

線型微分方程式系について

東大 教養 佐藤幹夫
立教大理 一松 信

(要旨) 解の範囲を *hyperfunction* (佐藤の意味; [1], [2] 参照) に拡張することは, 形式的な拡張ではなく, 微分方程式にとって本質的な意味をもつことを述べる. 小松 [4] の成果を中心に, 微分作用素とは何か, という問題に言及する.

I. Cohomology 論

I. 1. 層の cohomology

X を *paracompact* な空間, \mathcal{S} を X の上の加群の層 (sheaf) とすれば, *cohomology* 加群 $H^p(X, \mathcal{S})$ が定義できる. さらに一般に, X の開集合 U に対して, 相対 *cohomology* 加群 $H^p(X \text{ mod } U, \mathcal{S})$ が定義できる.

Cohomology 加群の定義はいろいろ可能であるが, 通例は *resolution*, すなわち層の *exact sequence*

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \dots$$

を作り, \mathcal{F}^i が単純な性質をもつようにする. もし \mathcal{F}^i が

$$(i) \quad H^p(X, \mathcal{F}^i) = 0 \quad (p \geq 1, i \geq 0)$$

をみたすものなるば、 $\tilde{\varphi}^p: \Gamma(X, \mathcal{F}^p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$ の自然な写像として、 $(\tilde{\varphi}^{-1} = 0$ と解釈する)

$$H^p(X, \mathcal{S}) = (\text{Ker } \tilde{\varphi}^p) / (\text{Im } \tilde{\varphi}^{p-1})$$

と定義できる。

注 H^p を定義する途中に (i) は論理的にはおかしいが、「 $H^p = 0$ 」という条件は別の形でのでも、上記の論法は正当化される。

同様に \mathcal{F}^i が

$$(ii) \quad H^p(X \bmod U, \mathcal{F}^i) = 0 \quad (p \geq 1, i \geq 0)$$

をみたすものなるば、 $\Gamma(X, \mathcal{F}^p)$ のうち開集合 $X - U$ 内にのみ section を限定して、上記と同じく $\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$ の cohomology から $H^p(X \bmod U, \mathcal{S})$ を定義することができる。

上のようなる \mathcal{F}^i として、H. Cartan は fine sheaf (近年では soft sheaf) を利用した。しかし近年では、Grothendieck による flabby sheaf による resolution が普通に使われる。

\mathcal{F} が flabby とは、任意の開集合 U に対し、自然な制限 $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ がつねに onto のことである。この術語はいろいろあったが、近年は flabby に統一された。Flabby sheaf は (i), (ii) をともにみたす — これに対し fine sheaf は (i) はみたすが (ii) をみたさないことがある。 — じつはすて

この開集合 U に対して (ii) を満たす ($U = \emptyset$ なら (i) になる) 層は *flabby* であることが証明されている。

I. 2. de Rham の定理と Poincaré の双対定理

以下 $M \in \text{paracompact}$ な C^∞ 級多様体とし、簡単のために向きづけ可能で向きづけられているとする。次元を n とし、 $\Omega^p \in M$ 上の C^∞ 級 p 次微分式の芽の作る層とすれば、

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^n \rightarrow 0$$

は exact sequence であり、これから ($\Omega^{-1} = 0$ と解する)

$$H^p(M, \mathbb{C}) \cong \{d\omega = 0 \mid \omega \in \Gamma(M, \Omega^p)\} / d\Gamma(M, \Omega^{p-1})$$

とする (Ω^i はすべて *fine* である)。これが de Rham の定理 である。これは、 $H^p(M, \mathbb{C})$ の計算と、右辺の周期をとった微分式の量の規定と、二つの意味をもつ。

さらに M が compact ならば、 C^∞ 級微分式に双対にあたる *distribution* 係数の微分式 (いわゆる *current*) による分解が作られ、これも *fine* である。そして

$$H^p(M, \mathbb{C}) \longleftrightarrow H^{n-p}(M, \mathbb{C})$$

はともに有限次元で、両者の間には自然な双対関係が成立する (Poincaré の双対定理)。

ところで、 C^1 あるいは C^∞ 級多様体は \mathbb{R}^n に埋めこむことができる。前の微分構造と両立する C^ω 級多様体の構造が導入できる。 M を C^ω 級とし、 $\Omega^p \in C^\omega$ 級の微分式の芽の層

としてみよう. このときには Ω^p は fine ではない. しかし実解析的多様体は「実 Stern」多様体であるという結果 (Malgrange [5]; その他) により, やはりこの場合にも結果的には $H^p(M, \Omega^i) = 0$ ($p \geq 1, i \geq 0$) が示され, また加えて, C^ω 級の微分式に対しても, de Rham の定理が成立する.

この場合 Poincaré の双対定理は, つぎの形で paracompact な多様体 M 上で成立する. M 内に compact 集合 K をとり, $M - K = U$ (開集合) とおく. 実解析的 p 次微分式の芽の層を \mathcal{A}^p とすると, exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow 0$$

が成る. この双対として, hyperfunction (を係数とする微分式の芽の層 \mathcal{B}^p) が現われ, exact sequence

$$0 \leftarrow \mathcal{B}^n \xleftarrow{d} \mathcal{B}^{n-1} \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} \mathcal{B}^0 \leftarrow \mathcal{C} \leftarrow 0$$

が作られる. しかも \mathcal{B}^p は \mathcal{C} を \mathcal{B}^p として flabby sheaf である. したがって相対 cohomology が \mathcal{B}^p から計算され

$$H^p(K, \mathcal{C}) \longleftrightarrow H^{n-p}(M \text{ mod } U, \mathcal{C})$$

が (必ずしも有限次元ではないが) 互いに双対になる. これは Alexander - Pontryagin の双対性と呼ばれるもので, Poincaré の双対定理の一般化である. ここで $H^{n-p}(M \text{ mod } U, \mathcal{C})$ は, K を含む M に依存せず, つまり K のいくらでも近い近傍の状態だけで定まることが知られている.

ここで $H^p(K, \mathbb{C})$ は \mathbb{C} (と同型の加群) の帰納的極限で、
 そのたかだか可算個の直和である。 $H^{n-p}(M \bmod U, \mathbb{C})$ は、
 \mathbb{C} の射影的極限で、そのたかだか可算個の完全直積である。
 もし M が compact で $M=K$ ならば、 $H^{n-p}(M, \mathbb{C})$ は直和
 かつ完全直積だから有限次元となり、前記の Poincaré の双対
 定理に還元される。

I.3 拡張とまとめ

上記の例でもわかるように、hyperfunction の拡張は、
 単なる拡張という以上に、相対化を可能にするという意味で、
 より大きな意義をもつ。

M が複素多様体ならば、 d のかわりに $\bar{\partial}$ を使った Dolbeault
 の resolution により、同じような定理が示される。 Compact
 な M に対するのが、Serre の双対定理であるが、これも同様に
 相対化できる。

そもそも C^∞ 級函数は、一箇所の零動が、他に何の影響も
 及ぼさない、という意味で、「鳥合の衆」であり、だからこ
 そ局所的な議論に使いやすかった。これにひきかえ C^ω 級函
 数は、一箇所の全部が定まってしまう「筋金入りの組織体」
 であるから、使いにくくて、これまで敬遠されがちであった。
 だからこそ C^∞ 級函数の共役空間として $C^{-\infty}$ ともいうべき

distribution が作られたわけである。しかし上述の実 Stein 多様体の性質と相対化により、もっと自然な C^∞ 級関数によっても同様の (あるいはより深い) 結果がえられるとすれば、「人工的」な C^∞ 級関数にこだわらず、 C^∞ 級関数をもっと活用するべきではなからうか。—— そうなると differential topology というのも「analytic」 topology と改名する方が小土わしくなるかもしれない。

ところで de Rham の定理は $df = 0$ すなわち

$$\partial f / \partial x_i = 0$$

に相当するものであり、複素多様体の Dolbeault の定理は

$$\partial f / \partial \bar{z}_i = 0$$

に相当するものである。とすれば、もっと一般な線型偏微分式系 (ただしあたっては定数係数) について、同じような理論が作られるもよいであろう。Komatsu [4] はじつにこれを試みたもので、つぎに紹介する。

なお hyperfunction は analytic manifold 上だけでなく、algebraic variety 上にも同様に作る事が可能である。ただし (この場合には、事実上 δ 関数に近いものになる。

II. 線型微分方程式系

II.1. 線型微分方程式系の定式化

\mathbb{C} 上の n 変数の多項式環 $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ を $\mathbb{C}[\xi]$ と記す。
 この上の coherent module \mathcal{M} とは, $\mathbb{C}[\xi]$ の何乗かの形の自由 module の cokernel で表わされるものである。Hilbert の syzygy 定理により, このときには \mathcal{M} の射影的分解

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\xi]^{r_m} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{C}[\xi]^{r_1} \xrightarrow{P(\xi)} \mathbb{C}[\xi]^{r_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

($m \leq n$)

が作られる。写像 $P(\xi)$ は $r_1 \times r_0$ 次行列で表現され, \mathcal{M} は $\mathbb{C}[\xi]^{r_0}$ をその像で割ったものと同型であるから, その関係式はある方程式系で表わされる。 ξ_i を $\partial/\partial x_i$ に置きかえたものが微分方程式系であり, $P(\xi)$ は微分作用素とみなされる。もちろん r_0, r_1 は一意的ではなく, その形は変わりうるが, その本質的な意味は \mathcal{M} だけによって定まる。

つぎはこの方程式系の解を考える。そのためには, 解の範囲を定めなければいけない。解を層子の中から選ぶことにする。もちろん層子とは層をなすこと, すなわち局所的な性質が定められるものであることが必要であり, さらに微分演算について閉じていなければならぬ。このような性質をみたす具体例として, C^∞ (級の函数の芽の層), $C^{-\infty}$ (distribution), \mathcal{A} ($= C^\omega$), \mathcal{B} (hyperfunction), \mathcal{O} (正則函

数)などがよく使われる。

$P(\xi)$ の随伴写像として, 微分作用素 $P(\text{grad})$ が作られ, 適当な条件の下で, 上記と双対的な exact sequence

$$0 \leftarrow \mathcal{F}^{x_m} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{F}^{x_1} \xleftarrow{P(\text{grad})} \mathcal{F}^{x_0} \leftarrow \mathcal{S} \leftarrow 0$$

が作られる。 $P(\text{grad})$ の核 \mathcal{S} が, 正しく 解 にはかゝらないすなわち \mathcal{S} は \mathcal{M} と \mathcal{F} とから

$$\mathcal{S} = \text{Hom}_{\mathbb{C}[\xi]}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

として表えられる。

具体的には $\mathcal{F} = C^\infty$, $C^{-\infty}$ のとき, exact sequence になることは Ehrenpreis [3] が示した, $\mathcal{F} = C^\omega$ のときは Malgrange の研究に含まれる。 $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ のときには flabby resolution になり, やはり exact sequence になることが, Komatsu [4] によって示された。

II.2. 解の存在

空間が通例の Euclid 空間で領域 V が 凸 のときには,

$$H^p(V, \mathcal{S}) = 0$$

であり, 大域的な解の存在ことが証明されている (Komatsu [4])。ここで凸という条件は, 恐らく証明の技法上の条件であって, 必要条件ではないと思われる。しかし無条件では大域的な (一価な) 解の存在は保証されない。

注. 最近若林剛は, $\partial u / \partial z_j = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($n \geq 2$; f は正則函数) について, 正則領域で超球と同位相な V , 多項式近似の Runge の定理の成立する領域 V , 正則領域で切り口 (平面による) がつねに単連結 (ただし連結とは限らない) な V で, これが大域的に一価な解をもたない例を構成した. これは $\partial u / \partial \bar{z}_j = \dots = \partial u / \partial \bar{z}_n = 0$ が同時に並んでいる連立方程式系であるが, このような一見自明に見える方程式系でさえ, 大域的な解の存在は, 予想外に厄介な問題である.

以上は一般の場合であるが, とくに 楕円型作用素 の場合には, *hyperfunction* としての解は, 自動的に C^ω 級の解になり, 上記の列は C^ω の *flabby resolution* を与える.

また Harvey は単独の方程式については, \mathbb{R}^n の任意の領域において, 大域的な解の存在を示している. しかし一般の方程式系となると, 上記の簡単な例でもみられるように, 問題はそれほど簡単ではない.

なお解の層 \mathcal{S} に対する (多様体上で考えて)

$$\sum (-1)^p \binom{\dim}{p} H^p(M \bmod (M - K), \mathcal{S})$$

(M は基礎の多様体, K は M 上の compact 集合)

は, 強度の不変式である. とくに $M = K$ (compact) のときは Atiyah-Singer の理論で示されたものである.

II.3. 微分作用素の意味

前にものべてたように, *distribution* を *hyperfunction* に拡張したのは, 単なる拡張のための拡張ではなく, 本質的な意味がある. 常微分方程式の不確定特異点における解のように, 指數的に増加し, 局所積分可能でない函数は *distribution* にはならない. それに対して解析的係数 (とくに定数係数) で解が解析函数なら, それをはずして *hyperfunction* としては自然に扱うことができる. C^∞ 級函数が好んで使われたのは, 単に使い易いという便宜的な理由にすぎないように思われる.

しかし偏微分方程式になると, 解の範囲が狭いためによりまくとけない, というよりも, 方程式系自体の性格から解がえにくい場合がしばしばある. (もっともさらに拡張して「多価な」超函数といったものが自由に駆使できれば, 話は変わってくるのかもしれないが, 目下の所, 「多価函数」を「一価函数」と同じく大域的に勝手に扱うことは大問題である.)

ところで上記の考察をさらに一般化すれば, 多様体 M 上の層 \mathcal{L} , \mathcal{F} を定め, coherent な左 \mathcal{L} -module \mathcal{M} の射影的分解

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}^{(1)} \rightarrow \mathcal{L}^{(0)} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

を作り, それの共役として

$$\cdots \leftarrow \mathcal{F}^{(1)} \leftarrow \mathcal{F}^{(0)} \leftarrow \mathcal{S} \leftarrow 0$$

を作り, \mathcal{M} を微分作用素 (の表現), $\mathcal{S} = \text{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ を解と解釈することが出来る. もちろんこの下の列が exact になるためには条件がいるが, \mathcal{F} を hyperfunction にとったとき, 適当な条件の下で flabby resolution がえられる. 積用的な様素などはそうなる. ただし特異点の竹は土けなければならぬ.

ところで M が C^ω 級多様体ならば, それを複素 Stein 多様体 X にはめ込み, しかも $X \ni M$ に $\epsilon < \delta$ でも近くとることが出来る. この場合

$$H^n(X \bmod (X-M), \mathcal{O})$$

が hyperfunction であつた.

$X \times X$ の対角集合 Δ は X と同一視できるが,

$$H^n(X \times X \bmod (X \times X - \Delta), \mathcal{O}')$$

は Δ の近傍のみで定まる. ただしここに \mathcal{O}' は $2n$ 変数の ^{正則} 函数で, はじめの n 変数についてはスカラー函数, 後の n 変数については n 次正則微分形式であるようなものの芽のなす層である. この要素はいわば hyperdifferential operator ともいうべきもので, X 上の一種の ∞ 位の微分作用素 (∞ 回までの微分を含むが, しかし係数が十分に早く減少して, 意味をもつもの) とみなせる.

普通の微分作用素は多項式に対応するもので, distribu-

tion で考える限り、局所有限位ということは許されない制約である。上記の *hyperdifferential operator* は、この多項式を \mathbb{R}^n の指数型の整函数 (∞ での増加が、指数函数よりもゆるやかなもの) に拡張したことにあたる。これに対して Paley-Wiener の理論に相当するものが考えられる。

定数係数の場合には、普通の微分作用素は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の一次結合との convolution とみなされる。同様に上記の *hyperdifferential operator* は、点 E とする *hyperfunction* (それは $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ よりも広く、「無限位数」でもある) との convolution とみなされ、その双対が正しく指数型の整函数になるのである。

解析的多様体と代数的多様体とし、Stein 多様体のかわりに *affine* 多様体を使えば、同じように *hyperdifferential operator* が作られるか、それは本質的には普通の微分作用素と同じものになる。

最後はいささか哲学的な話になったが、考察の範囲を *hyperfunction* に拡張することにより、見通しがよくなるだけでなく、本質的に新しい結果もえられることを強調したい。

文 献

- [1] 佐藤幹夫, 超函数の理論について, 数学
10 (1958), 1-27.
- [2] M.Sato, Theory of hyperfunctions I, II, J.Fac. Sci.
Univ. Tokyo, I 8 (1959/60), 139-193; 387-437.
- [3] L.Ehrenpreis, A fundamental principle for systems
of linear differential equations with constant
coefficients and some of its applications,
Proc. Int. Symposium on linear spaces, 161-174,
Jerusalem, 1961.
- [4] H.Komatsu, Resolutions by hyperfunctions of sheaves
of solutions of differential equations with constant
coefficients, Math. Annalen, 176 (1968), 77-86.
- [5] B.Malgrange, Faisceaux sur des variétés analytiques
réelles, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 231-237.
- [6] H. Komatsu, On the Alexander-Pontrjagin Duality Theorem,
Proc. Japan Academy 44 (1968), 489-490