

変換理論による二階非線形微分方程式の解の探索

京大 工学部 林 千博  
全 上 田 皖 亮  
全 川 上 博

§ 1. はじめに

工学系で遭遇する非線形強制振動の代表的なものとして古くから次式が研究されてゐる。

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t) \quad (1)$$

ただし  $e(t)$  は周期  $L$  の周期関数であり,  $f(x, \dot{x}), g(x)$  は (1) 式の解の存在と一意性に関する条件を満し, さらに解の一様有界性を保証するような関数であるとある。具体的に以下で考察する方程式は Duffing 方程式と外力を有する van der Pol 方程式であつていふれどもこれらの条件を満たしてゐる。

ところで解の有界性が満たされた系において工学的にもまた数学的にも興味のある問題は, 解の時間・相空間での大域的なふるまいである。この報告は (1) 式の特別な場合について微分方程式の定性理論で知られてゐる変換理論を用いて解

の位相的性質を具体的に数値計算を行なって調べたものである。(1)式にはじめてこの変換理論を応用したのは N. Levinson であるが、実際に計算してみると H. Poincare, G. D. Birkhoff によって制限三体問題で研究された種々の性質の解が (1)式にもあることがわかった。

## § 2. 変換 $T$ とその性質

(1)式を書き直して

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t) && \equiv X(x, y, t) \\ \dot{y} &= -f(x, y, t) - g(x) + e(t) && \equiv Y(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

とする。そこで (2)式で表わされる方程式の  $x, y$  相平面での解のふるまいについて考察する。(2)式は  $t$  に関して周期  $L$  毎にその形を変えないから  $t = 0$  における  $x, y$  相平面を  $t = nL$  ( $n$  は整数) における  $x, y$  相平面に移す変換  $T$  を定義することができる。この変換は (2)式の仮定からわかるように  $x, y$  相平面をそれ自身に移す  $1:1$  の向きを変えない連続変換である。 $x, y$  相平面で変換  $T$  によって動かない点, 可なり  $P_1 (= TP_0) = P_0$  を不動点,  $P_m (= T^m P_0) = P_0$  で  $P_0 \neq P_i$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ) なる点を  $m$ -周期点と呼び, それぞれに (2)式の周期解で周期が  $L$  および  $mL$  である解が対応する。また点列  $\{P_n\}$  ( $n > 0$ ) のうち  $P_0$  にいくらでも近い点があるとき  $P_0$

を帰帰点と呼ぶ。

次に一様有界性の仮定から  $x, y$  相平面に最大有界不変集合  $\Delta$  が存在する。 $\Delta$  は有界連結閉集合で  $T$  によって不変であり、 $\Delta$  以外の点は  $T$  により  $\Delta$  に近づく。また  $\Delta$  は少なくとも一つの不動点を持ち、不動点・周期点・帰帰点などがあればすべて  $\Delta$  に含まれるなどの諸性質を持っている。なお  $\Delta$  は面積が 0 の場合 (後述の Duffing 方程式) とそうでない場合 (外力のある van der Pol 方程式) があり、一般にその形状と構造はわかっていない。そこでこの報告は具体的に  $\Delta$  の形状および構造を明らかにし、その他の不変集合についても考察を行った。

変換に関して不変な閉じた曲線は不変閉曲線と呼ばれる。このような不変閉曲線が存在するならば、これは  $\Delta$  に含まれることは明らかである。さてここを十分なめらかな不変閉曲線  $C$  に対応する解の模様について考える。初期値を  $C$  上に限ったとき、 $C$  上の点を通る (2) 式の解の全体は  $x, y, t$  空間で曲面を形成し、この曲面の  $t=0$  と  $t=L$  における断面を同一視すれば、これは円環面に同位相である。このことは  $C$  の点を通る解は円環面上で与えられる微分方程式の解として表わされることを示している。円環面上の微分方程式に対しては回転数と呼ばれる実数が対応し、この数は円環面上の微分

方程式の解の  $t=0$  から  $t=1$  までの増加量の平均値ともい  
うべきものである。この回転数により円環面上の微分方程式  
の解の性質は特徴づけられる。

- i) 回転数が  $P/q$  ( $P, q$  は互に素な整数) で表わされる有理  
数のとき、円環面上には  $qL$  を周期とする周期解が幾つ  
かあり、非周期解は  $t \rightarrow \infty$  で周期  $qL$  の解に収束する。
- ii) 回転数が無理数のときは円環面上を限りなく埋め尽くすよ  
うな軌道を有する解が存在し、これに対応して (2) 式は  
いわゆる概周期解をもつ。

また (2) 式の周期解の安定性に関して、不動点、周期点の分  
類が必要である。これは不動点の近傍の点の変換  $T$  によるふ  
るまいから特性方程式を導びき、これより得られる特性乗数  
により分類することができ、不動点が単純である場合には次  
の4つの型がある。すなわち完全安定不動点、完全不安定不  
動点、正不安定不動点、および逆不安定不動点。ここで正お  
よび逆不安定不動点に対しては変換  $T$  による2本の不変曲線  
が存在し、このうち1本は変換  $T$  により、他の1本は逆変換  
 $T^{-1}$  により不動点に近づく。前者を  $\omega$  枝、後者を  $\alpha$  枝と呼ぶ  
ことにする。又  $\alpha$  相平面上で  $\alpha$  枝同士、 $\omega$  枝同士は互に交又  
しないが、 $\alpha$  枝と  $\omega$  枝は交又する場合がある。このときには  
二重漸近解が存在する。

### § 3. Duffing の方程式

(2) 式の一例として

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\epsilon y - x^3 + B \cos t \end{aligned} \quad (3)$$

なる Duffing の方程式を取り上げ、アナログ計算機により具体的に計算して得た結果を略述する。(3)式でパラメタを $\epsilon$ および $B$ を変えたときに前に述べた最大有界不変集合 $\Delta$ (この場合 $\Delta$ の面積は0)の形状並びに構造はどうなるかを調べた。

第1図(a)は $\epsilon = 0.2$ ,  $B = 0.3$ 付近で、電気回路でいえば可飽和鉄心を含む共振回路で鉄共振現象の起こるパラメタである。この場合 $\Delta$ は細線で示した曲線であり、 $\Delta$ は図中1, 2, 3の番号を付けた3つの不動点を持つ構造をしている。このうち2および3は完全安定不動点で、鉄共振回路で非共振状態および共振状態を表わす同期解が対応している。また不動点1は正不安定不動点であって、この点には太線で示した1本の不変曲線( $\omega$ 枝)と細線で示した1本の不変曲線( $\alpha$ 枝、この場合 $\Delta$ )が出入している。なお1に入っている不変曲線( $\omega$ 枝)は $x, y$ 相平面を2分し、夫々の中にある不動点へ収束する漸近解の初期値領域の境界となっている。

(b)は $\epsilon = 0.2$ ,  $B = 3.0$ 付近のもので、2, 3は完全安定、1は正不安定不動点である。なおこの場合には2および

3に相当する(3)式の周期解には偶数次高調波成分が現れている。

(c)は $\tau = 0.1$ ,  $B = 3.2$ 付近のもので, (b)において完全安定であった2および3の不動点が正不安定不動点になり, その両側に2つつ完全安定不動点(4と5および6と7)が発生した場合である。不変曲線については(a)で説明したのと同様である。

(d)は $\tau = 0.2$ ,  $B = 5.5$ 付近のもので, この場合は(b)で完全安定であった2および3の不動点が逆不安定不動点となったため, その両側に完全安定2-周期点(4と5および6と7)が4個生じている。

(e)は $\tau = 0.1$ ,  $B = 0.15$ 付近のもので(a)図の非共振状態の不動点2のまわりに3個の完全安定3-周期点および3個の正不安定3-周期点が生じた場合である。

第2図は二重漸近解の存在する場合の例である。(a)は第1図(a)においてパラメタ $\tau$ を小さくした場合( $\tau = 0.05$ ,  $B = 0.3$ )で正不安定不動点 $P_1$ に出入りする1組の $\alpha$ 枝と $\omega$ 枝が交叉している。ここで $\alpha$ 枝と $\omega$ 枝の交点で表わされる解はいずれも二重漸近的であり, この場合のように二重漸近解が変換 $T$ および $T^{-1}$ によって同じ不動点へ近づくときは homoclinic であると呼ばれている。G. D. Birkhoff の研究によれば

homoclinic な解の近くには無限に多くの周期解が存在すること  
が知られている。図で例えば homoclinic な点  $Q$  の近くには  $R_1$ ,  
 $R_2$ ,  $R_3$  を示した 3-周期点, より近くには 4 周期点, ... なる  
周期解が存在する。従って  $\Delta$  の形状並びに構造は非常に複雑  
で到底数値計算は出来そうにない。

(b) は (3) 式  $\tau = 0.2$ ,  $B = 10$  付近の  $x, y$  相平面で,  $P_1$  は  
正不安定不動点,  $P_2, P_3, P_4$  は正不安定 3 周期点,  $P_5, P_6$ ,  
 $P_7$  は完全安定 3 周期点を, 実線は  $P_1$  に出入りする不変曲線を,  
鎖線は  $P_2, P_3, P_4$  の各々に出入りする不変曲線を示している。  
図からもわかるように実線, 鎖線が互に交叉し合っただけで複雑で  
あるが, 例えば点  $Q_1$  は変換  $T^3$  により  $P_2$  へ, 逆変換  $T^{-1}$  により  
 $P_1$  に近づく。このように正および逆変換の繰返しにより異なる  
種類の不動点に近づく二重漸近解は heteroclinic であると呼  
ばれている。このときも  $Q_1$  の近くには無限に多くの周期解が  
存在する。 $Q_2$  およびその他の heteroclinic な解についても同様の  
考察が出来る。なおこの場合 homoclinic な解も同時に存在して  
いる。 $\Delta$  の形状および構造については詳しいことはわかって  
いない。

#### §4. 外力を有する van der Pol の方程式

ここでは (2) 式の他の例として, 電気回路では真空管を含

んだ発振回路の同波数引込み現象の解析の際に現れる

$$\dot{x} = y \quad (4)$$

$$\dot{y} = \mu(1-x^2)y - x + B \cos \nu t$$

について考察する。第3図は(4)式で  $\mu = 1.0$  とし、P+ログ計算機を用いて求めた同波数引込み領域を示したものである。図には基本調波引込み領域、第3高調波引込み領域、 $1/2$  および  $1/3$  分調波引込み領域および等しい回転数を与える  $B$   $\nu$  面上の点を結んだ等回転数曲線を示してある。これら引込み領域内にパラメタ  $B$  および  $\nu$  を与えたと同波数引込み現象により、同期振動が現れるが、各引込み領域以外の所では概同期振動と同期振動が入り交じって存在している。第4図は第3図で示した各領域内にパラメタ  $B$  および  $\nu$  を与えた場合の  $x$   $y$  相平面の様子を調べたものである。

(a) は  $B = 0.5$ ,  $\nu = 1.0$  としたとき(第3図点 a)で、点1は完全不安定不動点、点2は正不安定不動点、点3は完全安定不動点を示している。点2を通る  $x$  枝は点3に終る不変曲線を示したもので、これは閉じた不変曲線であり  $\Delta$  はこの曲線で囲まれた閉領域よりなる。この場合  $\Delta$  の境界となる  $x$  枝を示した閉曲線の回転数は1である。

(b) は  $B = 0.5$  でパラメタ  $\nu$  を少し大きくし  $\nu = 1.1$  とした場合(第3図点 b)で閉じた不変曲線が概同期解を与えてい



ると考えられる。このとき  $\alpha$  の回転数  $\rho$  は  $\rho = 0.92\dots$  で、 $\Delta$  はこの閉曲線に囲まれた閉領域である。

(c) は  $B = 1.5$ ,  $V = 1.9$  (第3図点 c) としたときの  $\alpha$  も  $\alpha_2$ 、点 1 は完全不安定不動点、2 と 4, 3 と 5 が共役となった正不安定  $\omega$  周期点、6 と 8, 7 と 9 が共役となった完全安定  $\omega$  周期点を、また太線が  $\Delta$  の境界である閉じた不変曲線である。

(d) は  $B = 5.0$ ,  $V = 2.8$  (第3図点 d) としたときの  $\alpha$   $1/3$  分数調波引込み領域内にパラメータを定めたもので、2, 3, 4 が正不安定  $\omega$  周期点、5, 6, 7 が完全安定  $\omega$  周期点を示している。

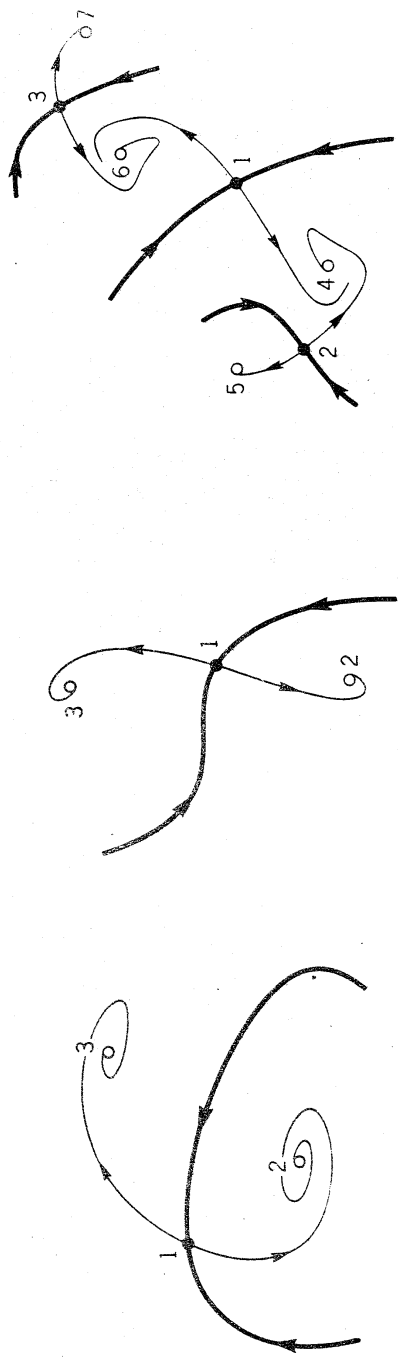
(e) は  $B = 14.8$ ,  $V = 3.3$  (第3図点 e) としたときで、この場合点 1 で示される完全安定不動点と 5, 6, 7 で示される完全安定  $\omega$  周期点の 2 種類の安定な同期解が存在する。なお 2, 3, 4 は正不安定  $\omega$  周期点である。

(f) は  $B = 14.2$ ,  $V = 3.3$  (第3図点 f) の場合で (e) の場合の不動点 1 が完全不安定な不動点になり、その周りに閉じた太い曲線で示した不変曲線を生じている。

## § 5. おわりに

以上 (1) 式の特別な場合である (3) 式 (Duffing の方程式) と (4) 式 (外力を有する van der Pol の方程式) について解の

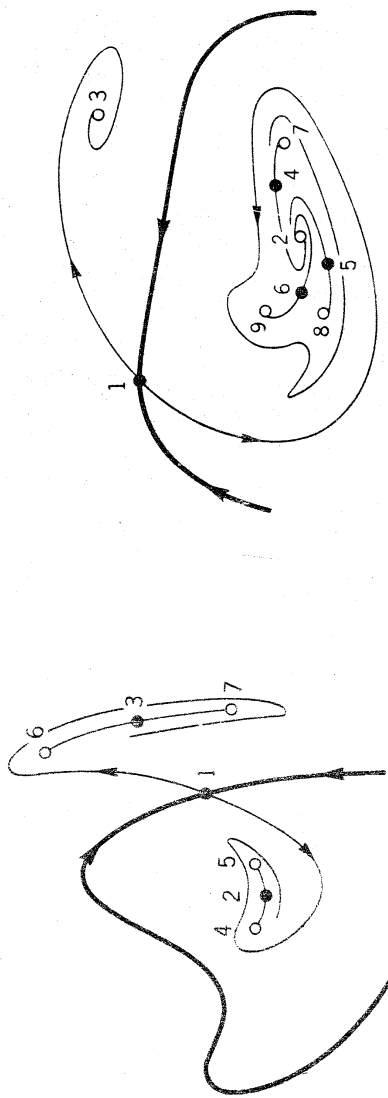
定性的性質を周期解を中心に考察した。これら詳しいことについては International Journal of Nonlinear Mechanics に発表が予定されている, 筆者等の Transformation Theory as Applied to the Solutions of Nonlinear Differential Equations of the Second Order およびその中にある文献を参照されたい。



(c)

(b)

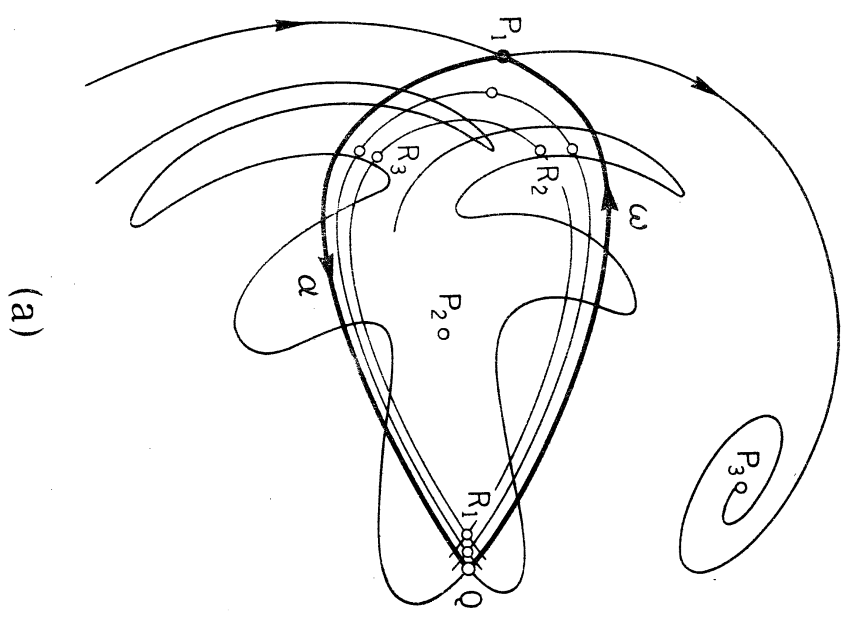
(a)



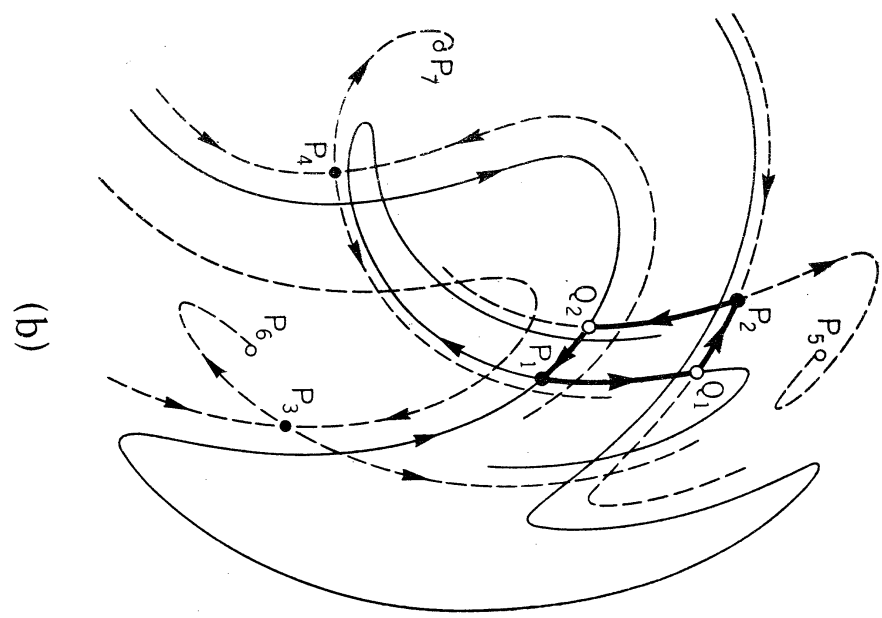
(e)

(d)

図1 (3)式の変換  $T$  による不動点・周期点と不変曲線



(a)



(b)

图 2 (3) 式  $\omega$  变换  $T$  による二重漸近点、 (a) Homoclinic points (b) Homoclinic points & heteroclinic points

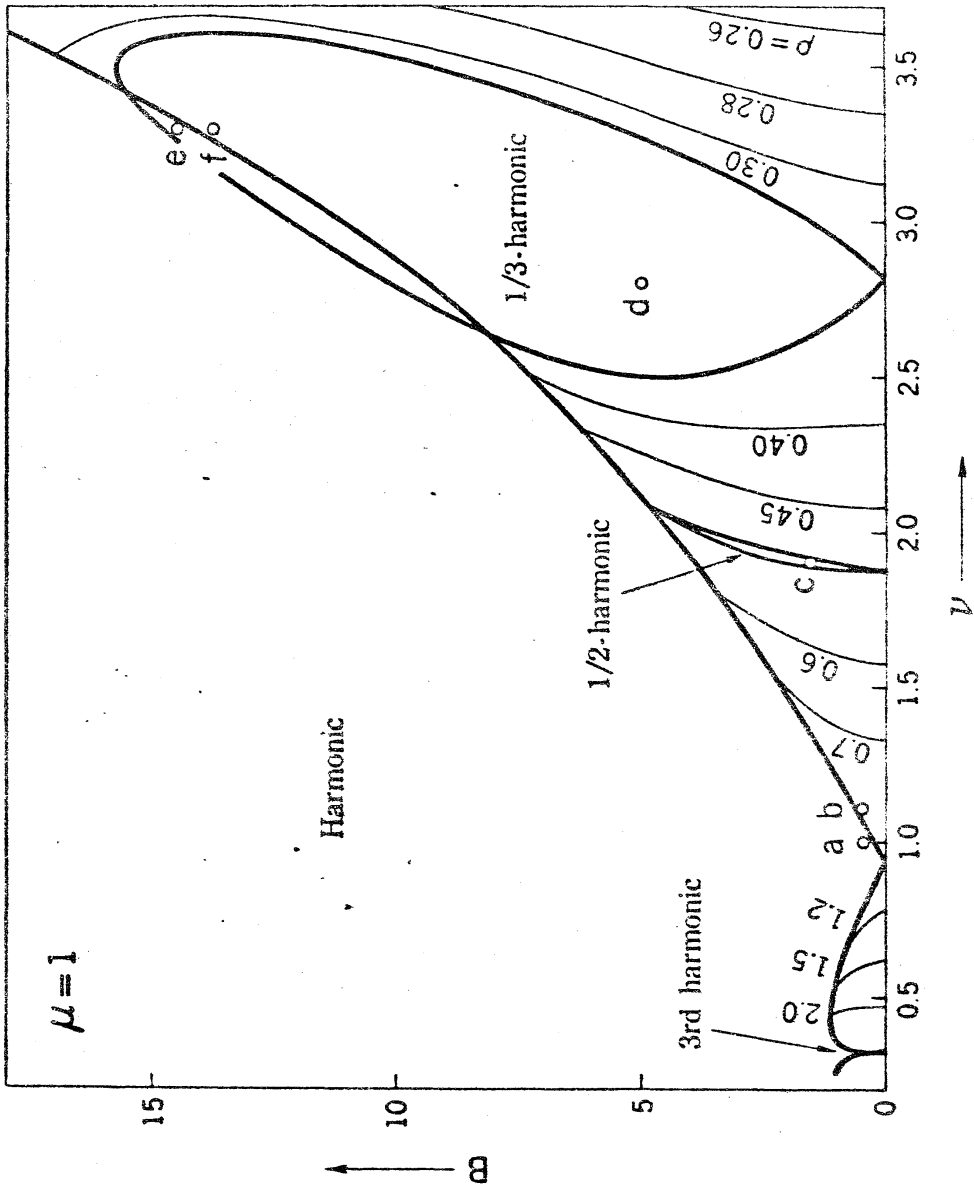
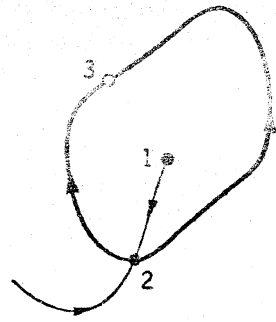
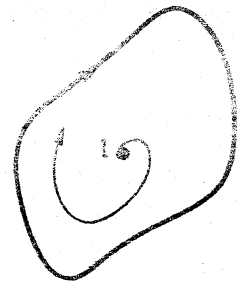


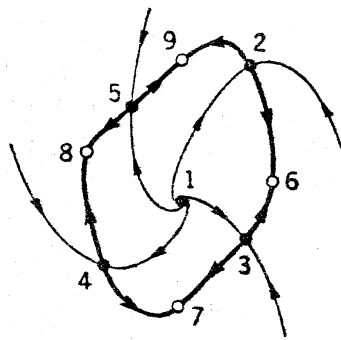
图3 圆波数引込領域と等回転数曲線



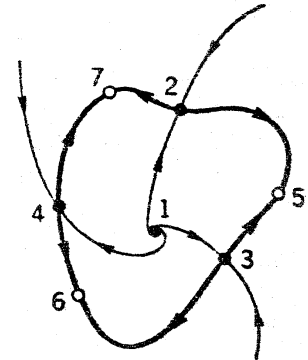
(a)



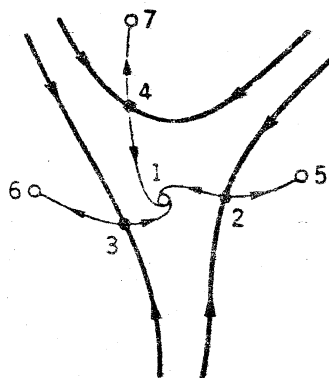
(b)



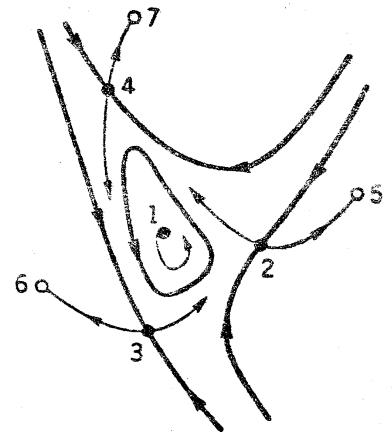
(c)



(d)



(e)



(f)

図4 (4)式の変換Tによる不動点・周期点と不変曲線