数理解析研究所講究録
第59巻 1968年 238-248

定数係数線型偏微分方程式系のある種の代数的構造

東大 理院　斎藤 恭司

§1. はじめに

$\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$, はそれぞれ微分可能函数、正則函数、distribution, hyperfunction の芽(の層)とします。Ωを$\mathbb{R}^n$の開集合とした時、$\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, 等は多項式$P(X)$を偏微分$P(\frac{\partial}{\partial x})$と作用させる事により、$\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$-module となります。(同様に$\Omega$が$\mathbb{C}^n$の open set の時、$\mathcal{O}(\Omega)$は$\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$-module。)

そこで以下、これ等の module としての構造と偏微分方程式の問題の関連を調べます。

§2. affine module

Aは単位元を持つ、可換結合律を満す環とします。以後A-加群と言う場合、常に1は identity として作用している場合のみを考えます。

<u>定義1.</u> A-加群Cが次の 1), 2) を満す時、A-affine加群と呼びます。

1) CはA-単射加群

2) 任意の ideal $I \subsetneqq A$ に対し、或る$u \in C$が存在し、

$u\neq 0$ かつ任意の $P\in I$ に対し $Pu=0$ 。

定理2. Ω を $\mathbb{R}^n$（又は $\mathbb{C}^n$）の開集合で凸とする時、$\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$,（又は $\mathcal{O}(\Omega)$）は $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$（又は $\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$）-affine加群となる。

証. 今、$\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$, ($\mathcal{O}(\Omega)$) 等を C, $\mathbb{C}[X_1,\cdots X_n]$ ($\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$) を A と置きます。

1) を満す事：I を A の任意の ideal、$\varphi: I\to C$ はある A-homomorphism とします。多項式環は noether 環だから、I の有限基底 $P_1,\cdots,P_k$ がとれます。$\mathcal{P}=(P_1,\cdots,P_k)$ とおいた行列に対し、$A^l \xrightarrow{\mathcal{Q}} A^k \xrightarrow{\mathcal{P}} A$ が完全列となる様な行列 $\mathcal{Q}$ を選べます。この時、Ehrenpreis [1] 又は Komatsu [2] 等により $C^l \xleftarrow{{}^t\mathcal{Q}} C^k \xleftarrow{{}^t\mathcal{P}} C$ は exact。1方、$(\varphi(P_1),\cdots,\varphi(P_k))\in \ker {}^t\mathcal{Q}$. ($\because$ $Q_i\in A$ が $\sum_{i=1}^{k} Q_iP_i=0$ なら $\sum_{i=1}^{k} Q_i\varphi(P_i)=\varphi(\sum_{i=1}^{k} Q_iP_i)=0$)。従って、或る $u\in C$ により、$(\varphi(P_1),\cdots,\varphi(P_k))={}^t\mathcal{P}u$。すなはち、$\varphi(P_i)=P_iu$。よって、写像 $\tilde{\varphi}: A\ni P\rightsquigarrow P\cdot u\in C$ は、φ の定義域を A まで拡張したものに成ります。

2) を満す事：I を A の任意の ideal とします。$I\neq A$ なら Hilbert の零点定理により、I は $\mathbb{C}^n$ 上少くとも一つは、共通零点を持ちます。今 $\mathbb{R}^n$（又は $\mathbb{C}^n$）の座標を $(x_1,\cdots,x_n)$（又は $(z_1,\cdots,z_n)$）とし、$u=\exp(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i)$（又は $\exp(\sum_{i=1}^{n} a_iz_i)$）：但し $a=(a_1,\cdots,a_n)$ は I の共通零点、と置くと、明かに $P(X)\in$

I に対し、$P(\frac{\partial}{\partial x})u = P(a)u = 0$　　　　　　*q.e.d.*

上の証明からも分る様に、定義1 の条件 2)は、或る意味で零点定理を意味します。

$\mathcal{O}(\Omega)$ について 1)が成立する事は [2] に直接解析的な証明が与へられています。以後の affine module についての一般的考察より、$\mathcal{E}(\Omega)$ が affine である事を認めると自動的に、$\mathcal{O}(\Omega)$ が affine と成る事が分ります。

系. 芽 $\mathcal{E}, \mathcal{O}, \mathcal{D}', \mathcal{B}$ は affine module である。

(∵ $\mathbb{R}^n \ni x$ は $\mathbb{C}^n$ において convex open set を基本近傍系とできる。)

Prop. 3. C は A-affine module とします。この時、A-加群 M に対し、$\mathrm{Hom}_A(M, C)$ を対応させる functor は、exact かつ faithfull となる。

証. exact である事は、C が移入加群である事の直接の結果なので、faithfull になる事をたしかめます。

二つの A-加群 M, N の間の A-homomorphism λ に対応する $\mathrm{Hom}_A(N, C)$ から $\mathrm{Hom}_A(M, C)$ への準同型を λ^* とします。$\lambda \neq 0$ より $\lambda^* \neq 0$ を言います。

$\lambda \neq 0$ より、或る $m \in M$ が在って、$\lambda(m) = n \neq 0$。$A \cdot n \cong A/I$, I は A と異る ideal。条件 2)により、I の共通零点なる $u \in C$ が存在する。$A \ni P$ に $Pu \in C$ を対応させる写像は、自動的に Rn から C への写像とみなせ、$\neq 0$ である。C は単射加

群だから、それはNからCへの写像に拡張される。すると
$\lambda^*(\varphi) = \varphi \circ \lambda \neq 0$。よって $\lambda^* \neq 0$。　　　　q.e.d.

以後、$\mathrm{Hom}_A(M, C)$の事を C_M と書き、$\lambda \in \mathrm{Hom}_A(M\,N)$ に対応する $\mathrm{Hom}_A(C_N, C_M)$ の元をλ^*と書く事にします。

注意. M,NをLのsubmodule とする時

$$0 \to L/M\cap N \to L/M \oplus L/N \to L/M+N \to 0$$

がexact だから任意のΩに対し

$$0 \to \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M\cap N}) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M}) \oplus \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{N})$$
$$\to \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M\cap N}) \to H^1(\Omega, \mathcal{F}_{L/M+N}) \to \cdots$$

がexact な事が分り、例へば $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{L/M+N}) = 0$ (ie. ΩがL/M+N-convex) ならば、$\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M\cap N})$の元は、$\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/M})$の元と、$\Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{L/N})$の元の和で書ける。([3] 参照)

さて、$M \ni m$, $C_M \ni u$ の組に対し $u(m) \in C$ を対応させる写像を、内積の記号 $\langle m, u \rangle_A$ で表します。もち論 $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ はA-bilinear です。

<u>Lemma 4.</u>

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : M \times C_M \longrightarrow C$ は non-degenerate.

証 mが0でないとすると、Prop 3. の証明中示した様に、或るMからCへの hom. φ で、$\varphi(m) \neq 0$ なものが存在する。

逆に、$\varphi \in C_M$ が $\langle m, \varphi \rangle = 0$, $\forall m \in M$ ならば、φは写像として零だから $\varphi = 0$ q.e.d.

§3. A-algebra

BはA-algebraとします。この時乗法により、Bは$\mathrm{Hom}_A(B, B)$のA-sub-moduleとみなせます。従ってCをA-moduleとする時、A-bilinear

$$\mathrm{Hom}_A(B,B) \times \mathrm{Hom}_A(B,C) \to \mathrm{Hom}_A(B,C)$$

をBに制限する事により、canonicalに$\mathrm{Hom}_A(B,C)$はB-moduleとみなせます。

補題5. A, B, C, を上の通りとし、MをB-moduleとします。

$$\mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(B,C)) \cong \mathrm{Hom}_A(M, C)$$

証 $M=B$ならば正しいので、inductive limitをとって、1般にMがB-free moduleなら正しい。任意のMは$\mathrm{Coker}(B^I \to B^J)$と表示できますが、$\mathrm{Hom}_A$は左exact functorなので、上の等式が成立する。 q.e.d.

定義6. $\psi: A \to B$ はring homomorphism。この時B-module Mから、A-module Nへの単に加群としての準同型 $\varphi: M \to N$ が、ψ-準同型であるとは、

$$a\varphi(m) = \varphi(\psi(a)m) \quad \forall a \in A,\ \forall m \in M$$

となる事とします。更にψもφも同型である時、φをψ-同型、又は作用同型であると言います。

Prop. 7. Cが A-affine 加群の時、$C_B = Hom_A(B, C)$ は B-加群として次の性質を持つ。

i) C_B は B-affine 加群

ii) $i : A \to B$ を canonical な homomorphism

$i^* : C_B \to C_A = C$ を、その dual とする時、i^*は i-準同型となる。

iii) $i^*(a \cdot u) = \langle a, u \rangle_A \quad {}^\forall a \in B,\ u \in C_B$

iv) $\langle a \cdot b, u \rangle_A = \langle a, b \cdot u \rangle_A \quad {}^\forall a, b \in B,\ u \in C_B$

更に、iv)を満す様な bilinear $B \times C_B \to C_B$ は唯一通りしかない。

証. 定義より、iv)を満す事は明か。又iv)に於て、b, uを固定し、aを動かせば、§1. Lemma 4. により、$b \cdot u$ は唯一通りに決まる。iv)を満す様な作用は、自動的に i)~iii) を満す事を示します。

i) 1) $0 \to M \to N$ が B-module として exact なら、A-module として exact であり、$C_N \to C_M \to 0$ も exact. 1方 補題5 より $C_N \cong (C_B)_N$, $C_M \cong (C_B)_M$ だから $(C_B)_N \to (C_B)_M \to 0$ も exact.

2) $M \neq 0$ なら $(C_B)_M \cong C_M \neq 0$

ii) $a, b \in A$, $u \in C_B$ に対し、

$\langle b, i^*(i(a)u) \rangle_A = \langle i b, i(a) u \rangle_A = \langle i(ab), u \rangle_A = \langle ab, i^* u \rangle_A$
$= \langle b, a\, i^* u \rangle_A$ 。任意の b について等しいから Lemma 4. より

$i^*(i(a)u) = a\, i^* u \quad {}^\forall a \in A,\ u \in C_B$

(iii) も同様な計算を行へばよく、省略します。 q.e.d.

例 1. $A=\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n]$ の $\{\frac{1}{2}(X_j+\sqrt{-1}\,Y_j) : j=1,\cdots,n\}$ で生成される ideal を I とし、$B=A/I$ とおく。この時、$B\cong\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$, $Z_j=\frac{1}{2}(X_j-\sqrt{-1}\,Y_j)$ 。

この時、$\mathcal{E}_B\cong\mathcal{D}'_B\cong\mathcal{B}_B\cong\mathcal{O}$ となる。

従って、$\mathbb{C}[Z_1,\cdots,Z_n]$-module M に対し、

$$\mathcal{O}_M\cong\mathcal{E}_M\cong\mathcal{D}'_M\cong\mathcal{B}_M 。$$

同様に convex open set Ω に対し

$$\mathcal{O}(\Omega)_M\cong\mathcal{E}(\Omega)_M\cong\mathcal{D}'(\Omega)_M\cong\mathcal{B}(\Omega)_M$$

2. 1般に A-module M に対し、$I=\mathrm{ann}(M)$, $B=A/I$ と置くと、$(C_B)_M\cong C_M$

注意 1. M を B-module とする時、次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} M\times(C_B)_M & \xrightarrow[\langle\,,\,\rangle_B]{} & C_B \\ \wr\| & & \downarrow i^* \\ M\times C_M & \xrightarrow[\langle\,,\,\rangle_A]{} & C_A \end{array}$$

2. M を B-module とする時、$(C_B)_M$ に C_M を対応させる functor に対し、N を A-module とする時 C_N に対し、$(C_B)_{M\otimes_A B}$ を対応させる functor は、その adjoint functor になる。

§4. Cohomology 群

<u>Prop. 8.</u> Ω を1般に convex とは限らない、$\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$\mathcal{F}=\mathcal{E}$ 又は $\mathcal{D}'$ 又は $\mathcal{B}$ とします。$A=\mathbb{C}[X_1,\cdots X_n]$。

この時、任意 finite module Mに対し、

$$H^k(\Omega, \mathcal{F}_M) \cong \mathrm{Ext}_A^k(M, \mathcal{F}(\Omega)) \quad 。$$

証、

まず、$\mathrm{Hom}_A(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \ni \varphi$ に対し、$(\varphi((1,0\cdots0)), \cdots, \varphi((0,\cdots 0,1)))$ $\in \Gamma(\Omega\, \mathcal{F})^m \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}^m)$ を対応させる事により、functoriel に $\mathrm{Hom}(A^m, \mathcal{F}(\Omega)) \cong \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^m})$。

与へられたMを free resolution して、

$$0 \leftarrow M \leftarrow A^{m_0} \xleftarrow{P_0} A^{m_1} \xleftarrow{P_1} A^{m_2} \longleftarrow$$

すると対応して

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{F}(\Omega)) & \to & \mathrm{Hom}(A^{m_0}, \mathcal{F}(\Omega)) & \to & \mathrm{Hom}(A^{m_1}, \mathcal{F}(\Omega)) & \to & \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ 0 \to \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_M) & \to & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_0}}) & \to & \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_{A^{m_1}}) & \to & \end{array}$$

左exact だから、初項は等しくなり、又、chain complexの cohomology 群 も同型になる。 q.e.d.

§5. $\mathcal{E}(\Omega_1)$ と $\mathcal{E}(\Omega_2)$ が作用同型になる為の条件

§4. の事は、 領域Ω 全体での微分方程式の大域的な問題は、$\mathcal{F}(\Omega)$ のA-module としての構造だけによって決定される事を意味しています。

そこで、最後に、二つのdomain Ω_1, Ω_2, が与へられた時に、ring hom $\psi : A_1 \to A_2$ 及び、differentiable map $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ により、${}^a\varphi : \mathcal{E}(\Omega_2) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathcal{E}(\Omega_1)$

が φ-同型になる為の、必要充分条件を求めます。

<u>Prop. 9.</u> 記号は上記の通りとします。

$${}^a\varphi : \mathcal{E}(\Omega_2) \cong \mathcal{E}(\Omega_1) \quad \text{作用同型}$$

$\Longleftrightarrow$ φが1次変換

すなはち、Aを $\det A \neq 0$ なる実係数行列、$x=(x_1,\cdots,x_n)$ はΩ_1の座標系、$b=(b_1,\cdots,b_n)$ を実ベクトルとして

$$\varphi(x) = Ax + b$$

証. まず、次の <u>Lemma</u> から始めます。

<u>Lemma 10.</u> $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n] \ni P$ について

(*) $P(f\cdot g) = (Pf)g + f(Pg) \qquad {}^\forall f, g \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$

$\Longleftrightarrow$ Pは 斉一次式

証. 充分である事は明かです。

必要なる事。まず(*) に於て $f=g=1$ とおけば、$P1=0$。従って、Pは定数項を含まない。1次式の部分は差引いても(*)に変りはないから、Pは2次以上の項ばかりから成るとしてかまわない。nについて帰納法で示します。$n=0$なら問題ありません。

$n\geq 1$とし、$P=QX_1+R$ 但し、RはX_1を含まぬ多項式、と表示します。Rは$\mathbb{C}[x_2,\cdots,x_n]$上(*)を満足するので帰納法の仮定より$=0$。そこで再度 $P=(Q'X_1+R')X_1^\ell$、但 R'はX_1を含まぬ多項式とします。 $R'\neq 0$なので

$x_2,\cdots,x_n$ の多項式 π で、$R'\pi \neq 0$ なるものが存在します。
この時、(*)に於て、$f=x_1$, $g=x_1^{l-1}\pi$ と置き両辺比較すると、

$$0 \neq l!(R'\pi) = x_1 P(\pi x_1^{l-1}) + \pi x_1^{l-1} P x_1$$

しかるに右辺第一項は πx_1^{l-1} が x_1 に関し次数 l より少だから $=0$。第二項は、P が2次以上の項より成るから $=0$。
矛盾。∴ $P=0$ q.e.d.

注意. 上記の Lemma は、その証明から分る様に、任意の体係数の多項式環に於て、正しい。

Prop. の証明.

まず、$^a\varphi: \mathcal{E}(\Omega_2)\to\mathcal{E}(\Omega_1)$ が作用同型になるとは、φ が $\Omega_1\to\Omega_2$ の diffeomorphism を与へ（∵領域 Ω 及び、その differentiable map の Category は、$\mathcal{E}(\Omega)$ の $\mathbb{C}$-homomorphism の Category と等しい）かつ、

(**) $P(u\circ\varphi) = (\psi(P)\cdot u)\varphi$ $\quad \forall u\in\mathcal{E}(\Omega_2)$, $\forall P\in A_1 = \mathbb{C}[x_1\cdots x_n]$

となる事です。

(**) に於て、$P=\alpha\in\mathbb{C}$ とすると $\psi(\alpha)\cdot u=\alpha u$ $\forall u$ だから $\psi(\alpha)=\alpha$。

次に P が1次式とすると (**) を用いて

$$P(u\cdot v\circ\varphi) = (u\psi(P)v + v(\psi(P)u))\circ\varphi \quad \forall u,v\in\mathcal{E}(\Omega_2)$$

だから $\psi(P)u\cdot v = u(\psi(P)v) + v\psi(P)(u)$ $\quad \forall u,v\in\mathcal{E}(\Omega)$

従って lemma より $\psi(P)$ も1次式。

$\psi(X_i)=\sum_j a_{ij} X_j'$, $A=(a_{ij})$ と置く。1方 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ と分解しておく。(但 $\varphi_j = x_j'\circ\varphi$)

(**)より、$X_i\cdot\varphi_j = (\psi(X_i)\cdot x_j')\circ\varphi = a_{ij} = \mathrm{const}$

実数値函数 φ_j が 上記方程式を満すなら

$$\varphi_j = \sum_i x_i a_{ij} + b_j$$

$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ が Ω_1からΩ_2への diffeo. を与へている事より、A, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ の各成分は実数でありかつ、$\det A \neq 0$

q.e.d.

Cor. $^{\forall}M$ について $H^i(\Omega,\mathcal{E}_M)\cong H^i(\Omega',\mathcal{E}_{M'})$

$\Rightarrow$ ΩとΩ'は1次変換で互に写る。

この事は微分方程式が大域的に解ける等、cohomologicalな量をすべて保存する変換は1次変換以外にない事を示しています。

1. Ehrenpreis, L.: A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications. Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161~174, Jerusalem, 1961.

2. Komatsu, H.: Resolutions by Hyperfunctions of Sheaves of Solutions of Differential Equations with Constant Coefficients. Math. Annalen 176, 77–86 (1968)

3. S. Matsuura: Finite type system of partial differential operators and decomposition of solutions of partial differential equations. Katada Symposium. (1966)