数理解析研究所講究録
第 60 巻 1968 年 85-103

共分散行列の固有根と固有ベクトルの検定について

広島大 理 長尾寿夫

§1. 序

この小論の目的は多次元正規分布の共分散行列の固有値，固有ベクトルの検定の不偏性及び検定の仮説，対立仮説の下での漸近展開をあたえることである。仮説の下では漸近的に Chi-square 分布であり対立仮説の下では適当に正規化することにより正規分布となる。

§2. 不偏性

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ $(N>p)$ を p 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ からの random sample とする。共分散行列 Σ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ とし，それらに対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p$ とする。このとき次の仮説検定問題を考える。仮説 H：組 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \cdots, \lambda_{k0})$ かつ組 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k) = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \cdots, \gamma_{k0})$

対立仮説K：$(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\neq(\lambda_{10},\cdots,\lambda_{k0})$ または $(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)\neq(\gamma_{10},\cdots,\gamma_{k0})$ ただし λ_{i0},γ_{i0} は既知な量であり，組とは順序のついていない集合を表わす。これに対する修正された尤度比検定はR. P. Gupta (Ann. Inst. Stat. Math. 1967) があたえているように

$$(2.1)\quad \Lambda = \left|\frac{S}{n}\right|^{\frac{n}{2}}|\Theta_0|^{-\frac{n}{2}}\left|\frac{\Gamma_2' S\Gamma_2}{n}\right|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}\Gamma_{10}'S\Gamma_{10}\right]e^{\frac{nk}{2}}$$

である。ただし $S=\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'$，$\bar{x}=N^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha$，$\Theta_0=\mathrm{diag}(\lambda_{10},\cdots,\lambda_{k0})$，$\Gamma_{10}=[\gamma_{10},\cdots,\gamma_{k0}]$，$n=N-1$，$k\leq p$．また Γ_2 は $H=[\Gamma_{10},\Gamma_2]$ が直交行列となるものである。

かくて検定の acceptance region は

$$(2.2)\quad \omega=\left\{S \,\middle|\, |S|^{\frac{n}{2}}|\Theta_0|^{-\frac{n}{2}}|\Gamma_2'S\Gamma_2|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}\Gamma_{10}'S\Gamma_{10}\right]\geq c_\alpha\right\}$$

であたえられる。対立仮説Kの下で，S が領域 ω に入る確率は，S がウィシャート分布に従うことより

$$(2.3)\quad P_K(\omega)=C_{p,n}\int_{S\in\omega}|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}S\right]dS$$

である，$A=H'SH$ と変換すると

$$(2.4)\quad P_K(\omega)=C_{p,n}\int_{A\in\omega_1}|A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Omega|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Omega^{-1}A\right]dA$$

ただし $\Omega=H'\Sigma H$ であり，$\omega_1=\left\{A \,\middle|\, |A|^{\frac{n}{2}}|\Theta_0|^{-\frac{n}{2}}|A_{22}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}A_{11}\right]\geq c_\alpha\right\}$

ここでA_{11}, A_{12} はAと次の様に分割したものである。

$$(2.5)\qquad A = \begin{array}{c} \\ k\{ \\ p-k\{ \end{array}\!\!\begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{A_{11}}}^{k} & \overbrace{\phantom{A_{12}}}^{p-k} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}} \end{array}$$

R. P. Gupta [2] はΩをAの様に分割して$\Omega_{12}=0$のとき$A_{11\cdot2}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$と$A_{22}$が統計的に独立であることの別証明をAppendixであたえている。そこでウィシャート分布を次の様に分解している.

$$(2.6)\quad C_{p,n}|W|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{1}{2}(n-p+k)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{11\cdot2}^{-1}W]\,|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{1}{2}(p-k)}|A_{22}|^{\frac{k}{2}}$$

$$\times\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(V-B)'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(V-B)A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]$$

ただし $W=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $\Omega_{11\cdot2}=\Omega_{11}-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}$, $V=A_{12}A_{22}^{-1}$, $B=\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}$.

ゆえに(2.4)は

$$(2.7)\quad P_K(\omega)=C_{p,n}\int_{(W,V,A_{22})\in\omega_2}|W|^{\frac{1}{2}(n-p+k-k-1)}|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{1}{2}(n-p+k)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{11\cdot2}^{-1}W]\,|A_{22}|^{\frac{k}{2}}$$

$$\times\,|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{1}{2}(p-k)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(V-B)'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(V-B)A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}$$

$$\times\,|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{11\cdot2}^{-1}A_{22}]\,dW\,dV\,dA_{22}$$

ただし

(2.8) $\omega_2 = \{(W, V, A_{22}) \mid |W|^{\frac{n}{2}} |\Theta_0|^{-\frac{n}{2}} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}W - \frac{1}{2}\Theta_0^{-1}VA_{22}V'] \geq C_1\}$

$B = \Theta_0^{\frac{1}{2}}\Omega_{11\cdot2}^{-\frac{1}{2}}W\Omega_{11\cdot2}^{-\frac{1}{2}}\Theta_0^{\frac{1}{2}}$，$Y = \Theta_0^{\frac{1}{2}}\Omega_{11\cdot2}^{-\frac{1}{2}}(V - B)$ とすると Jacobian は

$|\partial(W, V)/\partial(B, Y)| = |\Omega_{11\cdot2}\Theta_0^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+1)}$.

かくて (2.7) は次の様に表わされる。

(2.9)

$$P_K(\omega) = C_{p,n}\int_{(B, Y, A_{22})\in\tilde{\omega}_2} |B|^{\frac{1}{2}(n-p+k-k-1)} |\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(n-p+k)} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}B] |\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(p-k)}$$

$$\times |A_{22}|^{\frac{k}{2}} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}Y'\Theta_0^{-1}YA_{22}] |A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}} |\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]$$

$$\times dB\,dY\,dA_{22},$$

ただし $\tilde{\omega}_2 = \{(B, Y, A_{22}) \mid (\Omega_{11\cdot2}^{\frac{1}{2}}\Theta_0^{-\frac{1}{2}}B\Theta_0^{-\frac{1}{2}}\Omega_{11\cdot2}^{\frac{1}{2}}, \Omega_{11\cdot2}^{\frac{1}{2}}\Theta_0^{-\frac{1}{2}}Y + B, A_{22}) \in \omega_2\}$.

その結果

$$(2.10)\ P_H(\omega) - P_K(\omega) = C_{p,n}\left\{\int_{(B, Y, A_{22})\in\omega_2} - \int_{(B, Y, A_{22})\in\tilde{\omega}_2}\right\} |B|^{\frac{1}{2}(n-p+k-k-1)}$$

$$\times |\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(n-p+k)} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}B] |\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(p-k)} |A_{22}|^{\frac{k}{2}} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}Y'\Theta_0^{-1}YA_{22}]$$

$$\times |A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}} |\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}} \mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\, dB\,dY\,dA_{22}$$

$$= C_{p.n}\left\{\int_{(B,\Upsilon,A_{22})\in\omega_2-\omega_2\cap\tilde{\omega}_2}-\int_{(B,\Upsilon,A_{22})\in\tilde{\omega}_2-\tilde{\omega}_2\cap\omega_2}\right\}|B|^{\frac{1}{2}(n-p+k-k-1)}$$

$$\times|\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(n-p+k)}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Theta_0^{-1}B]\,|\Theta_0|^{-\frac{1}{2}(p-k)}|A_{22}|^{\frac{k}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Upsilon'\Theta_0^{-1}\Upsilon A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}$$

$$\times|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\,dB\,d\Upsilon\,dA_{22}$$

ところで $(B,\Upsilon,A_{22})\in\omega_2$ に対して $|B|^{\frac{1}{2}(n-p+k-k-1)}|\Theta_0|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}\times(B+\Upsilon A_{22}\Upsilon')]\geq C_\alpha|B|^{-\frac{1}{2}(p+1)}$ が成り立つ。だからして積分 $\int|B|^{-\frac{1}{2}(p+1)}|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\frac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\,dB\,d\Upsilon\,dA_{22}$ は存在するから

$$(2.11)\quad P_H(\omega)-P_K(\omega)\geq C_{p,n}C_\alpha\left\{\int_{(B,\Upsilon,A_{22})\in\omega_2}-\int_{(B,\Upsilon,A_{22})\in\tilde{\omega}_2}\right\}|B|^{-\frac{1}{2}(p-k+k-1)}$$

$$\times|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\,dB\,d\Upsilon\,dA_{22}.$$

Jacobian を計算することにより $\tilde{\omega}_2$ 上の積分は ω_2 上の積分に等しいから $P_H(\omega)\geq P_K(\omega)$ となり検定 ω の不偏性が示される。証明の方法は Sugiura & Nagao [3] によるものを応用したものである。

§3. 検定統計量の漸近展開

$p=k$ の場合，統計量(2.1)の仮説の下，対立仮説の下での漸近展開はSugiura [4]によってあたえられている。

$k \leq p$ の場合　一般の場合に l 次積率をもとめることからはじめる。

定理3．1　統計量(2.1)の積率は次であたえられる。

$$(3.1)\quad E[\Lambda^l] = C_{p,n} \cdot C^{-1}_{k,\,n+nl-p+k} \cdot C^{-1}_{p-k,\,n} \cdot \exp[nkl/2]\, n^{-\frac{nkl}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}k(p-k)}$$

$$\times |\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}} |\Omega|^{-\frac{n}{2}} |\Omega^{-1}_{11\cdot 2} + l\Theta_0^{-1}|^{-\frac{1}{2}(n+nl)} |\Omega^{-1}_{22} + B'\Omega^{-1}_{11\cdot 2}B - B'\Omega^{-1}_{11\cdot 2}(\Omega^{-1}_{11\cdot 2} + l\Theta_0^{-1})^{-1}$$

$$\times \Omega^{-1}_{11\cdot 2} B|^{-\frac{n}{2}},$$

ただし

$$(3.2)\quad C^{-1}_{p,n} = \pi^{p(p-1)/4} \cdot 2^{np/2} \prod_{j=1}^{p} \Gamma[(n-j+1)/2]$$

$$(3.3)\quad \Omega = H'\Sigma H = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \hline \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array}\right)$$

証明　Sはウィシャート分布 $W(\Sigma, n)$ にしたがうことより

$$(3.4)\quad E[\Lambda^l] = C_{p,n} |\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}} \exp[nkl/2]\, n^{-\frac{nkl}{2}} \int |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}S]$$

$$\times |S|^{\frac{nl}{2}} |\Gamma_2' S \Gamma_2|^{-\frac{nl}{2}} \operatorname{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}\Gamma_{10}' S \Gamma_{10}]\, dS$$

$A=H'SH$ と変換すると Jacobian は 1 であるから

$$(3.5)\quad E[\Lambda^l]=C_{p,n}|\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}}\exp[nkl/2]\,n^{-\frac{nkl}{2}}\int|A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Omega|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega^{-1}A]$$

$$\times|A|^{\frac{nl}{2}}|A_{22}|^{-\frac{nl}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}A_{11}]\,dA\,.$$

(2.6)の様にウィシャートと表現すると

$$(3.6)\quad E[\Lambda^l]=C_{p,n}|\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}}\exp[nkl/2]\,n^{-\frac{nkl}{2}}\int|A_{11\cdot2}|^{\frac{1}{2}(n+nl-p-1)}|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})A_{11\cdot2}]\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(A_{12}A_{22}^{-1}-\mathbb{B})'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$-\mathbb{B})A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\,\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]$$

$$\times\,dA_{11}dA_{12}dA_{22}\,.$$

$W=A_{11\cdot2}$, $V=A_{12}A_{22}^{-1}$ とおくと Jacobian $|\partial(W,V)/\partial(A_{11},A_{12})|=|A_{22}|^{-k}$ であり A が positive definite と $A_{11\cdot2}$ と A_{22} が positive definite と同値であることに注意して

$$(3.7)\quad E[\Lambda^l]=C_{p,n}|\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}}\exp[nkl/2]\,n^{-\frac{nkl}{2}}\int|W|^{\frac{1}{2}(n+nl-p-1)}|\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})W]\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(V-\mathbb{B})'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(V-\mathbb{B})A_{22}]$$

$$\times |A_{22}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}} \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]\,\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}VA_{22}V']\,|A_{22}|^{k} dW dV dA_{22}$$

W が positive definite 上で W に関して積分をおこなうと

$$(3.8)\quad E[\Lambda^l] = C_{p,n}|\Theta_0|^{-\frac{nl}{2}} \exp[nkl/2]\, n^{-\frac{nkl}{2}} |\Omega_{11\cdot2}|^{-\frac{n}{2}} |\Omega_{11\cdot2}^{-1} + l\Theta_0^{-1}|^{-\frac{1}{2}(n+nl-p+k)}$$

$$\times C^{-1}_{k,\,n+nl-p+k} \int \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(V-\mathbb{B})'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(V-\mathbb{B})A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{k}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}$$

$$\times VA_{22}V']\,|A_{22}|^{k} dW dV dA_{22}.$$

次に V に関する次の積分を考える。

$$(3.9)\quad \int \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(V-\mathbb{B})'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(V-\mathbb{B})A_{22}]\,|A_{22}|^{\frac{k}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}VA_{22}V']\,dV,$$

ただし積分の範囲は、$k(p-k)$ 次元上の空間である。$Y = VA_{22}^{\frac{1}{2}}$ とおくと Jacobian は $|\partial Y/\partial V| = |A_{22}|^{\frac{k}{2}}$ であるから (3.9) は

$$(3.10)\quad \int \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(Y-\mathbb{B}A_{22}^{\frac{1}{2}})'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(Y-\mathbb{B}A_{22}^{\frac{1}{2}})]\,\mathrm{etr}[-\tfrac{l}{2}\Theta_0^{-1}YY']\,dY$$

$$= \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\mathbb{B}'\Omega_{11\cdot2}^{-1}\mathbb{B}A_{22}] \int \mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})YY']\,\mathrm{etr}[\Omega_{11\cdot2}^{-1}\mathbb{B}A_{22}^{\frac{1}{2}}Y']\,d$$

となる。ここで良く知られた結果を使う.

$$(3.11)\quad \int \mathrm{etr}[-RXX']\,\mathrm{etr}[SX']\,dX = \pi^{\frac{1}{2}mn}\mathrm{etr}[\tfrac{1}{4}R^{-1}SS']\,|R|^{-\frac{n}{2}}$$

ここで積分の範囲は mn 次元の空間で R は positive definite で S, X ともに $m\times n$ の行列である。(3.11) と (3.10) に使うと

$$(3.12)\quad (2\pi)^{\frac{1}{2}k(p-k)}|\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1}|^{-\frac{1}{2}(p-k)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}BA_{22}]\,\mathrm{etr}[\tfrac{1}{2}B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}$$

$$\times(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})^{-1}\Omega_{11\cdot2}^{-1}BA_{22}].$$

最後に A_{22} に関する次の積分を考える。

$$(3.13)\quad (2\pi)^{\frac{1}{2}k(p-k)}|\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1}|^{-\frac{1}{2}(p-k)}\int|A_{22}|^{\frac{1}{2}\{n-(p-k)-1\}}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Omega_{22}^{-1}A_{22}]$$

$$\times\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}BA_{22}]\,\mathrm{etr}[\tfrac{1}{2}B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})^{-1}\Omega_{11\cdot2}^{-1}BA_{22}]\,dA_{22}.$$

行列 $\{\Omega_{22}^{-1}+B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}B-B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})^{-1}\Omega_{11\cdot2}^{-1}B\}$ が positive definite であることに注意して，A_{22} が ウイシャート分布となるように修正することによって (3.13) は次の如くなる。

$$(3.14)\quad (2\pi)^{\frac{1}{2}k(p-k)}|\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1}|^{-\frac{1}{2}(p-k)}C_{p-k,n}^{-1}|\Omega_{22}|^{-\frac{n}{2}}|\Omega_{22}^{-1}+B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}B-B'\Omega_{11\cdot2}^{-1}$$

$$\times(\Omega_{11\cdot2}^{-1}+l\Theta_0^{-1})^{-1}\Omega_{11\cdot2}^{-1}B|^{-\frac{n}{2}}.$$

かくて定理3.1は示された。

さて定理3.1の結果を使うことによって仮説の下で $-2\log\Lambda$ の漸近展開をあたえる。

9 1

極限分布はR. P. Gupta [2]によるように自由度 $k(k+1)/2 + k(p-k)$ のchi-square分布に従うことが知られている。

仮説の下では

$$(3.15)\quad \Omega = \begin{pmatrix} \Theta_0 & 0 \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

となるから $-2\log\Lambda$ の特性関数は

$$(3.16)\quad \Phi(t) = \left(\frac{2e}{n}\right)^{-itnk} \frac{\prod_{j=1}^{k} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-p+k+1-j)-itn\right]}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-p+k+1-j)\right]} (1-2it)^{-\frac{kn}{2}+itnk}$$

である。Anderson [1] において見られるようにガンマー関数に対して次の公式がある。

$$(3.17)\quad \log\Gamma[x+h] = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+h-\frac{1}{2}\right)\log x - x - \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^r B_{r+1}(h)}{r(r+1)x^r} + O(|x|^{-m-1})$$

上の公式はhを固定してxの十分大きな値に対して成り立つ。$B_r(h)$ はr次のベルヌーイ多項式でありそのうちのいくつかを下にしるす。

$$(3.18)\quad \begin{aligned} &B_2(h) = h^2 - h + \frac{1}{6}, \qquad B_3(h) = h^3 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{h}{2} \\ &B_4(h) = h^4 - 2h^3 + h^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

(3.17)を(3.16)に応用することにより

$$(3.19)\quad \log\Phi(t) = \left\{-\frac{1}{2}k(p-k) - \frac{1}{4}k(k+1)\right\}\log(1-2it) + \frac{B_2}{n}\left\{(1-2it)^{-1} - 1\right\}$$

$$-\frac{2B_3}{2n^2}\{(1-2it)^{-2}-1\}+\frac{2B_4}{3n^3}\{(1-2it)^{-3}-1\}+O(n^{-4})$$

ただし

$$B_2=\frac{1}{4}k(p-k-1)(p+2)+\frac{1}{24}k(2k^2+9k+11)$$

$$(3.20)\quad B_3=\frac{1}{8}k(k-p+1)\{(k-p+1)^2-\frac{1}{2}(k+1)(k-3p+2)+3p+2\}$$

$$B_4=\frac{k}{16}(k-p+1)\{(k-p+1)^3-2(k-p+1)^2(k+3)+(k-p+1)(2k^2+9k+11)$$

$$-(k+1)(k+2)(k+3)\}+\frac{k}{480}(6k^4+45k^3+110k^2+90k+3)$$

ゆえに(3.19)は次の様になる。

$$(3.21)\quad \phi(t)=(1-2it)^{-\frac{1}{2}k(p-k)-\frac{1}{4}k(k+1)}\Big[1+\frac{1}{n}B_2\{(1-2it)^{-1}-1\}+\frac{1}{6n^2}$$

$$\times\{(3B_2^2-4B_3)(1-2it)^{-2}-6B_2^2(1-2it)^{-1}+(3B_2^2+4B_3)\}$$

$$+\frac{1}{6n^3}\{(4B_4-4B_2B_3+B_2^3)(1-2it)^{-3}+B_2(4B_3-2B_2^2)(1-2it)^{-2}$$

$$+B_2(4B_3+3B_2^2)(1-2it)^{-1}-(4B_2+4B_2B_3+B_2^3)\}\Big]+O(n^{-4}).$$

ここで$(1-2it)^{-f/2}$が自由度fのchi-square分布の特性関数であることを使って(3.21)を反転することにより次の結果を得る。

定理3.2. 仮説の下で $-2\log\Lambda$ の漸近展開は

$$
\begin{aligned}
(3.22)\quad P(-2\log\Lambda \leq x) = {} & P(\chi_f^2 \leq x) + \frac{1}{n}B_2\{P(\chi_{f+2}^2 \leq x) - P(\chi_f^2 \leq x)\} \\
& + \frac{1}{6n^2}\{(3B_2^2 - 4B_3)P(\chi_{f+4}^2 \leq x) - 6B_2^2 P(\chi_{f+2}^2 \leq x) \\
& + (3B_2^2 + 4B_3)P(\chi_f^2 \leq x)\} + \frac{1}{6n^3}\{(4B_4 - 4B_2B_3 + B_2^3)P(\chi_{f+6}^2 \leq x) \\
& + B_2(4B_3 - 3B_2^2)P(\chi_{f+4}^2 \leq x) + B_2(4B_3 + 3B_2^2)P(\chi_{f+2}^2 \leq x) \\
& - (4B_2 + 4B_2B_3 + B_2^3)P(\chi_f^2 \leq x)\} + O(n^{-4})
\end{aligned}
$$

ただし $f = \frac{1}{2}k(k+1) + k(p-k)$ であり χ_f^2 は chi-squared 分布を表わし，B_r は(3.20)であたえられる。

上の結果は $p=k$ のとき Sugiura [4] の結果に一致する。

次に対立仮説Kの下での漸近展開を得るために Sugiur[4] と同じように $-2n^{-\frac{1}{2}}\log\Lambda$ の特性関数を考える。その特性関数は次であたえられる。

$$(3.23)\quad \phi_K(t) = C_1(t)C_2(t)C_3(t)$$

ただし

$$(3.24)\quad C_1(t) = \left(\frac{2e}{n}\right)^{-\sqrt{n}kit}\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}(n - 2it\sqrt{n} - p + k + 1 - j)]}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}(n - p + k + 1 - j)]}|\Theta_0|^{\sqrt{n}it}|\Omega|^{-\frac{n}{2}},$$

$$(3.25)\quad C_2(t) = \left|\Omega_{11\cdot2}^{-1} - \frac{2it}{\sqrt{n}}\Theta_0^{-1}\right|^{-\frac{n}{2} + \sqrt{n}it}$$

(3.26) $C_3(t) = \left|\Omega_{22}^{-1} + B'\Omega_{11\cdot 2}^{-1}B - B'\Omega_{11\cdot 2}^{-1}\left(\Omega_{11\cdot 2}^{-1} - \frac{2it}{\sqrt{n}}\Theta_0^{-1}\right)^{-1}\Omega_{11\cdot 2}^{-1}B\right|^{-\frac{n}{2}}.$

(3.24) に対して (3.17) を適要すると $C_1(t)$ は次であたえられる。

$$\text{(3.27)}\quad \log C_1(t) = -\frac{n}{2}\log|\Omega| + \sqrt{n}\,it\log|\Theta_0| - itk\sqrt{n} + k(it)^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\left(pk - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}\right)it + \frac{2k}{3}(it)^3\right\} + \frac{1}{n}\left\{\left(pk - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}\right)(it)^2 + \frac{2k}{3}(it)^4\right\} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

$C_2(t)$ に対しては次の公式を使う。

$$\text{(3.28)}\quad -\log\left|I - \frac{Z}{n}\right| = \sum_{r=1}^{\ell} n^{-r}\,\mathrm{tr}\,Z^r/r + O(n^{-\ell-1}).$$

上の公式は Z が Positive definite に対しては成り立つ.
かくて

$$\text{(3.29)}\quad \log C_2(t) = \left(\frac{n}{2} - \sqrt{n}\,it\right)\log|\Omega_{11\cdot 2}| + it\sqrt{n}\,\mathrm{tr}\,\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2} + (it)^2\left\{\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2})^2 - 2\,\mathrm{tr}\,\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2}\right\} + \frac{(it)^3}{\sqrt{n}}\left\{\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2})^3 - 2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2})^2\right\} + \frac{(it)^4}{n}\left\{2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2})^4 - \frac{8}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot 2})^3\right\} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

次に (3.26) に対して $(I - n^{-\frac{1}{2}}Z)^{-1} = \sum_{r=0}^{2\ell+1} n^{-\frac{r}{2}} Z^r + O(n^{-\ell-1})$ と (3.28) を使うことによって

$$\text{(3.30)}\quad \log C_3(t) = -\frac{n}{2}\log|\Omega_{22}| + it\sqrt{n}\,\mathrm{tr}\,F'CF + (it)^2\left\{2\,\mathrm{tr}\,G^{(2)} + \mathrm{tr}\,G^{(1)^2}\right\}$$

$$+\frac{4(it)^3}{\sqrt{n}}\left\{trG^{(3)}+trG^{(1)}G^{(2)}+\frac{1}{3}trG^{(1)^3}\right\}+\frac{4(it)^4}{n}\left\{2trG^{(4)}+trG^{(2)^2}+2trG^{(1)}G^{(3)}\right.$$

$$\left.+2trG^{(1)}G^{(3)}+2trG^{(1)^2}G^{(2)}+\frac{1}{2}trG^{(1)^4}\right\}+O(n^{-\frac{3}{2}})$$

ただし $G^{(i)}=\mathbb{F}'\mathbb{C}^i\mathbb{F}$ であり $\mathbb{F}=\Omega_{11\cdot2}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{B}\Omega_{22}^{\frac{1}{2}}$ である．

ゆえに上の三つの結果によって

(3.31) $\log\phi(t)=\sqrt{n}E_1+E_2+\frac{1}{\sqrt{n}}E_3+\frac{1}{n}E_4+O(n^{-\frac{3}{2}})$

ただし

(3.32) $E_1=it\left\{tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}-I)-\log|\Omega_{11\cdot2}|+trG^{(1)}+\log|\Theta_0|\right\}$,

(3.33) $E_2=(it)^2\left\{tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}-I)^2+2trG^{(2)}+trG^{(1)^2}\right\}$,

(3.34) $E_3=it(pk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2})+(it)^3\left\{\frac{2k}{3}+tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-2tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2\right.$

$$\left.+4trG^{(3)}+4trG^{(1)}G^{(2)}+\frac{4}{3}trG^{(1)^3}\right\}$$

(3.35) $E_4=(it)^2(pk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2})+(it)^2\left\{\frac{2k}{3}+2tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^4-\frac{8}{3}tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3\right.$

$$\left.+8trG^{(4)}+4trG^{(2)^2}+8trG^{(1)}G^{(3)}+8trG^{(1)^2}G^{(2)}+2trG^{(1)^4}\right\}.$$

これより統計量 $\Lambda^*=-2n^{-\frac{1}{2}}\log\Lambda-\sqrt{n}\{tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}-I)-\log|\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}|$ $+trG^{(1)}\}$ は平均 0，分散 $\tau^2=2tr(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}-I)^2+4trG^{(2)}+2trG^{(1)^2}$ に

法則収束している。さらに λ^*/τ の特性関数を n^{-1} まで展開できる。

$$(3.36)\quad \phi_{\lambda^*/\tau}(t)=\exp[(it)^2/2]\{1+n^{-\frac{1}{2}}A_1+n^{-1}A_2\}+O(n^{-\frac{3}{2}})$$

ただし A_1, A_2 は次であたえられる。

$$(3.37)\quad A_1=(1/2)it\tau^{-1}(2pk-k^2+k)+(1/3)(it)^3\tau^{-3}\{2k+4\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-6\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2$$
$$+12\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}+12\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)3}\}$$

$$(3.38)\quad A_2=(it)^2\tau^{-2}\{(pk-\tfrac{k^2}{2}+\tfrac{k}{2})+\tfrac{1}{2}(pk-\tfrac{k^2}{2}+\tfrac{k}{2})^2\}+(it)^4\tau^{-4}\{(pk-\tfrac{k^2}{2}+\tfrac{k}{2})$$
$$\times(\tfrac{2k}{3}+\tfrac{4}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2+4\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}$$
$$+\tfrac{4}{3}\mathrm{tr}\,G^{(1)3})+\tfrac{2k}{3}+2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^4-\tfrac{8}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3+8\,\mathrm{tr}\,G^{(4)}$$
$$+4\,\mathrm{tr}\,G^{(2)2}+8\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(3)}+8\,\mathrm{tr}\,G^{(1)2}G^{(2)}+2\,\mathrm{tr}\,G^{(1)4}\}+\tfrac{1}{2}(it)^6\tau^{-6}$$
$$\times\{\tfrac{2k}{3}+\tfrac{4}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2+4\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}$$
$$+\tfrac{4}{3}\mathrm{tr}\,G^{(1)3}\}^2$$

かくて特性関数を反転することによって次の結果を得る。

定理3.2 対立仮説の下で(2.1)であたえられる $-2\log\Lambda$ の分布は漸近的に

$$(3.39)\quad P\left[n^{-\frac{1}{2}}\tau^{-1}\left[-2\log\Lambda-\sqrt{n}\left\{\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}-I)-\log|\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}|+\mathrm{tr}\,G^{(1)}\right\}\right]\leq x\right]$$

$$=\Phi(x)-n^{-\frac{1}{2}}\Big[(1/2)\tau^{-1}(2pk-k^2+k)\Phi^{(1)}(x)+(1/3)\tau^{-3}\{2k+4\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3$$

$$-6\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2+12\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}+12\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)3}\}\Phi^{(3)}(x)\Big]$$

$$+n^{-1}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{g_{2\alpha}}{\tau^{2\alpha}}\Phi^{(2\alpha)}(x)+O(n^{-\frac{3}{2}})$$

ただし g_2, g_4, g_6 は次によってあたえられる。

$$(3.40)\quad g_2=\left(pk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(pk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\right)^2$$

$$(3.41)\quad g_4=\left(pk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\right)\Big(\frac{2k}{3}+\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2+4\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}$$

$$+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}+\frac{4}{3}\mathrm{tr}\,G^{(1)3}\Big)+\frac{2k}{3}+2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^4-\frac{8}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3$$

$$+8\,\mathrm{tr}\,G^{(4)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(2)2}+8\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(3)}+8\,\mathrm{tr}\,G^{(1)2}G^{(2)}+2\,\mathrm{tr}\,G^{(1)4}$$

$$(3.42)\quad g_6=\frac{1}{2}\Big\{\frac{2k}{3}+\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^3-2\,\mathrm{tr}(\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2})^2+4\,\mathrm{tr}\,G^{(3)}+4\,\mathrm{tr}\,G^{(1)}G^{(2)}$$

$$+\frac{4}{3}\mathrm{tr}\,G^{(1)3}\Big\}^2$$

ここで $\Phi(x)$ は標準正規分布関数を表わし $\Phi^{(i)}(x)$ は i-回微分を表わす。$G^{(i)}=\mathbb{F}\mathbb{C}^{i}\mathbb{F}$, $\mathbb{F}=\Omega_{11\cdot2}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{B}\Omega_{22}^{\frac{1}{2}}$, $\mathbb{C}=\Omega_{11\cdot2}^{\frac{1}{2}}\Theta_0^{-1}\Omega_{11\cdot2}^{\frac{1}{2}}$ である。

§4. 数値例

最後に漸近展開の結果を使って，二,三の power の数値例をのべる。

Example 4.1. 定理3.2 の結果を使って，n^{-1}, n^{-2}, n^{-3} までの correction factor をそれぞれ d_1, d_2, d_3 とすると

$$(4.1)\quad d_1 = (1 + 2B_2/nf)^{-1}$$

$$(4.2)\quad d_2 = f\cdot(f + 2B_2/n - 8B_3/3n^2)^{-1}$$

$$(4.3)\quad d_3 = f\cdot\left[f + 2B_2/n - 8B_3/3n^2 + \{(3B_2^2 - 4B_3)(f+4) - 6B_2^2(f+2) + (3B_2^2 + 4B_3)f\}/6n^2\right]^{-1}$$

である。$p=3$, $k=1$, $n=30$ のとき

$$(4.4)\quad \begin{aligned} &P[-2\log\Lambda \geq 7.8160] = 0.0593 \\ &P[-2d_1\log\Lambda \geq 7.8160] = 0.0505 \\ &P[-2d_2\log\Lambda \geq 7.8160] = 0.0500 \\ &P[-2d_3\log\Lambda \geq 7.8160] = 0.0500 \end{aligned}$$

となる。だから5% pointを求めるのに correction factor d_2 を使うことにする。

次に数値的なpowerは変換されたΩの下で求めることにして対立仮説 K: $\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ をとるとする。$(\alpha > 1)$

Example 4.2. $p=3$, $k=1$, $n=30$とし，仮説$H:\theta_1=1$として対立仮説Kを上のようにとると，ただし$P[-2d_2\log\Lambda\geq 7.8160]=0.0500$

	$\alpha=1.5$	$\alpha=2.0$	$\alpha=2.5$
first term	0.5399	0.5474	0.5704
Second term	0.0591	0.0437	0.0312
third term	−0.0003	0.0002	0.0007
approx. power	0.599	0.591	0.6023

であたえられる。

Example 4.3. $p=3$, $k=2$, $n=30$とし，仮説$H:\theta_1=1$, $\theta_2=2$とし，対立仮説を上のようにとり，$P[-2d_2\log\Lambda\geq 10.7754]=0.0500$とすると

	$\alpha=1.5$	$\alpha=2.0$	$\alpha=2.5$
first term	0.5042	0.5100	0.5400
Second term	0.0982	0.0596	0.0368
third term	−0.0006	−0.0014	−0.0043
approx. power	0.602	0.5682	0.573

であたえられる。

REFERENCES

[1] Anderson ,T.W. (1956).An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.Wiley, New York

[2]Gupta,R.P.(1967).Laten roots and vectors of a Wishart matrix Ann. Inst. Statist. vol.19, 157-165.

[3]Sugiura,N.and Nagao,H.(1967).Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices. Submitted to Ann Math. Statist.

[4]Sugiura,N. (1968).Asymptotic expantions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrices.Univ. of North Carolina,Chapel Hill,mimeo series No.574.