続となり，$D(A^3)$ は E で稠密となるので，$\{T_t\,;\,t\leqq a\}$ を E 全体に同等連続に拡張出来，拡張したものを同じく T_t で表わすと，各 $x\in E$ に対して $T_t x$ は $(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{A})^{-1}(1\otimes x)$ の一般逆 Laplace 変換となる。さらに $x\in D(A)$ ならば $T_t x\in D(A)$ かつ

$$\frac{d}{dt}T_t x = AT_t x = T_t Ax, \qquad 0\neq t\leqq a$$

が成立し，これから $\{T_t\,;\,0\leqq t\leqq a\}$ の半群性 $T_{t+s}=T_tT_s$ が示され，この性質を用いて T_t を $t>a$ に拡張して得られた局所同等連続な半群 $\{T_t\,;\,t\geqq 0\}$ に対して，A はその生成作用素となっている。

文　　献

[1] E. Hille & R.S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).

[2] H. Komatsu, Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230–262.

[3] T. Kōmura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Anal., 2 (1968).

[4] I. Miyadera, Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations, Tôhoku Math. J., 11 (1959), 162–183.

[5] L. Schwartz, Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups, Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[6] K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1965.