数理解析研究所講究録
第61巻 1968年 46-59

Hypo-Dirichlet algebraの interpolationについて

茨城大 理　荷見守助

§1. 問題の説明

Disk algebra A_0 と開円板$\{|z|<1\}$内の相異なる点の列$\{z_k\}$について，次の二つの命題が同値な事が知られてゐる：(a) 閉円板$\{|z|\leq 1\}$上の任意の連續函数gに対し$f(z_k)=g(z_k)$, $k=1, 2, \cdots$, なる$f\in A_0$が存在する．(b) 任意の有界数列$\{c_k\}$に対し$h(z_k)=c_k$, $k=1, 2, \cdots$, なる$h\in H^\infty$が存在し，且つ$\{z_k\}$の単位円$\{|z|=1\}$上の集積点の集合はLebesgue測度が0である[10, p. 208]．この事柄の拡張については，先に和田氏[14]等により論じられたが，更にこゝで考へて見たい．

Xをcompact Hausdorff空間，AをX上のfunction algebra即ちC(X)のuniformly closed subalgebraで定数函数をすべて含み，Xの点を分離し且つsup normを持つものとする．Aの極大ideal空間をM(A)，AのGelfand表現を$A\to\hat{A}$と書く．今XはAのŠilov境界に等しいものとし，$M(A)\setminus X$とまじ

はるGleason part全体のなす集合を$\mathcal{P}$と書く．$\mathcal{P}$は空集合ではないと假定し，各$P \in \mathcal{P}$にX上の正のRadon測度$\mu(P)$を一つ宛対応させ，次のやうにL^1, L^∞を定義する：

$$L^1 = \{(f_P) \in \prod(L^1(\mu(P)) : P \in \mathcal{P}) : \|(f_P)\|_1 = \sum_{P\in\mathcal{P}} \|f_P\|_{1,P} < +\infty\},$$

$$L^\infty = \{(f_P) \in \prod(L^\infty(\mu(P)) : P \in \mathcal{P}) : \|(f_P)\|_\infty = \sup_{P\in\mathcal{P}} \|f_P\|_{\infty,P} < +\infty\}.$$

但し，$\|\cdot\|_{1,P}$，$\|\cdot\|_{\infty,P}$は夫々$L^1(\mu(P))$，$L^\infty(\mu(P))$の普通のnormである．L^1とL^∞は上のnormについてBanach空間をなし，L^∞をL^1の双対と看做すことが出来る．$u \in C(X)$に(u_P)，$u_P = u$，を対応させれば，準同型$C(X) \to L^\infty$を得るが，この写像によるAの像の汎弱閉包をH^∞と書く．

更に進むために次の假定をおく．

(1)　P ($\in \mathcal{P}$)内の任意の点pの表現測度μ_pはいづれも$\mu(P)$に対し絶対連續である．

この時は，任意の$p \in P$ ($\in \mathcal{P}$)に対して

(2)　$$h \longrightarrow \int_X h_P(x)\, d\mu_p(x) \qquad h = (h_P) \in H^\infty$$

はH^∞上の乗法的線型汎函数であってpのみで決定され，従って$M(A) \setminus X$から$M(H^\infty)$へのinjection iが得られる．さて，上の(a)，(b)に対応して次の二性質を考へる．

(A)　$\hat{A}|F = C(F)$;

(B)　$A|(F \cap X) = C(F \cap X)$ 且つ $(H^\infty)^\wedge | i(F \setminus X) = C^b(i(F \setminus X))$.

但し，Fは$M(A)$の閉集合を，$C^b(i(F \setminus X))$は$i(F \setminus X)$の上の有界

連続函数全体の集合を表はす．我々の目的は，どんな條件の下で(A)，(B)の一方から他方が導けるかを調べる事である．今迄には，disk algebraの場合[10]，唯一個の元から生成される場合[14]，logmodular algebraの場合[7]が調べられてゐる．本稿の内容はほぼ[9]と同じである．

§2. 定理

以下では假定(1)が満足されるとし，Fを$M(A)$の閉部分集合とする．

定理1. $F\setminus X$上でinjection iが連續ならば(特に$F\setminus X$がdiscreteならば)，(A) $\Longrightarrow$ (B).

次に，Aに含まれる函数の実部のなす空間を$\mathrm{Re}\,A$，Aの可逆な元の全体をA^{-1}と書き，更に$\log|A^{-1}| = \{\log|f| : f \in A^{-1}\}$とおく．$A$が$X$上でhypo-Dirichletであるとは，

(i) $\log|A^{-1}|$のreal linear spanは$C_{\mathbb{R}}(X)$でuniformly dense;

(ii) $\mathrm{Re}\,A$のuniform closureの$C_{\mathbb{R}}(X)$でのcodimensionは有限

の二條件が満足される事を云ふ．

定理2. AがX上でhypo-Dirichletとする．もしFと交はる$\mathcal{P}$のpartが高々可算個ならば(特に$F\setminus X$が可算集合ならば) (B) $\Longrightarrow$ (A). (註1)

前定理の條件を多少緩めることは出来る.

定理3. Aは次の條件を満足すると假定する.

(i') 有限個の $Z_1, \cdots, Z_s \in A^{-1}$ を適當に取れば,

$$\log|f| + \sum_{j=1}^{s} a_j \log|Z_j| , \qquad f \in A^{-1}, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

の形の函数は $C_{\mathbb{R}}(X)$ で uniformly dense ;

(ii') 任意の $p \in M(A)$ に対し, p のすべての表現測度の集合 M_p は有限次元.

この時, もし F と交はる $\mathcal{P}$ の part が高々可算個ならば (特に $F \setminus X$ が可算集合ならば), (B) $\Longrightarrow$ (A).

§3. 証明についての注意

定理1は A が Logmodular であるという條件の下で [7] で証明されたが, この條件は本質的ではなく, 假定(1)のみで充分である事が容易に分る. 従て証明は省略する.

次に, (B) $\Longrightarrow$ (A) についても矢張 A が logmodular であるとして [7] で証明された. そこでは次の事実が用ひられた: (α) function algebra の interpolation 集合の特徴付けに関する Glicksberg [4] の定理; (β) logmodular algebra に直交する測度の Glicksberg-Wermer 型の分解定理 [6]; (γ) logmodular algebra の場合, $p \longrightarrow \mu_p$ が汎弱連續なること; (δ) logmodular algebra の場合, X の閉部分集合 F が $A|F = C(F)$ を満足する

ならば，任意の $p\in M(A)\setminus X$ に対して $\mu_p|F=0$ なること；(ε) logmodular algebra の自明でない Gleason part は analytic disk であること [11]．従て，これらの事実が更に拡張出来るか否かを調べることは自然であらう．

(α) は既に充分に一般性のある結果である．(β) は Glicksberg [5] により一般の場合へ拡張されたが，これは後で述べる．(γ) については次の事が分る．

補題 1．$\log|A^{-1}|$ の real linear span は $C_{\mathbb{R}}(X)$ で uniformly dense であると假定する．この時は，任意の $p\in M(A)$ に対し，その Arens-Singer 表現測度が一意的に定まるから，それを ν_p と書くならば，$p\longrightarrow\nu_p$ は $M(A)$ より $M(X)$ への汎弱連續函数である．

証明．$\{p_\alpha\}$ を $M(A)$ の中の net で或 $p\in M(A)$ に收斂するものとし，ν_α 及び ν を夫々 p_α 及び p の Arens-Singer 測度とする．假定により，任意の $g\in C_{\mathbb{R}}(X)$ と $\varepsilon>0$ に対し，X 上で $|g(x)-k^{-1}\log|f(x)||<\varepsilon$ を満足するやうな $f\in A^{-1}$ と正整数 k が存在する．従て，

$$\left|\int_X g\,(d\nu_\alpha-d\nu)\right|\leqq\left|\int_X(g-k^{-1}\log|f|)(d\nu_\alpha-d\nu)\right|+\left|\int_X k^{-1}\log|f|\,(d\nu_\alpha-d\nu)\right|$$
$$\leqq\ 2\varepsilon+k^{-1}\left|\log|\hat{f}(p_\alpha)|-\log|\hat{f}(p)|\right|.$$

こゝで，$k\geqq1$，$\hat{f}(p_\alpha)\longrightarrow\hat{f}(p)$ 且つ $\hat{f}(p)\neq0$ であるから最終辺の第二項は α と共にいくらでも小さくなる．

次に（δ）の事実は，logmodular algebraに関する次の性質から導かれた．

（3）　Xの閉部分集合Fに対しては，$A|F = C(F)$ なるための必要充分條件は，$\mu \in A^{\perp} \Longrightarrow \mu|F = 0$．

この事は，logmodularよりも弱い條件の下でも正しい．実際Glicksberg［4］はそのやうな一つの條件を与へたが，更に弱い次の條件が考へられる［8］．

（P）　次の性質を持つ定数 c_1，c_2（$0 < c_2 \leqq 1 \leqq c_1 < +\infty$）が存在する：任意の $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$，$g > 0$，に対して $c_2|f| \leqq g \leqq c_1|f|$ を満足する $f \in A$ が存在する．

補題 2．Aが條件（P）を満足すれば，命題（3）が成立する．従て，Xの閉集合Fが $A|F = C(F)$ を満足すれば，任意の $p \in M(A) \setminus X$ に対し，$\mu \in M_p \Longrightarrow \mu|F = 0$．

前半の証明は［8］にある．又前半から後半を導く方法は［7］にある．

補題 3．有限個の $Z_1, \dots, Z_s \in A^{-1}$ と有限な定数 $d > 0$ とで次の性質を持つものがあれば，Aは條件（P）を満足する：任意の $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ は

$$\log|f| + \sum_{j=1}^{s} a_j \log|Z_j| , \qquad f \in A,\ f \neq 0,\ a_j \in \mathbb{R}$$

の形の函数の集合から距離 d 以内にある．

証明は［8］にある．

§4. 定理3の証明.

証明の方針は[7]におけると同様である. 先づ, 任意の $p \in M(A)$ に対し, A と p は Ahern-Sarason [1] の基本假定 (I) (II) を満足する. 彼等の結果により, p の Arens-Singer 測度 ν_p は一意的に決定し且つ strongly dominant である. 即ち, すべての $\mu \in M_p$ に対し $\mu \leqq c\nu_p$ を満す定数 c が存在する. 更に, p, q が A の同じ part に属するならば, ν_p と ν_q は互に絶対連續であり, p, q が相異なる part に属するならば, ν_p と ν_q は互に特異である. (これらについては[3]も参照のこと.) さて, 各 $P \in \mathcal{P}$ に対し一点 $p \in P$ を選び, その Arens-Singer 測度 ν_p を $\nu(P)$ と書く. この時, 假定 (1) により

$$d\nu(P) = \ell(P) \cdot d\mu(P), \qquad \ell(P) \in L^1(\mu(P))$$

なる関係式が成立つ. この場合, 前節の (β) に関聯して述べた Glicksberg [5] の結果は次の通りである.

補題4. $\mu \in A^\perp$ に対し, part の可算列 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ で次の性質を持つものが存在する:

(4) $\qquad \mu = \sigma + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j, \qquad \sigma, \mu_j \in A^\perp;$

(5) $\qquad \sigma$ は $M(A)$ のすべての点のすべての表現測度に対し特異である;

(6) $\qquad \mu_j$ は $\nu(P_j)$ に対し絶対連續であり, 従て $\nu(P_k)$ $(k \neq j)$ に対し特異である.

さて，定理3を示すために，先づ $F \setminus X$ が可算集合であると假定しよう．L^∞ の極大 ideal 空間を Ω と書けば，$L^\infty \cong C(\Omega)$ であるから，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C(X) \arrow[d] \\ H^\infty \arrow[r] & L^\infty \cong C(\Omega) \end{tikzcd}$$

こゝで，写像はすべて自然なものであって，norm $\leqq 1$ である．極大 ideal 空間へ移れば次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} M(A) & X \arrow[l] \\ M(H^\infty) \arrow[u, "\pi_2"] & \Omega \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

そこで，$\pi_1(\Omega) = \Omega_1$ とおけば，Ω_1 は $M(H^\infty)$ の compact 部分集合で，$\pi_2(\Omega_1) \subseteqq X$．(2) の式によって $M(A) \setminus X$ の点を $M(H^\infty)$ の点と看做すことが出来るが，この時 $\pi_2(i(M(A) \setminus X)) = M(A) \setminus X$ であるから，$M(H^\infty)$ においては $i(M(A) \setminus X) \cap \Omega_1 = \emptyset$ となり，特に $i(F \setminus X) \cap \Omega_1 = \emptyset$．

さて，$Y = F \cup X$ とおくと，$\hat{A}|Y$ は $C(Y)$ の uniformly closed subalgebra であることが分る．今 $\xi \in M(Y)$ が $\hat{A}|Y$ に直交すると假定する．補題1により $p \longrightarrow \nu_p$ は汎弱連續であるから，

$$\eta = \int_Y \nu_p \, d\xi(p)$$

により X 上の Radon 測度 η が定義される．しかも $\eta \in A^\perp$．何

となれば，任意の $f \in A$ に対し $\int_X f(x)\,d\eta(x) = \int_Y \hat{f}(p)\,d\xi(p) = 0$ だからである．従て，補題4によって(4)，(5)，(6)を満足する分解 $\eta = \sigma + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ が可能である．特に

$$\mu_j = k_j \cdot \nu(P_j) = k_j\, \ell(P_j)\mu(P_j)\,, \qquad k_j \in L^1(\nu(P_j))$$

が成立する．便宜上，上の μ_j の中には0なるものも入ってゐるとしておく．そこで，η を Y 上の測度であると考へて，$\xi_0 = \xi - \eta$ とおくならば，

(7) $$\int_Y \nu_p \cdot d\xi_0(p) = 0\,.$$

何となれば，$x \in X$ に対しては ν_x は evaluation δ_x に等しいから，$\int_Y \nu_p \cdot d\xi_0(p) = \int_Y \nu_p \cdot d\xi(p) - \int_X \nu_x \cdot d\eta(x) = \eta - \int_X \delta_x \cdot d\eta(x) = \eta - \eta = 0$ となるからである．

こゝで，測度 ξ_0 と $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ を $M(H^\infty)$ の上へ移さう．假定により $F \setminus X$ は可算集合であるから，$\xi_0|(F \setminus X)$ をそのまゝ $M(H^\infty)$ 上へ移すことが出来る．これを ξ' とおく．次に，(7)より

$$\begin{aligned} \xi_0|X &= -\int_{F\setminus X} \nu_p \cdot d\xi_0(p) = -\sum_{j=1}^{\infty} \int_{F\cap P_j} \nu_p \cdot d\xi_0(p) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j\, \nu(P_j) \qquad\qquad (u_j \in L^1(\nu(P_j))) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j\, \ell(P_j)\mu(P_j) \end{aligned}$$

を得る．即ち，η の分解について述べたところの便法により，F と共通分を持つ $\mathcal{P}$ の part はすべて元の $\{P_j\}$ の中にあるとするのである．そこで，

$$\Phi(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\,(k_j + u_j)\,\ell_j\, d\mu(P_j)$$

（但し f_j は $f \in L^\infty$ の P_j 成分を表はす）によって L^∞ 上の有界線型汎函数を定義し，これに対応する Ω の上の Radon 測度を λ と書く，$\pi_1(\Omega) = \Omega_1$ であるから，$\pi_1(\lambda) = \xi''$ とおけば，ξ'' は Ω_1 の上の測度である．

$$\tilde{\xi} = \begin{cases} \xi' & M(H^\infty) \setminus \Omega_1 \text{ 上で,} \\ \xi'' & \Omega_1 \text{ 上で.} \end{cases}$$

とおけば，$\tilde{\xi}$ は $M(H^\infty)$ 上の測度であって，$\tilde{\xi} \in [(H^\infty)^\wedge]^\perp$．$A$ から H^∞ の中への自然な準同型を $\tilde{\iota}$ とする時，$f \in A$ ならば

$$\begin{aligned} \int_{M(H^\infty)} (\tilde{\iota}(f))^\wedge d\tilde{\xi} &= \int_{M(H^\infty)\setminus\Omega_1} (\tilde{\iota}(f))^\wedge d\xi' + \int_{\Omega_1} (\tilde{\iota}(f))^\wedge d\xi'' \\ &= \int_{F\setminus X} \hat{f}\, d\xi_0 + \sum_{j=1}^\infty \int_X f(k_j + u_j)\, d\nu(P_j) \\ &= \int_{F\setminus X} \hat{f}\, d\xi_0 + \int_X f\, d\xi_0 + \sum_{j=1}^\infty \int_X f\, d\mu_j \\ &= \int_Y \hat{f}\, d\xi_0 = 0 . \end{aligned}$$

極限をとることにより求める結果を得る．

一方，(B) の第二の等式 $(H^\infty)^\wedge | i(F\setminus X) = C^b(i(F\setminus X))$ から

$i(F\setminus X)$ の $M(H^\infty)$ の中での closure を G とおけば，$(H^\infty)^\wedge | G = C(G)$ なることが分る．前節の (α) で述べた Glicksberg の結果 [4, Cor. 3. 2.] によれば，H^∞ と G のみで決まり次の不等式を満足する定数 $c \geqq 1$ の存在が知られる：即ち

$$\| \tilde{\xi} \,|\, G \| \leqq c \| \tilde{\xi} \,|\, M(H^\infty) \setminus G \| .$$

これから次の計算式を得る．

$$(8)\quad \|\xi \mid F\setminus X\| = \|\xi_0 \mid F\setminus X\| = \|\tilde{\xi} \mid i(F\setminus X)\| \leqq \|\tilde{\xi} \mid G\|$$
$$\leqq c\,\|\tilde{\xi} \mid M(H^\infty)\setminus G\| \leqq c\,\|\tilde{\xi} \mid \Omega_1\|$$
$$= c\,\|\xi'' \mid \Omega_1\| = c\sum_{j=1}^{\infty}\int_X |k_j + u_j|\cdot \ell_j\, d\mu(P_j)$$
$$= c\,\|\xi_0 \mid X + \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\| \leqq c\,\|\xi_0 \mid X + \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j + \sigma\|$$
$$= c\,\|\xi \mid X\|.$$

次に，(B)の第一式を用ひれば，補題2，3より

$$\xi_0 \mid F\cap X = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \mid F\cap X = 0 \quad 且つ \quad \sigma \mid F\cap X = 0$$

を得るから，$\xi \mid F\cap X = 0$ となり，(8)より

$$\|\xi \mid F\| = \|\xi \mid F\setminus X\| \leqq c\,\|\xi \mid X\| = c\,\|\xi \mid X\setminus F\|$$
$$= c\,\|\xi \mid Y\setminus F\|.$$

ξは任意であるから，Glicksbergの結果（上記）を使って，$\hat{A} \mid F = (\hat{A} \mid Y) \mid F = C(F)$ であることが分る．即ち，$F\setminus X$が可算集合ならば(B)$\Longrightarrow$(A)が証明された．

次に，Fと交はる$\mathcal{P}$のpartが高々可算個であると假定しよう．この場合には，(B)の第二式を併用して$F\setminus X$が可算集合であることを示せば充分である．それには前節の(E)の事実を拡張すればよいが，丁度Gamelin [2] から求むる結果が得られる．詳細は省略する．尚定理2の方，即ちAがhypo-Dirichletの時は，O'Neill [12]，O'Neill-Wermer [13] の結果で充分である．

§5. 例

Hypo-Dirichlet algebra の例としては次のものがよく知られてゐる．Ω を有限 Riemann 面でその境界 $\partial\Omega$ は有限個の解析曲線から成ってゐるとし，$A(\Omega)$ は $C(\partial\Omega)$ の中の函数であって，$\Omega\cup\partial\Omega$ まで連續的にしかも Ω では解析的になるやうに延長出来るものの全体を表はすとすれば，$A(\Omega)$ は $\partial\Omega$ 上で hypo-Dirichlet である．又，Y を平面上の compact 集合でその補集合は有限個の成分を持つものとし，X を Y の境界とする．この時，Y 上に極を持たない有理函数の X における uniform limit として表はされる（X 上の）函数の全体を A とすれば，A は X 上で hypo-Dirichlet である．

定理 3 の條件 (i′), (ii′) を満足するものとしては例へば次のやうなものがある．A を hypo-Dirichlet algebra, $p\in M(A)$, 且つ m を p の Arens-Singer 測度とする．この時，$H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $(H^\infty(m))^\wedge$ は $L^\infty(m)$ の極大 ideal 空間 $\hat{X}$ 上の function algebra であって上の二條件を満足する．

文　　献

[1]　P. R. Ahern and D. Sarason, The H^p spaces of a class of function algebras, Acta Math. 117 (1967), 123-163.

[2]　T. W. Gamelin, Embedding Riemann surfaces in

maximal ideal spaces, J. Functional Analysis 2 (1968), 123—146.

[3] T. W. Gamelin and G. Lumer, Universal Hardy class, (to appear).

[4] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 415—435.

[5] I. Glicksberg, The abstract F. and M. Riesz theorem, J. Functional Analysis 1 (1967), 109—122.

[6] I. Glicksberg and J. Wermer, Measures orthogonal to a Dirichlet algebra, Duke Math. J. 30 (1963), 661—666

[7] M. Hasumi, Interpolation sets for logmodular Banach algebras, Osaka J. Math. 3 (1966), 303—317.

[8] M. Hasumi, On the converse of Bishop's interpolation theorem, (to appear).

[9] M. Hasumi, Interpolation sets for a class of uniform algebras, (to appear).

[10] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1962.

[11] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta Math. 108 (1962), 271—317.

[12] B. V. O'Neill, Parts and one-dimensional analytic spaces, Amer. J. Math. 90 (1968), 84—97.

[13] B. V. O'Neill and J. Wermer, Parts as finited-sheeted coverings of the disk, Amer. J. Math. 90 (1968), 98—107.

[14] J. Wada, On the interpolation of some function algebras, Osaka J. Math. 1 (1964), 153—164.

(註1) A が條件 (i), (ii) 又は (i′), (ii′) を満足する時は, X の各点は peak point となり, $M(A)\setminus X = \bigcup(P : P \in \mathcal{P})$ であることが分る.