数理解析研究所講究録
第61巻 1968年 25-45

Abstract harmonic function と integral representation

早大 教育 和田淳蔵

§1. 序

function algebra の理論は、disk algebra すなわち複素平面の単位円の上で定義された複素値連続関数で、その内部に analytic に拡張出来るものの全体のなす環のもつ諸性質に負う所が多い。今 disk algebra を A_0 としたとき、$f \in A_0$ に対して f の実数部分 $Re f$ は勿論単位閉円板で考えると連続でかつ、単位開円板では harmonic function となっている。また $Im f$ でも同様なことがいえる。すなわち $Re f$ は continuous conjugate function をもつ harmonic function である。A を一般の compact Hausdorff 空間の上の function algebra としたとき、$f \in A$ に対して $Re f$ は continuous conjugate をもつ harmonic function であると解釈出来る。$Re A = \{Re f : f \in A\}$ としたとき $Re A$ に関する研究が非常に多くなされているが、§2 においてそのうちの二、三のものに

関して考える。とくに Hoffman and Wermer の定理、Wermer の定理に関連した事柄について考える。つぎに最近 Bear, Gleason などによつて研究されている compact Hausdorff 空間の開集合の上で定義された Abstract harmonic function についての理論、それに関する Abstract potential theory などについて述べる。これは function algebra というよりは、compact Hausdorff 空間の上の実数値連続関数からなる線型空間の上でなされる。とくにその線型空間 A の Šilov 境界を Γ としたとき $\Delta = X \sim \Gamma$ が1つの part (function algebra における Gleason part を一般化したもの) になつている場合に、Δ に Brelot の axiomatic potential theory の convergence axiom と同等な条件を入れることにより、Δ の上の Abstract harmonic function についての理論を発展さす。Δ の上の harmonic function についての integral representation をも考察する。

§2. Re A.

§1 で述べたように、A を compact Hausdorff 空間の上の function algebra としたとき、Re A は continuous conjugate をもつ harmonic function の全体と考えることが出来る。この Re A について、つぎの二つの定理はよく知られている。そしてどちらも Stone – Weierstrass の定理の拡張となつてい

る。

定理（Hoffman and Wermer [17]）。$\mathrm{Re}\,A$ が $C(X)$ で closed ならば $A = C(X)$。

定理（Wermer [24]）。$\mathrm{Re}\,A$ が ring をなせば $A = C(X)$ となる。

この Wermer の定理はつぎのことを示している：$A \neq C(X)$ のとき $\mathrm{Re}\,A$ に関数 u が存在し、その二乗 u^2 は $\mathrm{Re}\,A$ に属さない。なんとなれば $\mathrm{Re}\,A$ の任意の関数 u に対して $u^2 \in \mathrm{Re}\,A$ とすれば、$\mathrm{Re}\,A \ni u, v$ に対して $uv = \frac{1}{4}((u+v)^2 - (u-v)^2) \in \mathrm{Re}\,A$ となるからである。

上の Hoffman and Wermer の定理は A. Browder [13] によって簡単な証明が与えられ、また最近 Arenson [1], Sidney and Stout [22] によってその拡張が考えられた。その Sidney and Stout の定理はつぎのようである。

定理（Sidney and Stout）A を X の上の function algebra で、E を X の closed set とする。もし $\mathrm{Re}\,A|E$ が $C_R(E)$ で closed ならば $A|E = C(E)$ となる。

この定理は、つぎの定理の系として証明される。

定理　A を X の上の function algebra で、E を X の closed subset とする。もし $\mathrm{Re}\,A|E = C_R(E)$ ならば $A|E = C(E)$ となる。

この定理は Hoffman and Wermer の定理の拡張になっていることは明らかであるが、Wermer の定理の拡張にはなっていないことをつぎに例で示す。

(例) X を単位閉円板とし、A を X の上で連続で X の内点で analytic な複素値関数全体のなす function algebra とする。いま $E=[-1,1]$ とおく。ここで $\mathrm{Re}\,A|E$ は ring をなしていることを示す。なんとなれば $\mathrm{Re}\,A|E$ は symmetric である：$f\in A$ で $\|f-\sum a_i z^i\|\to 0$ としたとき $\|g-\sum \bar{a}_i z^i\|\to 0$ となるような $g\in A$ が存在して、E の上では $g=\bar{f}$ となる。このことから $\mathrm{Re}\,A|E$ は ring となるが、$A|E$ は $C(E)$ と一致しない。なんとなれば $f(\frac{1}{n})=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ となる $f\in A$ は一致の定理より当然恒等的に 0 とならねばならぬからである。

つぎに $\mathrm{Re}\,A$ についての Arenson の結果、およびそれから出てくるものについて述べる。

1° $u\in \mathrm{Re}\,A$ とする。$u\in A$ となるための必十条件はすべての実数値連続関数 (直線上で定義された) f に対して $f\circ u\in \mathrm{Re}\,A$ となることである。ここで $(f\circ u)(x)=f(u(x))$ である。

これの系としてつぎが証明される。

2° A_1, A_2 を X の上の二つの function algebra とする。

そのとき $\mathrm{Re}\,A_1 = \mathrm{Re}\,A_2$ となれば A_1 と A_2 の Šilov の partition および Bishop の partition はおのおの一致する。

ここで A を任意の function algebra としたとき、Šilov の partition とは、X の二点 x, y が $x \sim y$ であることを A の任意の実関数 f で $f(x) = f(y)$ で定義する。この同値関係による同値類をいう。Bishop の partition は X を maximal antisymmetric set で別けたものである。

Glicksberg [16] はつぎのことを示した。F を closed G_δ set とし、$\mu \perp A$ となる finite complex Baire measure (X の上の) μ に対して $\chi_F \mu \perp A$ となるとすれば F は A の peak set である。ここで $\mu \perp A$ はすべての $f \in A$ で $\int f d\mu = 0$ となること。F は A の peak set とは、ある $f \in A$ が存在して $F = \{x \in X : f(x) = 1\}$ かつ $|f(x)| < 1$ $(x \notin F)$ のときにいう。この Glicksberg の結果を用いて

3° $\mathrm{Re}\,A_1 = \mathrm{Re}\,A_2$ となれば A_1 の peak sets と A_2 の peak sets とは一致する。

また 2° からつぎのことが容易に求められる。

4° A_1, A_2 を X の上の二つの function algebra とし、$A_1 \subset A_2$ かつ $\mathrm{Re}\,A_1 = \mathrm{Re}\,A_2$ とする。そのときは $A_1 = A_2$ となる。

§3 Harmonic class

あとの節のために Brelot の axiom と、それに関する P. A. Loeb and B. Walsh [18] の定理について述べる。

W を locally compact Hausdorff 空間で、連結かつ局所連結そして compact でないとする。H は W の中のある開集合をその domain にもつ実数値連続関数の族であって、W の中の任意の開集合 Ω に対して Ω をその domain としてもつような H の中の関数の集り H_Ω は実線型空間をなすと仮定する。

W の中の開集合 Ω が H に関して正則（regular）であるとは、$\overline{\Omega}^W$ が compact で $\partial\Omega$（Ω の topological boundary）の上で定義された任意の実数値連続関数 f に対して、つぎのような $\overline{\Omega}^W$ の上で定義された連続関数 h が unique に存在する、すなわち

$$h|\partial\Omega = f,\quad h|\Omega \in H \quad \text{そして} \quad f \geqq 0 \text{ なら } h \geqq 0.$$

また H が W の上の harmonic class であるとは、つぎの三つの axiom をみたすときであるとする（Brelot [12]）。

Axiom I. open domain Ω ($\subset W$) をもつ関数 g に対して、Ω の任意の点 x で、ある $h \in H$ とある開集合 Ω_1 が $x \in \Omega_1 \subset \Omega$ で $g|\Omega_1 = h|\Omega_1$ のように存在すれば、$g \in H$ となる。

Axiom II. Wでは正則な region (= non empty connected open set) が開集合の基となっている。

Axiom III. ΩをWの中の region とし、$\mathfrak{F}$をH_Ωの中の任意の ordered increasing directed family とすれば、$\mathfrak{F}$の upper envelop は$+\infty$であるか、またはH_Ωの中の一つの関数である。

Constantinescu and Cornea [4] は上の Axiom I, II のもとで Axiom III はつぎのどちらかに同等であることを証明した。

Axiom III$_1$ ΩをWの中の region とする。$\{h_n\}$をH_Ωの中の任意の単調増加関数列とすれば、$\lim_{n\to\infty} h_n \equiv +\infty$か、または$\lim_{n\to\infty} h_n \in H_\Omega$.

Axiom III$_2$ ΩをWの中の region とし、KをΩの中の compact 部分集合、$x_0 \in K$とする。そのときつぎのような定数M ($\geqq 1$) が存在する：すべての$h \in H_\Omega$, $h \geqq 0$と任意の$x \in K$に対して

$$h(x) \leqq M \cdot h(x_0).$$

ここで Axiom III$_1$ は Harnack principle を表わし、Axiom III$_2$ は弱い意味のH_Ωに関する Harnack inequality を表わす。

Loeb and Walsh [18] はつぎのことを証明した。

定理　H を harmonic class で Ω を W の中の region とする。　x_0 を Ω の任意の点とし、$\Phi = \{ h \in H_\Omega : h \geqq 0, h(x_0) = 1 \}$ とおく。そのとき Φ は x_0 において equicontinuous である。

このことを用いると、Axiom Ⅲ はまたつぎの Axiom III_3 に同値となる。

Axiom III_3　Ω を W の中の region とする。そのとき H_Ω の中の nonnegative な関数は $\equiv 0$ か、または Ω において零点をもたない。さらに任意の $x_0 \in \Omega$ に対して

$$\Phi_{x_0} = \{ h \in H_\Omega : h \geqq 0, \ h(x_0) = 1 \}$$

は x_0 において equicontinuous となる。

ここで Axiom III_2 を考えに入れれば、上の Φ_{x_0} は Ω の任意の点で equicontinuous となる。Abstract harmonic function を考えるに際し、この条件を出発点とする（§. 5　）。

§ 4.　Gleason parts

あとの準備のために Gleason parts のことにふれておく。Gleason parts は function algebra において定義されるが、それを更に拡張して、実数値連続関数からなる線型空間においても考えられる（[4]）。最近は convex sets や cone など

についても考えられている([7], [10])。

X を compact Hausdorff 空間とし、B を X の上の実数値連続関数からなる線型空間で 1 を含み、X の点を分離するものとする。

定義 $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ であるとは、B に含まれる任意の $u\ (>0)$ に対して

$$\frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a$$

となる $a\ (>0)$ が存在することである。$\sim$ が同値関係となることは Bear [4] によって示された。

Gleason part は、始め function algebra において考えられた(Gleason [15])。A を function algebra とし、その maximal ideal space を M_A としたとき $M_A \ni x, y$ に対して $x \sim y$ であるとは

$$\sup\{|f(x)-f(y)|\ ;\ f \in A,\ \|f\| \leqq 1\} < 2$$

のときであると定義する。Gleason は $\sim$ が同値関係であることを指摘した。この定義は X が A の表現空間であるときに同様に出来るわけであるが、この function algebra と連続関数からなる線型空間での両方の同値関係の間にどんな関係があるかについて Bear はつぎのことを証明した: A を X の上

の function algebra とし、$B = \mathrm{Re}\, A$ とする。そのとき function algebra A に関しての同値関係 ～ と、線型空間 B に関しての同値関係 ～ とは同等である。

さて B を X の上の連続関数からなる線型空間とし、P を1つの part としたとき、$x, y \in P$ に対して

$$R(x, y) = \inf\left\{a \,;\, \frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a,\ u \in B^+\right\}$$

とおく。ここで B^+ は $u > 0$ となる B の関数全体を表わす。そのとき $R(x, y) \geqq 1$，$R(x, y) = 1 \rightleftarrows x = y$，$R(x, y) = R(y, x)$ そして $R(x, y)R(y, z) \geqq R(x, z)$ となることは明らか。

それゆえに $d(x, y) = \log R(x, y)$ は P の上の距離を表わすことになる，すなわち $P \ni x, y, z$ に対して

(i) $d(x, y) \geqq 0$，$d(x, y) = 0 \rightleftarrows x = y$。

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$。

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$。

§5 Part の上の位相

X を可分 compact Hausdorff 空間とする。B を X の上で定義された実数値連続関数からなる線型空間で、1 を含み X の点を分離すると仮定する。Γ を B の Šilov 境界とし、$\Delta = X \sim \Gamma \neq \phi$ とする。

いま ball $B = \{u \in B, \|u\| \leqq 1\}$。また $z \in \Delta$ を固定し

$$B^+(z) = \{u|\Delta : u \in B, u > 0, u(z) = 1\}$$

とおく。§3で述べたように Loeb and Walsh は Brelot's axiomatic potential theory の convergence axiom として、上の $B^+(z)$ が equicontinuous となることをとってもよいことを示した。このあと Δ が一つの part になっている場合を考えるが、$B^+(z)$ が equicontinuous となることを仮定する。

Δ にはつぎのような位相が入れられる：

(T) X の位相から induce された位相。

(T_*) X の二点 x, x' に対して、$d_*(x, x') = \|x - x'\|_*$ $= \sup\{|f(x) - f(x')| : f \in B, \|f\| \leqq 1\}$。すなわち x を evaluation として考えた距離による位相。

(T_d) §4 で定義した $d(x, y) = \log R(x, y)$、すなわち "part metric" による位相。

(T_∞) B が (U) 空間のとき、Δ を $\{g_x : x \in \Delta\} \subset L_\infty(\mu)$ (μ は z の表現測度) と同一視したとき $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \|g_x - g_y\|_\infty$ で入れられた位相。

ここで (U) 空間のことについてふれておく。B が (U) 空間であるとは、任意の $x \in \Delta$ に対して evaluation functional

$e_x \in B^*$ が唯一つの極大表現測度 μ_x（Γ の上の）をもつときにいう。この測度は B に関する Choquet 境界の中にその support をもつことはよく知られている（[21] 参照）。また B^* の positive cone の base $\{F : F \in B^*, \|F\| = 1 = F(1)\}$ が simplex（convex set K が simplex であるとは、K から生成された cone $\widetilde{K} = \{\alpha x : \alpha \geqq 0, x \in K\}$ に対して $\widetilde{K} - \widetilde{K}$ が lattice をなすこと、すなわち $x, y \in \widetilde{K} - \widetilde{K}$ なら $x \vee y \in \widetilde{K} - \widetilde{K}$ となることである。ここで $x \geqq y \rightleftarrows x - y \in \widetilde{K}$ ）であれば B は (U) 空間なること、および B が Dirichlet 空間（$B|\Gamma = C(\Gamma)$, [6] 参照）なるとき B は (U) 空間なることが知られる。

B が (U) 空間で、Δ が 1 つの part であるとき Δ の任意の二点 x, y に対して、それ等の極大表現測度 μ_x, μ_y は互に absolutely continuous で bounded derivative をもつ（[11] と同様な方法で証明出来る）。固定された $z (\in \Delta)$ に対する μ_z を μ とおくことにすれば、任意の $x \in \Delta$ に対して $g_x \in L_\infty(\mu)$ が存在して $d\mu_x = g_x \, d\mu$。ここで Δ と $\{g_x ; x \in \Delta\}$ を同一視することが出来、上にあげた位相 (T_∞) を Δ に入れることが出来る。

これ等の位相の間にはつぎのような関係がある。

定理 1°. $T = T^* \rightleftarrows$ Ball B が equicontinuous（Δ の上で

)。$B^+(z)$ は Δ で equicontinuous ならば、Ball B は Δ で equicontinuous.

2°. Δ が1つの part であるとする。そのとき $T_d > T_* > T$。$B^+(z)$ が equicontinuous $\rightleftarrows$ $T = T_d$。

3°. Δ が1つの part であり、B を(U)空間とする。そのとき $T_\infty = T_d > T_* > T$。もし $B^+(z)$ が Δ で equicontinuous ならば $T = T_d = T_\infty = T_*$。

証明. 2°の証明: $T_* > T$ は殆んど明らかなるゆ之、$T_d > T_*$を示す。$x_n, x \in \Delta$ で $d(x_n, x) \to 0$ とする。そのとき $R(x_n, x) \to 1$。与えられた $\varepsilon > 0$ に対して Nが存在して、任意の $u \in B^+$, $n \geqq N$ に対して

$$\left| \frac{u(x_n)}{u(x)} - 1 \right| = \frac{|u(x_n) - u(x)|}{u(x)} < \varepsilon .$$

もし $\|v\| \leqq 1$, $v \in B$ となる任意の v に対して $u = v + 2$ とおけば、$1 \leqq u \leqq 3$ で

$$u(x_n) - u(x) = v(x_n) - v(x)$$

$$\left| \frac{v(x_n) - v(x)}{v(x) + 2} \right| < \varepsilon \quad (n \geqq N) .$$

それゆ之 $|v(x_n) - v(x)| < 3\varepsilon$ ($v \in B$, $\|v\| \leqq 1$, $n \geqq N$)。
これは $\|x_n - x\|_* \to 0$ となることを示している。

つぎに $B^+(z)$ が Δ で equicontinuous ならば、$T > T_d$ となることをいう。$x_n \to x$ (T) とする。$B^+(z)$ は equicontinuous なるゆえ、任意の $u \in B^+(z)$ に対して一様に $|u(x_n) - u(x)| \leqq \varepsilon_n \to 0$。ところで任意の $u \in B^+$ で

$$\frac{u(x)}{u(z)} \geqq \frac{1}{R(x, z)}, \qquad u(x) \geqq \frac{1}{R(x, z)}.$$

ゆえに任意の $u \in B^+(z)$ で

$$|u(x_n) - u(x)| \leqq \varepsilon_n \leqq \varepsilon_n R(x, z)\, u(x),$$

$$\left| \frac{u(x_n)}{u(x)} - 1 \right| \leqq \varepsilon_n R(x, z) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ところで任意の $v \in B^+$ に対して、ある $r > 0$, $u \in B^+(z)$ で $v = ru$ となるゆえ、任意の $v \in B^+$ で一様に

$$\left| \frac{v(x_n)}{v(x)} - 1 \right| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

これは $R(x_n, x) \to 1$、すなわち $d(x_n, x) \to 0$ を表わす。

3° の証明：　$T_\infty > T_d$ を示す。$u \in B^+(z)$ ならば

$$|u(x_n) - u(x)| = \left| \int_\Gamma u (g_{x_n} - g_x)\, d\mu \right|$$

$$\leqq \| g_{x_n} - g_x \|_\infty \int_\Gamma u\, d\mu$$

$$= \|x_n - x\|_\infty u(z).$$

$u(z) = 1$ なるゆえ、$x_n \to x\ (T_\infty)$ なら $u \in B^+(z)$ で一様に $u(x_n) \to u(x)$。 $2°$の証明と同様に $d(x_n, x) \to 0$。

逆に $T_d > T_\infty$ となることをいう。B は (U) 空間であるから Δ の二点 x, y に関しての μ の Radon – Nikodým derivative g_x, g_y はつぎをみたす ([11] 参照)。

$$\frac{1}{R(x,y)} \leqq \frac{g_x}{g_y} \leqq R(x,y) \quad (a.e.\ \mu).$$

$g_z \equiv 1$ となることから

$$0 \leqq g_x \leqq R(x,z) = \exp d(x,z) \quad (a.e.\ \mu).$$

ゆえに Δ の二点 x, y に対して

$$|g_x - g_y| \leqq g_y [R(x,y) - 1] \leqq R(y,z)[R(x,y) - 1] \quad (a.e.\ \mu).$$

ゆえに $x \to y\ (T_d)$ なら $R(x,y) \to 1$ ($d(x,y) \to 0$ から) となることから $\|g_x - g_y\|_\infty \to 0$。

$B^+(z)$ が equicontinuous なら $2°$ から $T = T_d$ となるから、$T = T_\infty$ となる。

§6. B に関する integral kernel.

単位円板上の負でない harmonic function は単位円上のあ

る正測度の Poisson 積分として表わされるという Herglotz の定理は古典的に知られている。Martin [19] はこの問題を任意の domain において考えた。さらに進んで abstract な harmonic function をある kernel による一般測度での積分で表示することについては多くの研究がある（例えば [3] [5] ）。またもう一つの harmonic function に対する kernel representation（つぎの定理参照）も [8], [9] などで考えられた。この後 Bear and Walsh [9] を中心に考えて見よう。この論文は ideal boundary をもつ Riemann surface の上の harmonic function に関して考えた Nakai [20] の手法を応用してある。

定理　Δ が 1 つの part をなし、$B^+(z)$ は equicontinuous で B を (U) 空間とする。そのとき正測度 $\mu = \mu_z$ と jointly measurable function $Q(x, \theta)$（$\Delta \times \Gamma$ の上で定義された）が存在して

(i) $Q(\cdot, \theta)$ は任意の $\theta \in \Gamma$ に対して、Δ の上の連続関数となり

(ii) $0 \leqq Q(x, \theta) \leqq R(x, z)$ $((x, \theta) \in \Delta \times \Gamma)$

であり、かつ任意の $u \in B$, $x \in \Delta$ で

$$u(x) = \int_\Gamma u(\theta) Q(x, \theta) d\mu(\theta).$$

証明　μ を z を表現する測度とする。D を z を含むような

Δの可附番稠密部分集合とする．Dの任意の元xに対して，Γの上の measurable function $Q(x,\cdot)$ が存在して，$Q(x,\cdot)d\mu(\cdot)$ がxを表現すれば

$$|Q(x,\cdot)-Q(y,\cdot)|\leqq R(y,z)[R(x,y)-1]$$

$$0\leqq Q(x,\cdot)\leqq R(x,z)\quad(a.e.\ \mu).$$

Eを上の式がみたされないようなΓのμ－零集合の可附番個の和集合とすれば，$\mu(E)=0$．そして

$$|Q(x,\theta)-Q(y,\theta)|\leqq R(y,z)[R(x,y)-1]$$

$$0\leqq Q(x,\theta)\leqq R(x,z)$$

がΓ～Eの任意のθとDの任意の二つの元x，yで成立する。$\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ をDの中の二つの点列とし，$x_n\to x$，$x_n'\to x$ $(x\in\Delta)$ とする。そのとき $|Q(x_n,\theta)-Q(x_n',\theta)|$ は $\theta\in$ Γ～Eで一様に収束する。ゆえに任意の $x\in\Delta$ に対して $x_n\to x$ となるDの中の点列 $\{x_n\}$ を選び

$$Q(x,\theta)=\lim_{n\to\infty}Q(x_n,\theta)\quad(\theta\notin E)$$

$$=1\qquad\qquad(\theta\in E)$$

と定義する。Qは$\Delta \times \Gamma$の上で定義され、これが求めるものである。なんとなれば Q はθで measurable で、xで連続なることは明らか。ゆえに Q は jointly measurable となる。bounded convergence theorem より、すべての$u \in B$で

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u(x_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma} u(\theta) Q(x_n, \theta) \, d\mu(\theta)$$

$$= \int_{\Gamma} u(\theta) Q(x, \theta) \, d\mu(\theta)。$$

そしてそれゆえ$Q(x, \cdot)\, d\mu(\cdot)$は$x$を表現する。

Nakai [20] は Riemann surface において考察した際に、任意の$\theta \in \Gamma$に対して$Q(\cdot, \theta)$は harmonic function に出来うることを示し、Walsh and Loeb [23] は locally compact Hausdorff 空間の上で定義された abstract harmonic function の場合に拡張した。

いま$\hat{B}$を$B|\Delta$のΔの compact 部分集合の上での一様収束の位相での閉包とすれば、この$\hat{B}$は開集合Δの上の harmonic function 全体の空間と見做すことが出来る。上に述べたような意味でつぎが証明出来る。

定理　Δが1つの part になっていて、$B^+(z)$は equicontinuous

、かつ B を (U) 空間とする。そのとき上の定理におけ

ような kernel $Q(x, \theta)$ が存在し、任意の $\theta \in \Gamma$ に対し

て $Q(\cdot, \theta) \in \hat{B}$ となる。

注. 最近 $\mathcal{H}_{\Omega}$ と nuclear space との関連性から integral representation の研究がなされている (Hinrichsen, Ann. Inst. Fourier (1967), [23])。

参考文献

[1] E. L. Arenson : Certain properties of algebras of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 171 (1966) No. 4. Soviet Math. Dokl. Vol. 7 (1966), No. 6. 1522 - 1524.

[2] H. Bauer : Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differential-gleichungen, Math. Ann, 146 (1962) 1 - 59.

[3] H. S. Bear : An abstract potential theory with continuous kernel, Pacific J. Math., 14 (1964) 407-420.

[4] ―――――― : A geometric characterization of Gleason parts, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965) 407 - 412.

[5] ―――――― : The integral representation of functions on parts, Ill. J. Math., 10 (1966) 49-55.

[6] ―――――― : Continuous subparts for function spaces, Function algebra (Proc. International Symposium) 1965

[7] ―――――― : The part metric in a cone (to appear)

[8] H. S. Bear and A. M. Gleason : A global integral representation for abstract harmonic functions, J. Math. Mech., 16 (1967) 639-653.

[9] H. S. Bear and B. Walsh : Integral kernel for one-part function spaces, Pacific J. Math., 23 (1967) 209-215.

[10] H. S. Bear and M. L. Weiss : In intrinsic metric for parts, Proc. Amer. Math Soc., 18 (1967) 812-817.

[11] E. Bishop : Representing measures for points in a uniform algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964) 121-122.

[12] M. Brelot : Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay (1960).

[13] A. Browder : On a theorem of Hoffman and Wermer, Function algebras (Proc. International Symp.) 1965.

[14] C. Constantinescu and A. Cornea : On the axiomatic for harmonic functions I, Ann. Inst. Fourier, 13, 2 (1963) 373-388.

[15] A. M. Gleason : Function algebras, Seminars on analytic functions II, 1957.

[16] I. Glicksberg : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962) 415-435

[17] K. Hoffman and J. Wermer: A characterization of C(X), Pacific J. Math., 12 (1962) 941-944.

[18] P. A. Loeb and B. Walsh: The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, Ann. Inst. Fourier 15 (1965) 597-600.

[19] R. S. Martin: Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 49 (1941) 137-172.

[20] M. Nakai: Radon-Nikodym densities between harmonic measures on the ideal boundary of an open Riemann surface, Nagoya Math. J., 27 (1965) 71-76.

[21] R. R. Phelps: Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand Company (1966).

[22] S. J. Sidney and E. L. Stout: A note on interpolation, Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968) 380-382.

[23] B. Walsh and P. A. Loeb: Nuclearity in axiomatic potential theory, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966) 685-689.

[24] J. Wermer: The space of real parts of a function algebras, Pacific J. Math., 13 (1963) 1423-1426.