数理解析研究所講究録
第61巻 1968年 123-145

Holomorphic convexity in general function algebras

東京電機大　　鶴見和之
東京教育大　理　　神保敏弥

§1. 序論

最近 function algebras は函数論に密接に結びつけて考えられ，特に $\mathfrak{A}$-holomorphic functions は解析函数の拡張である，然しその maximal ideal space には一般に解析構造が導入されない，そこで函数論における諸性質がどこまで成り立つかが問題である，例えば，正則凸性，解析集合の諸性質等々。

ここでは函数論における基本定理の1つである次の Cartan-Thullen の定理を考察する：

定理．　D を $\mathbb{C}^n$ の単葉な領域とし，H(D) を D で正則な函数全体のなす族とするとき，次の3条件は同値である．

(i)　D は正則領域である．

(ii)　D は H(D) について強い意味（又は弱い意味）で正則凸である．

(iii) D は H(D) に関する解析的多面体により内部から近似される。

この定理は $\mathfrak{A}$-holomorphic functions の場合には無条件では成り立たない様に思はれる。ここではある条件の下で成り立つ事を示す。又正則凸性に関する或る性質と正則函数に対応する或る定理を導く。

上記の諸性質を導くために先ず§2で natural systems の諸性質を導き、§3では $\mathfrak{A}$-holomorphic functions を考察し、§4では Cartan-Thullen の定理及び正則凸性の諸性質を導く。

§2. natural systems.

X を Hausdorff space とし、C(X) を X 上の複素数値連続函数の全体からなる algebra とする。今 $\mathfrak{A}$ を定数函数を含む C(X) の subalgebra とする。X の topology が $\mathfrak{A}$-topology であるとき対 [X, $\mathfrak{A}$] を system という。以下対 [X, $\mathfrak{A}$] と書いた時には常に system とする。$\mathfrak{A}$ の topology は compact open topology とする。Y ⊂ X のとき対 [Y, $\mathfrak{A}$] を Y における topology を X からの relative topology とし、$\mathfrak{A}$ を Y に制限して得られる subsystem とする。

$\phi: a \longrightarrow \hat{a}(\phi)$ を $\mathfrak{A}$ から $\mathbb{C}$ の上への homomorphism とすると

き次の事が成り立つ: ϕ が $\mathfrak{A}$ の compact open topology に関して連続であるための必要十分条件は $\forall a \in \mathfrak{A}$ に対して $|\hat{a}(\phi)| \leq \|a\|_{K_\phi}$ なる compact set $K_\phi \subset X$ が存在することである，ここで $\forall Y \subset X$ に対して $\|a\|_Y := \sup_{y \in Y} |a(y)|$ 。この様な全ての compact sets の族の極小元を ϕ の support という。ϕ にはいくつかの supports があってもよい。$\forall x \in X$ は x を代入する事により定義された homomorphism ϕ_x を決める，即ち $\forall a \in \mathfrak{A}$ に対して，$\phi_x(a) = a(x)$. 明らかに，ϕ_x は連続で support として1点からなる集合 $\{x\}$ が存在する。この homomorphism ϕ_x に対する support を x の support という。点 x の support が $\{x\}$ のみであるとき，x を $[X, \mathfrak{A}]$ の independent point という。independent points の全体からなる集合の closure を $[X, \mathfrak{A}]$ の Šilov 境界といい，$\partial[X, \mathfrak{A}]$ と書く。

定義 2.1. (1) system $[X, \mathfrak{A}]$ に於て，$\mathfrak{A}$ から $\mathbb{C}$ の上への任意の連続な homomorphism が X の点を代入する事によって与えられるとき，$[X, \mathfrak{A}]$ を natural であるという。

(2) 任意の homomorphism が X の点を代入する事によって与えられるとき，$[X, \mathfrak{A}]$ を strictly natural という。

例 (1) $\mathfrak{B}$ を commutative Banach algebra with unit とし，X を $\mathfrak{B}$ の maximal ideal space とし，$\hat{\mathfrak{B}}$ を $\mathfrak{B}$ の Gelfond representation とすると，system $[X, \hat{\mathfrak{B}}]$ は strictly natural である。

(2). $\mathcal{P}$ を n-複素変数の多項式の全体からなる algebra とすると system $\{\mathbb{C}^n, \mathcal{P}\}$ は strictly natural である.

K を X の compact subset とするとき, 次の集合 $\hat{K}$ を $\hat{K}$ の $\mathfrak{A}$-convex hull という:

$$\hat{K} := \{ x \in X \mid |a(x)| \leq \|a\|_K, \ \forall a \in \mathfrak{A} \}.$$

明らかに $\hat{K}$ は X の閉部分集合で, $\forall a \in \mathfrak{A}$ に対して $\|a\|_{\hat{K}} = \|a\|_K$.

定義 2.2. $\Omega \subset X$ とする. 任意の compact set $K \subseteq \Omega$ に対して, $\hat{K} \subseteq \Omega$ のとき, Ω は $\mathfrak{A}$-convex であるという. $Y \subset X$ のとき, Y を含む最小の $\mathfrak{A}$-convex set を Y の $\mathfrak{A}$-convex hull といい, $\hat{Y}$ と書く.

全空間 X 及び空集合 ϕ は明らかに $\mathfrak{A}$-convex である. かくして X の任意の集合は少くとも 1 つの $\mathfrak{A}$-convex set に含まれる. 又 $\mathfrak{A}$-convex sets の共通部分は又 $\mathfrak{A}$-convex である. 故に $\mathfrak{A}$-convex hull $\hat{Y}$ は常に存在し, Y を含む全ての $\mathfrak{A}$-convex sets の共通部分である. 明らかに次の事が成り立つ: Y が $\mathfrak{A}$-convex であるための必要十分条件は $\hat{Y} = Y$ である.

又次の事が成り立つ:

(1). $[X, \mathfrak{A}]$ を natural, $\Omega \subseteq X$ とするとき, $[\Omega, \mathfrak{A}]$ が natural であるための必要十分条件は Ω が $\mathfrak{A}$-convex である

(2). $[X, \mathfrak{A}]$ が natural で, K が compact ならば, $\hat{K}$ も compact である.

命題2.1.　$[X,\mathfrak{A}]$をnaturalとし，ΩがXの$\mathfrak{A}$-convex subsetでかつ$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\overline{\Omega}_1\cap\Omega_2=\Omega_1\cap\overline{\Omega}_2=\phi$ならば，$\Omega_1$と$\Omega_2$は$\mathfrak{A}$-convexである．

証明はŠilovのdecomposition theorem（[5]. 3.6.3）による．

定理2.2.　YをXの任意のsubsetとすると$[\hat{Y},\mathfrak{A}]$のindependent pointはYに含まれ，Yがclosed setならば$\partial[\hat{Y},\mathfrak{A}]\subseteq Y$である．

証明.　yを$[\hat{Y},\mathfrak{A}]$のindependent pointとし$Z:=\hat{Y}-\{y\}$とする．任意のcompact set $K\subseteq Y$に対して，$\hat{K}\subseteq\hat{Y}$である．$y\notin K$かつyはindependent pointであるから，$y\notin\hat{K}$．故に$\hat{K}\subseteq Z$．したがってZは$\hat{Y}$のproper $\mathfrak{A}$-convex subsetである．故にZはYを含まない．故に$y\in Y$．後半は明らか．

定義2.3.　$x\in X$に対して，次の様な近傍Vがとれ，xが$[V,\mathfrak{A}]$のindependent pointのとき，xを$[X,\mathfrak{A}]$のlocally independent pointという．

明らかに$[X,\mathfrak{A}]$のindependent pointはlocally independent pointである．local maximum modulus principleは一般のsystemに拡張できる．

定理2.3.　$[X,\mathfrak{A}]$をnatural systemとすると，任意の$[X,\mathfrak{A}]$のlocally independent pointはindependent pointである．

証明. $x \in [X, \mathfrak{A}]$ の locally independent point とすると, x の或る近傍 V が存在して, x は $[V, \mathfrak{A}]$ の independent point である. 今 x は $[X, \mathfrak{A}]$ の independent point でないとする, そうすると或る compact set K が存在して $x \in \hat{K} - K$ とできる. K は compact であるから x の近傍 U で,

$$\bar{U} \cap \hat{K} \subseteq V \cap (\hat{K} - K)$$

なるものが存在する. $\partial[\hat{K}, \mathfrak{A}] \subseteq K$ であるから $U \cap \partial[\hat{K}, \mathfrak{A}] = \phi$. $\Gamma := \mathrm{bdry}_{\hat{K}} U \cap \hat{K}$ とすると, $[\hat{K}, \mathfrak{A}]$ は natural であるから Rossi の local maximum modulus principle から $U \cap \hat{K} \subseteq \hat{\Gamma}$. 特に $x \in \hat{\Gamma} - \Gamma$. しかし Γ は V の中で compact であるから, これは矛盾. 故に x は $[X, \mathfrak{A}]$ の independent point である。

又同様な方法により次の定理が成り立つ.

定理 2.4. $[X, \mathfrak{A}]$ を natural とし, X_0 を $X - \partial[X, \mathfrak{A}]$ の X 内での $\mathfrak{A}$-convex hull とすると, $[X_0, \mathfrak{A}]$ は natural であり $\partial[X_0, \mathfrak{A}] = \phi$.

§3. $\mathfrak{A}$-holomorphic functions.

X を Hausdorff space とし, X の subsets 上で定義された函数族 $\mathfrak{F}$ (函数 $f \in \mathfrak{F}$ の定義域 $\mathfrak{D}_f$ は X の或る部分集合で, $\mathfrak{F}$ の元は共通の定義域を持たなくてもよい) を考える。

定義3.1.　上記の$\mathfrak{F}$に対し，函数fが次の条件をみたすときfは locally approximable by elements of $\mathfrak{F}$であるという：$\mathcal{D}_f$の任意の点に対し，或る近傍Uがとれ，fは$U \cap \mathcal{D}_f$上で$\mathfrak{F}$の元により一様に近似できる.

locally approximable by elements of $\mathfrak{F}$である全ての函数の族を$\mathfrak{F}$の local extension といい loc $\mathfrak{F}$と書く．loc $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$であるとき，$\mathfrak{F}$は locally closed であるという．$\mathfrak{F}$を含む最小の locally closed family（これは常に存在する）を$\mathfrak{F}$の local closure といい，$\mathfrak{F}_{loc}$と書く。次の事が成り立つ.

(1)　$\mathrm{loc}\,\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ ならば $\mathfrak{F}_{loc} = \mathfrak{F}$.

(2)　$(\mathfrak{F}_{loc})_{loc} = \mathfrak{F}_{loc}$.

超限帰納法により次の補題が成り立つ.

補題3.1.　$\mathfrak{F}$をXの任意の subsets 上で定義された函数の任意の族とすると，順序数μがあって，$\forall \nu \leq \mu$に対して，次の性質を持つ函数族$\mathfrak{F}_\nu$が存在する.

(1)　$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}$,　$\mathfrak{F}_\mu = \mathfrak{F}_{loc}$.

(2)　$\alpha < \beta \leq \mu$ ならば $\mathfrak{F}_\alpha \subsetneqq \mathfrak{F}_\beta$.

(3)　$\forall \nu \leq \mu$ に対して $\mathfrak{F}_\nu = \mathrm{loc}\left(\bigcup_{\alpha<\nu} \mathfrak{F}_\alpha\right)$.

定義3.2.　任意の system $\{X, \mathfrak{A}\}$に対して，$\mathfrak{A}_{loc}$の元を $\mathfrak{A}$-holomorphic function という．$\mathfrak{A}_\nu$の元を $\mathfrak{A}$-holomorphic of class νという.

共通の定義域Eを持つ全ての$\mathfrak{A}$-holomorphic functionsの族をH(E)と書く．函数fに対して，$E \subset \mathcal{D}_f$で$f|_E \in H(E)$であるとき，fはEで$\mathfrak{A}$-holomorphicであるという．

一般に$\mathfrak{A} \subsetneqq \mathfrak{A}_1$（Kallin〔4〕の例），$\mathfrak{A}_1 \subsetneqq \mathfrak{A}_2$（Rickart〔7〕の例）．

Xの任意の部分集合Eに対して，$\bar{E}$（Eのclosure）で連続でEで$\mathfrak{A}$-holomorphicである全ての函数の族を$H^*(E)$と書く．

定理3.2.　$f_1, ---, f_n \in H^*(E)$とし，$\Gamma := \{(f_1(x), ---, f_n(x)) \mid x \in \bar{E}\}$とする．Fを$\mathbb{C}^n$におけるΓの閉近傍で正則な函数とし，$h(x) := F(f_1(x), ---, f_n(x)),\ x \in \bar{E}$，とおくと$h \in H^*(E)$である．

証明．　hは$\bar{E}$で連続である．Pを$\mathbb{C}^n$における多項式とすると，$P(f_1(x), ---, f_n(x)) \in H^*(E)$．$y \in E$とし$(f_1(y), ---, f_n(y))$を中心としFが正則である領域に含まれる閉多重円板$\Delta \subset \mathbb{C}^n$を選ぶ，yの近傍Vを$\forall x \in V \cap E$に対して$(f_1(x), ---, f_n(x)) \in \Delta$なる様にVを選ぶ．そうするとFはΔの近傍で正則であるから，多項式列$\{P_i\}$がΔ上でFに一様に収斂する様な列$\{P_i\}$が存在する．故に，$V \cap E$上で

$$h(x) = \lim_{i \to \infty} P_i(f_1(x), ---, f_n(x))$$

よって　$h \in H^*(E)$．

系．　$h \in H^*(E)$で$h(x) \neq 0$ on $\bar{E}$ならば，$1/h \in H^*(E)$．

補題3.3.　Xをcompact，$[X, \mathfrak{A}]$をnatural，Uを

$X-\partial[X,\mathfrak{A}]$ の open set とするとき，$f\in H^*(\overline{\sqcup})$ ならば，
$\|f\|_{\overline{\sqcup}}=\|f\|_{bdry\sqcup}$，ここで $bdry\,\overline{\sqcup}:=\overline{\sqcup}\wedge X-\sqcup$.

証明．f を $\mathfrak{A}$-holomorphic of class ν in $\sqcup$ に制限したものを "νの場合" ということにする．全ての "νの場合" に真であることを示す．

"0の場合"は Rossi の定理により真である．今全ての $\alpha<\nu$ に対して成り立ち "νの場合" は真でないとする．そうすると $\sqcup\wedge\partial[X,\mathfrak{A}]=\phi$ なる開集合 $\sqcup$ と $\overline{\sqcup}$ で連続で $\mathfrak{A}$-holomorphic of class ν なる函数 f が存在して $\|f\|_{\overline{\sqcup}}>\|f\|_{bdry\sqcup}$.
$\overline{\sqcup}$で連続で $\mathfrak{A}$-holomorphic of class $\alpha<\nu$ in $\sqcup$ なるすべての函数と，f によって生成された $C(\overline{\sqcup})$ の subalgebra を $\mathfrak{B}$ とする．f の仮定により，$\sqcup$ は system $[\overline{\sqcup},\mathfrak{B}]$ の independent point y を含む．y の近傍 V で，$\overline{V}<\sqcup$ で，f は V 上で $\bigcup_{\alpha<\nu}\mathfrak{A}_\alpha$ の函数の一様極限である様に V を選ぶ．$\mathfrak{B}$ の任意の函数は $\overline{V}$ 上で $\sqcup$ と同じ性質をもつ．y は $[\overline{\sqcup},\mathfrak{B}]$ の independent point であるから，次の性質をもつ $g\in\mathfrak{B}$ が存在する．

$$|g(y)|>\|g\|_{\overline{\sqcup}-V}\geqq\|g\|_{bdry\,V}.$$

故に或る $\alpha<\nu$ に対して，次の様な $\overline{V}$ 上で定義された $h\in\mathfrak{A}_\alpha$ が存在する：$|h(y)|>\|h\|_{bdry\,V}$.
然し，全ての $\alpha<\nu$ に対して真であるという仮定に反する．
故に全ての ν に対して真である．

定義 3.4.　$x \in X$ に対して近傍 U が存在して，x が system $[U, H(U)]$ の independent point であるとき，x は $[X, \mathfrak{A}]$ の $\mathfrak{A}$-holomorphically independent point であるという。

$\mathfrak{A}|U \subseteq H(U)$ であるから，$[X, \mathfrak{A}]$ の任意の locally independent point は $\mathfrak{A}$-holomorphically independent である。又次の事が成り立つ。

定理 3.4.　$[X, \mathfrak{A}]$ が natural ならば，$[X, \mathfrak{A}]$ の $\mathfrak{A}$-holomorphically independent point は independent point である。

証明.　x を $[X, \mathfrak{A}]$ の $\mathfrak{A}$-holomorphically independent point とすると，x が $[U, H(U)]$ の independent point である x の近傍 U が存在する。今 x が $[X, \mathfrak{A}]$ の independent point でないとすると $x \in \hat{K} - K$ なる compact set K が存在する。さて x の近傍 V を $V \cap \hat{K} \subset U$ で $V \cap K = \phi$ なる様に選ぶ。$\Gamma := bdry_{\hat{K}}(V \cap \hat{K})$ とおくと，Γ は U の compact subset で $x \notin \Gamma$. 故に $|f(x)| > \|f\|_{\Gamma}$ なる $f \in H(U)$ が存在する。よって $\|f\|_{\overline{V} \cap \hat{K}} > \|f\|_{\Gamma}$ である。f は $\overline{V}$ 上で $\mathfrak{A}$-holomorphic であるから，f は $\overline{V} \cap \hat{K}$ で連続で，$V \cap \hat{K}$ で $\mathfrak{A}$-holomorphic である。更に $\partial[\hat{K}, \mathfrak{A}] \subseteq K$ であるから，$V \cap \partial[\hat{K}, \mathfrak{A}] = \phi$. これは補題 3.3. に反する。

f が X 上で定義された函数とするとき，ただ 1 個の複素数 α が存在し，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，compact set K がとれ $\forall x \in X - K$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ なるとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

と書く．そうすると $\mathfrak{A}$-holomorphic functions に対する次の Liouville の定理が成り立つ．

定理 3.5.　$[X, \mathfrak{A}]$ を natural とし，$\partial[X, \mathfrak{A}] = \phi$ とし，$f \in H(X)$ とすると，

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するための必要十分条件は f = 定数である．

証明．　(1). f が定数ならば，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ の存在は明らか．

(2). $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するとし，f が定数でないとする．ここで $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ としてよい．f は連続で，compact set の外側で小であり，f は有界で次の maximum set は compact で空でない，

$$M := \{ x \in X \mid |f(x)| = \|f\|_X \}.$$

$$g := \|f\|_X^{-1} f \quad とおくと,$$

$$|g(x)| = 1 \qquad \forall x \in M.$$

$$|g(x)| < 1 \qquad \forall x \in X - M.$$

M は compact であるから，Šilov 境界 $\partial[M, \mathfrak{A}]$ は存在する．故に $[M, \mathfrak{A}]$ の independent point y が存在する．K を $y \notin K$ なる X の compact subset とし，$K_0 := K \cap M$ とする．そうすると $|u(y)| = 1 > \|u\|_{K_0}$ なる $u \in \mathfrak{A}$ が存在する（ここで $K_0 = \phi$ ならば $\|u\|_{K_0} = 0$）．$K_1 := \{ x \in K \mid |u(x)| \geq 1 \}$ とすると $K_1 \cap M = \phi$．故に $\|g\|_{K_1} < 1$．今 $\|g\|_{K_1}^k < (\|u\|_K + 1)^{-1}$ なる整数 k をとり，$h := u g^k$ とおくと，$|h(y)| = 1$ で，$x \in K - K_1$

ならば，

$$|h(x)| < \|u\|_{K_1} \|g\|_{K_1}^{k} < \|u\|_K (\|u\|_K + 1)^{-1} < 1$$

であるから $\|h\|_K < |h(y)| = 1$． 又 $h \in H(X)$ であるから，y は $[X, H(X)]$ の independent point である．故に y は $[X, \mathfrak{A}]$ の independent point である．よって $\partial[X, \mathfrak{A}] = \phi$ なる仮定に反する．よって h は定数である．

次に $\mathfrak{A}$-holomorphic functions に対する Rouché の定理を示す．Y を X の compact $\mathfrak{A}$-convex set とし，U を $Y - \partial[Y, \mathfrak{A}]$ の中の Y における open set とする．$\mathfrak{F} \subset H^*(U)$ なる族 $\mathfrak{F}$ の任意の元 f に対して，

$$S_f := \{x \in U \mid f(x) = 0\} \qquad \text{とおく．}$$

先ず次の補題を示す．

補題 3.6． $\mathfrak{F}$ を $C(\bar{U})$ の連結な部分集合で $f, g \in \mathfrak{F}$ を次の様な元とする，$S_f \cap U \neq \phi$，$S_g \cap U = \phi$．
そのとき次の様な $h \in \mathfrak{F}$ がとれる，

$$S_h \cap \mathrm{bdry}_Y U \neq \phi.$$

証明． $H^*(U)$ は $C(\bar{U})$ の subalgebra でその closure を $\mathfrak{D}$ とすると，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$ で，補題 3.2 により $\partial[\bar{U}, \mathfrak{D}] \subseteq \mathrm{bdry}_Y U$．$\bar{U}$ は Banach algebra $\mathfrak{D}$ の maximal ideal space M の natural imbedding と同一視出来る．従って次の事が得られる．

$$\partial[M, \mathfrak{D}] \subseteq \partial[U, \mathfrak{D}] \subseteq \mathrm{bdry}_Y U.$$

又定理3.2の系により，函数$\varphi \in H^*(U)$がsingularであるための必要十分条件はφが$\bar{U}$に於て零点を持つことである。

$$\mathcal{F}_s := \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \text{は} \mathcal{O} \text{の singular な元}\},$$

$$\mathcal{F}_r := \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \text{は} \mathcal{O} \text{の regular な元}\}$$ とおくと，

$f \in \mathcal{F}_s$，故に$\mathcal{F}_s \neq \phi$．

(1). $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}$の場合には，$g$はsingular，従って$g$は$\bar{U}$で零点を持つ，$\mathcal{S}_g \cap U = \phi$であるから$\mathcal{S}_g \cap bdry_Y U \neq \phi$．よってこの場合には$h = g$とすればよい。

(2). $\mathcal{F}_s \neq \mathcal{F}$の場合には，$\mathcal{F}_s \neq \phi$，$\mathcal{F}_r \neq \phi$．$\mathcal{F}$は連結であるから，$\overline{\mathcal{F}_s} \cap \mathcal{F}_r \neq \phi$かまたは$\mathcal{F}_s \cap \overline{\mathcal{F}_r} \neq \phi$．singularな元はBanach algebraの中でclosedであるから，$\mathcal{F}_s \cap \overline{\mathcal{F}_r} \neq \phi$．従って$\mathcal{F}_s$はregularな元の極限函数$h$を含む（Rickart [5]）．$h$は$\mathcal{O}$におけるtopological zero divisorである，よって$\mathcal{O}$のGelfond representationのhの像は$\partial[M, \mathcal{O}]$上で零になる（Rickart [5] 3.3.7.）．又$[M, \mathcal{O}] \subseteq bdry_Y U$であるから，

$\mathcal{S}_h \cap bdry_Y U \neq \phi$．

定理3.7.　Y，Uは補題3.6におけるものとする。$f, g \in H^*(U)$と，$x \in bdry_Y U$に対して，$|f(x) - g(x)| < |f(x)|$なるとき，fがUで零点を持つための必要十分なる条件はgがUで零点を持つことである。

証明.　$h_t := (1-t)f + tg$，$t \in [0, 1]$とおくと，

$\forall t \in [0, 1]$ に対して，$h_t \in H^*(U)$．明らかに $\{h_t\}$ は $C(\overline{U})$ の連結な部分集合である．$\forall x \in bdry_Y U$ と $t \in [0, 1]$ に対して

$$0 < |f(x)| - |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| - t|f(x) - g(x)|$$
$$\leq |f(x) - t(f(x) - g(x))| = |h_t(x)|.$$

故に，$bdry_Y U$ 上で $h_t \neq 0$ である．故に前補題3.6により，任意の h_t がUに於て零点を持つか，又はUで零点を持つ h_t が存在しないかの何れかである．$h_0 = f$ で $h_1 = g$ であるから定理が示された．

次に $\mathfrak{A}$-analytic subvarietyの定義及び性質を述べる．

定義3.5．V，YをXの部分集合とし，$V \subseteq Y$ とするとき，或る近傍Uがとれ $V \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0, f_i \in H(U), i \in I\}$ と表わされるとき，VをYの $\mathfrak{A}$-analytic subvariety という．

次の補題を証明なしに述べます．

補題3.8．(i) 空集合 ϕ とYとはYの $\mathfrak{A}$-analytic subvarieties である．

(ii) V_1，V_2 がYの $\mathfrak{A}$-analytic subvarieties であれば $V_1 \cap V_2$ も又Yの $\mathfrak{A}$-analytic sub-variety である．

(iii) VをYの $\mathfrak{A}$-analytic subvariety とし $Y' \subseteq Y$ とすると，$V \cap Y'$ は Y' の $\mathfrak{A}$-analytic subvariety である．

(iv) Y' をYの relatively open set とし，VをYで relatively closed である Y' の $\mathfrak{A}$-analytic subvariety とすると，Vは Y' の

$\mathfrak{A}$-analytic subvariety である.

(v) V が X の $\mathfrak{A}$-analytic subvariety で $V = V_1 \cup V_2$ で $\overline{V_1} \cap V_2 = V_1 \cap \overline{V_2} = \phi$ なる様に分解されれば, V_1 及び V_2 は X の $\mathfrak{A}$-analytic subvarieties である.

定理3.9. $[X, \mathfrak{A}]$ が natural で Y が X の $\mathfrak{A}$-convex set ならば, Y の任意の $\mathfrak{A}$-analytic subvariety V は $\mathfrak{A}$-convex である.

証明. K を V の任意の compact set とすると, $V \subseteq Y$ で Y は $\mathfrak{A}$-convex であるから, $\hat{K} \subseteq Y$, 又 $\hat{K}$ は compact $\mathfrak{A}$-convex set である. 前補題3.8.(iii) により $V \cap \hat{K}$ は $\hat{K}$ の $\mathfrak{A}$-analytic subvariety である. 故に compact な場合に対する定理により $V \cap \hat{K}$ は $\mathfrak{A}$-convex である. $K \subseteq V \cap \hat{K}$ より $\hat{K} \subseteq V \cap \hat{K}$, $\hat{K} \subseteq V$.

§4. $\mathfrak{A}$-holomorphic convexity

この節に於て system $[X, \mathfrak{A}]$ は natural とする.

$G \subset X$ のとき, $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $H(G)$ の任意の subset とし, G における compact set K に対して

$$\widehat{K}(\{f_\lambda\}) := \{x \in G \mid |f_\lambda(x)| \leq \|f_\lambda\|_K,\ \lambda \in \Lambda\}$$

と定義する. これを簡単に $\widetilde{K}$ とも書く.

$\mathfrak{A}|G \subset \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ならば, $\widetilde{K} \subseteq \hat{K}$ であり, X の中での $\widetilde{K}$ の closure は compact である.

定義4.1. $\Omega \subseteq G$が弱い意味の$\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$-convexであるとは，任意のcompact set $K \subseteq \Omega$に対して，$\hat{K}$が又compactであり，かつ$\hat{K} \subseteq \Omega$のときである．Gが弱い意味の$H(G)$-convexであるとき，Gは弱い意味の$\mathfrak{A}$-holomorphically convexという．

ΩがGのcompact subsetならば，Ωが弱い意味の$\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$-convexであるための必要十分条件は$\hat{\Omega} = \Omega$である．

さて，$\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq H(G)$とし，$\check{h}$を$\mathbb{C}^\Lambda$に値をとる次の様な函数とする

$$\check{h}(x) := \{ h_\lambda(x) \}, \quad x \in G.$$

任意の$x \in G$に対して，$\tilde{x} := (x, \check{h}(x))$とする．$G$から$X \times \mathbb{C}^\Lambda$の中へのhomeomorphismであるmapping $x \to \tilde{x}$をgeneral Oka mappingという．Gの任意の部分集合Ωに対して，general Oka mappingによる$X \times \mathbb{C}^\Lambda$の中の像$\tilde{\Omega}$は集合$\Omega$の上の$\check{h}$のグラフである．

定理4.1. GをXの開集合とし，$\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$は$H(G)$の任意の部分集合とする．$\Omega$が$G$の弱い意味の$\{h_\lambda\}$-convex subsetならば，グラフ$\tilde{\Omega}$は$X \times \mathbb{C}^\Lambda$の中の弱い意味の$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{P})$-convex setである．

証明． 先ずΩがcompactの場合に証明する．

$\Delta_\Omega := \{ \check{\zeta} \in \mathbb{C}^\Lambda \mid |\zeta_\lambda| \leq \|h_\lambda\|_\Omega, \ \lambda \in \Lambda \}$とすると$\Delta_\Omega$は弱

い意味の $\mathcal{P}$－convex である．次に各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$H_\lambda(x, \check{\zeta}) := h_\lambda(x) - \zeta_\lambda, \quad (x, \check{\zeta}) \in G \times C^\Lambda$$

と定義すると，

$$\mathcal{W}(\{H_\lambda\}) := \{(x, \check{\zeta}) \in G \times C^\Lambda \mid H_\lambda(x, \check{\zeta}) = 0, \lambda \in \Lambda\}$$

は，$G \times C^\Lambda$ の中で $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－analytic subvariety である．H_λ の定義によって，$\hat{\Omega} = \mathcal{W}(\{H_\lambda\}) \cap (G \times \Delta_\Omega)$ である．故に $\hat{\Omega}$ は，$G \times \Delta_\Omega$ の compact $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－analytic subvariety．したがって，$\hat{\Omega}$ は $X \times C^\Lambda$ で弱い意味の $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－convex である．

一般の場合には，Γ が $\hat{\Omega}$ の compact subset とすると，Γ は或る compact set $K \subseteq \Omega$ の像 $\hat{K}$ である．Ω は弱い意味の $\{h_\lambda\}$－convex であるので，$\hat{K}$ は compact で $\hat{K} \subseteq \Omega$ である．前半の証明により $\hat{K}$ のグラフは $X \times C^\Lambda$ の中で弱い意味の $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－convex である．故に Γ の弱い意味の $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－convex hull は $\hat{K}$ のグラフに含まれ $\hat{\Omega}$ に含まれる．故に $\hat{\Omega}$ は弱い意味の $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－convex である．

証明なしに次の二定理をあげる．次の定理は，定理 4.1 の逆にあたる．

定理 4.2．$\mathfrak{F}$ を $\mathcal{O}|G$ と $\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ によって生成された $H(G)$ の subalgebra とし Ω は $\hat{\Omega}$ が $(X \times C^\Lambda)$ の中での弱い意味の $(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$－convex であるような G の subset とすれば，Ω は弱い意味の $\mathfrak{F}$－convex である．故に弱い意味の $H(G)$－

convex である.

次の定理は, natural と弱い意味の $\mathfrak{F}$－convex との関係を示す.

定理 4.3. G は X の open subset とし, $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{O}|G$ を含む $H(G)$ の subalgebra とするならば, G の subset Ω が弱い意味の $\mathfrak{F}$－convex であるための必要十分条件は system $[\Omega, \mathfrak{F}]$ が natural であることである。

定義 4.2. G を open set とし, G の任意の compact set K に対して, bdry G の近傍 U がとれ, 任意の $x \in G \cap U$ に対して或る函数 $f_\mu \in \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \leq H(G)$ を選んで

$$|f_\mu(x)| > \|f_\mu\|_K$$

なるようにできるとき, G は強い意味の $\{f_\lambda\}$－convex という. G が強い意味の $H(G)$－convex のとき, G を強い意味の $\mathfrak{O}$－holomorphically convex という。

定義 4.3. G を X の領域 (connected open set) とし, 任意の open set $G' \supset G$ に対して $H(G')|G \subsetneqq H(G)$ なるとき, G を domain of $\mathfrak{O}$-holomorphy という.

定義 4.4. G を X の領域とし P が

$$P_0 := \{x \in G \mid |f_i(x)| < 1 \ , \ f_i \in H(G) \ \ i = 1, \cdots, k\}$$

の一つの連結成分と表わされ, $\overline{P} \subset G$ のとき P を $\mathfrak{O}$-analytic polyhedron という。$<$ を $\leq$ にかえたとき P を $H(G)$ に関する

closed $\mathfrak{A}$-analytic polyhedron という.

定理4.4. 領域 G が $H(G)$ に関して 強い意味の $\mathfrak{A}$-holomorphically convex なるための必要十分条件は G が弱い意味の $\mathfrak{A}$-holomorphically convex である。

証明. G が強い意味の $\mathfrak{A}$-holomorphically convex とする. $K(\subset G)$ が compact ならば $\hat{K}$ は又 compact である. 仮定より, $\hat{K} \cap \mathrm{bdry}_X G = \phi$. $\hat{K}$ の定義より $\hat{K} \subset G$ で $\hat{K}$ は $\hat{K}$ の closed set であるから compact である.

逆は明らかである.

上の定理より強い意味と弱い意味の $\mathfrak{A}$-holomorphically convex は同値であるから 以後これらを単に $\mathfrak{A}$-holomorphically convex という.

定理4.5. X を locally compact Hausdorff space とする. G を X の領域とし $\mathfrak{A}$-holomorphically convex とする. 又 G が G の compact subsets の増加列の合併として表わされるならば G は $H(G)$ に関する open (又は closed) $\mathfrak{A}$-analytic polyhedrons の増加列の合併として表わされる.

証明. 任意の compact set $K \subset G$ に対して, G は $\mathfrak{A}$-holomorphically convex であるから 或る open set D がとれ $\bar{D}$ が compact で $\hat{K} \subset D \subset \bar{D} \subset G$ を満たす. G は $\mathfrak{A}$-holomorphically convex であるから $\hat{K}$ の定義によって

任意の $x \in \mathrm{bdry}\, D$ に対して，$|f(x)| > \|f\|_K$ なる函数 $f \in H(G)$ が存在する．故に次のような x の近傍 U_x と函数 $g \in H(G)$ が存在する：

$$\|g\|_K < 1$$

$$|g(y)| > 1 \quad , \quad y \in U_x .$$

$\mathrm{bdry}_X D$ は compact であるから，このような有限個の近傍 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ に $\mathrm{bdry}\, D$ は覆われる．したがってこれに対応する函数 $f_1, \cdots, f_m$ によって $\mathfrak{A}$-analytic polyhedron を作り，K を含むその一つの連結成分を P とすれば $K \subset P \subset G$ である．closed $\mathfrak{A}$-analytic polyhedron の場合も同様．

X を Hausdorff space とし，G を X の領域，P を G の $\mathfrak{A}$-analytic polyhedron とする．任意の compact set $K \subset P$ に対して，次のことを得る：

$$\hat{K}_0 := \{ x \in P \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \ , \forall f \in H(G) \} \subset P.$$

故に $\mathrm{bdry}\, P \cap \overline{\hat{K}_0} = \phi$．よって次のことを得る．

定理 4.6.　G を X の領域とし，$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$，$\overline{P_i} \subset \mathring{P}_{i+1}$，ここで P_i は $H(G)$ に関する $\mathfrak{A}$-analytic polyhedron とすると，G は $\mathfrak{A}$-holomorphically convex である．

定理 4.7.　G は X の領域で，$H(D)$ に関しての closed $\mathfrak{A}$-analytic polyhedrons の増加列によって近似でき（$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$，$P_n \subset \mathring{P}_{n+1}$），次のような open set の列 $\{V_n\}$ がとれる：各 n に対して，$V_n \cap (\mathrm{bdry}\, G) \neq \phi$ で任意の open set U が

$U \cap (\mathrm{bdry}\, G) \neq \phi$ のとき，ある V_n が存在して $V_n \cap G \subset U$.
のとき G は domain of $\mathfrak{O}$-holomorphy である。

証明　上記の $\{V_n\}$ をとり　まず V_1 と最初に交わる $\{P_n\}$ の元を P_{ν_1} とする. $V_1 \cap \mathrm{bdry}\, Q_1 \ni \eta_1$ に対して $|f_{\nu_1 j}(\eta_1)| = 1$ である P_{ν_1} を定める函数 $f_{\nu_1 j}$ がある. η_1 の近傍 V_1 の中に $|f_{\nu_1 j}(\xi_1)| > 1$ である点 ξ_1 が存在する. 以下帰納的に ν_λ, η_λ, g_λ, ξ_λ を次のように作る。まず $\lambda - 1$ まで定まったとする. このとき V_λ と交わり $\xi_1, \cdots, \xi_{\lambda-1}$ をすべて含む最初の $\{P_n\}$ の元を P_{ν_λ} とし, $\mathrm{bdry}\, P_{\nu_\lambda} \cap V_\lambda \ni \eta_\lambda$ に対して, $|f_{\nu_\lambda j}(\eta_\lambda)| = 1$ なる P_{ν_λ} を定める函数 $f_{\nu_\lambda j}$ をとり, η_λ の近傍 V_λ の中で $|f_{\nu_\lambda j}(\xi_\lambda)| > 1$ となる点 ξ_λ をとる。このの $f_{\nu_\lambda j}$ を用いて

$$g := \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{2^\lambda} (f_{\nu_\lambda j})^{m_\lambda}, \quad m_\lambda \text{ は正整数,}$$

と定義すると g は G で $\mathfrak{O}$-holomorphic で, m_λ を任意の λ に対して $|g(\xi_\lambda)| > \lambda$ となるように帰納的に選べるので G は domain of $\mathfrak{O}$-holomorphy となる.

さて，有限個の $\mathfrak{O}$-holomorphically convex domains の共通部分の各成分は，又 $\mathfrak{O}$-holomorphically convex であるが次に $\mathfrak{O}$-holomorphically convex domains の増加列を考察する.

定義 4.5.　領域の対 (D, D'), $D \subset D'$ に対して，任意の $f \in H(D)$ が任意の compact set $K \subset D$ の上で $H(D')$ の

元によって一様に近似できるとき，対(D, D')をRunge対という．

明らかに，領域の列$\{D_i\}$に対して，$\overline{D_i} \subset D_i$，$\overline{D_i}$がcompactで対$(D_i, D_{i+1})$がRunge対ならば，$D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$とおくと，$(D_1, D)$はRunge対である．この事により$\mathfrak{O}$-holomorphic functionsに対する次のBehnke-Steinの定理を得る．

定理4.8．$\{D_i\}$を$\mathfrak{O}$-holomorphically convexな領域列とし，$\overline{D_i} \subset D_i$，$\overline{D_i}$はcompactで，対$(D_i, D_{i+1})$がRunge対ならば，$D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$は$\mathfrak{O}$-holomorphically convexである．

文　献

[1] I. Glicksberg : Maximal algebras and theorem of Radó, Pacific Jour. Math. 14 (1964) 919−941.

[2] R. C. Gunning and H. Rossi : Analytic functions of several complex variables, (1965)

[3] 一松信： 多変数解析函数論，培風館 (1960).

[4] E. Kallin : A nonlocal function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963) 821−824

[5] C. E. Rickart : General theory of Banach algebra, (1960).

[6] ——: Analytic phenomena in general function algebras, Pacific Jour. Math. 18 (1966) 361–377.

[7] ——: The maximal ideal spaces of functions locally approximable in a function algebra, Proc. Amer Math. Soc. 17 (1966) 1320–1326.

[8] ——: Holomorphic convexity for general function algebras. Canadian Jour. Math. 20 (1968) 272–290.

[9] H. Rossi: The local maximum modulus principle. Ann. Math. 72 (1960) 1–11.