

電子回路解析における二三の問題

日本電気 渡部 和

1. はじめに

電子計算機が出現し、科学技術上の困難な問題の解決に期待のもてる存在にまで成長して来たのと同時に、科学技術上の問題もより高度精密複雑になって来て両者の競争は果しない感があり数値解析の問題の上にも新しい局面が現れつつあるようにも思える。

本文では IC の工業化によって新しい時代に入りつつある電子工業の回路設計解析について最近のトピックスに触れ問題点を述べてみたい。

その解決と進歩のために数学の豊かな成果の一端でも我々現場技術者に御教示いたゞければ幸いである。

電子回路解析そのものは古くから研究されて来たが、最近の計算機の発達と共に新しく問題となっているもの、進歩したものをあげると、
・グラフ理論の応用
・非線形連立方程式の能率的解法
・数理計画手法の応用（最適化問題）
・数値積分法
・行列等（固有値，逆行列）の能率的算法
などがある。これらは全て電子回路解析を縦糸として一貫して互に強く結び合っている。これらの全てについて述べ御検討を仰ぎたい次第であるが、紙面の都合上我々があるいは他の部門で最近研究されたいくつか代表例について簡単に述べたい。

2. 線形電気回路の定常解析

集中電気回路網は線形グラフに抽象化される。このグラフ G に注目して回路解析を考察する。

G を構成する枝の集合 E を 2 分割 ($E = E_n \cup E_m, E_n \cap E_m = \emptyset$) しその枝特性（オームの法則）を E_n に属する枝は電圧を、 E_m に属する枝は電流を独立変数に取ったハイブリッド行列で与える。この分割に従って

$G_n \triangleq G\{E_m; \emptyset\}$ および $G_m \triangleq G\{\emptyset; E_n\}$ で定義される 2 つのグラフを導入する。ここで $G\{A; B\}$ は枝の集合 A に属する枝を開放、 B に属する枝を短絡除去して G から得られるグラフを表わすものとする。 G_n の 1 つの木を T_n ,

G_m の1つの木を T_m とすれば, $T \triangleq T_n + T_m$ は G において木になり, これに対応する基本カットセット行列 D は

$$D \triangleq \begin{array}{c|c|c|c} & T_n & T_m & CT_n & CT_m \\ \hline & 1 & 0 & N_{nn} & N_{nm} \\ \hline & 0 & 1 & 0 & N_{mm} \end{array}$$

と表わせる。ここで CT_n は G_n における T_n の補木を, CT_m は G_m における T_m の補木を表わす。

この分割に対応してキルヒホフの法則はつぎのような混合表示で記述される。

$$\begin{cases} X = A'x + S \\ s = AY + \Gamma x \end{cases} \quad (2.1)$$

ただしベクトル s 及び S は電源を表わし, 行列 A, Γ はそれぞれ

$$A \triangleq \begin{array}{c|c|c|c} & T_n & CT_m & CT_n & T_m \\ \hline & 1 & 0 & N_{nn} & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & -N'_{mm} \end{array}$$

$$\Gamma \triangleq \begin{array}{c|c} & T_n & CT_m \\ \hline & 0 & N_{nm} \\ \hline -N'_{nm} & 0 & \end{array} \begin{array}{l} T_n \\ CT_m \end{array}$$

を表わす。また添字 n, m はそれぞれ E_n, E_m の枝に, 添字 b, c はそれぞれ木の枝, 補木の枝についての量であることを示す。

一方オームの法則のハイブリッド表示は

$$Y = HX \quad (2.2)$$

で与えられ, 式 (2.1) と (2.2) を合わせて

$$[AHA' + \Gamma]x = s - AHS \quad (2.3)$$

という混合形の回路方程式をうる。混合解析における独立変数 x は T_n の枝電圧と CT_m の枝電流から成っており, 式 (2.1) の第1式から明らかのように, すべての枝の電圧, 電流のどちらか一方をキルヒホフの法則に従って

定めることができる1つの変数の組であるともいえる。したがって独立変数の数は G_n の階数 $r(G_n)$ と G_m の零度 $\mu(G_m)$ の和に等しく、特に $E_n = \phi$ (閉路解析) あるいは $E_m = \phi$ (節点解析) の場合にはそれぞれ $\mu(G)$, $r(G)$ に一致する。

そこで混合解析における独立変数の個数

$$r_H \triangleq r(G_n) + \mu(G_m) \quad (2.4)$$

を分割 E_m , E_n に対応する混合階数 (hybrid rank)

と定義する。この r_H の値は分割法によって一般に異なるが、分割法は有限個であるので最小値が存在するはずである。この最小値は回路網の接続だけから決る量であるので

$$d \triangleq \min r_H = \min [r(G_n) + \mu(G_m)] \quad (2.5)$$

を回路網の位相幾何学的自由度 (topological degrees of freedom と呼ぶ) (自由度と略す)

さてこの自由度 d を与える分割 E_n^* , E_m^* を求めることは

E-木; 補木の枝を全て短絡したグラフの rank r_s が最小と (Extremal tree) なる木。

と呼ばれる特別な木を1つ見つけることによって解決されることが、極めて最近、我々を含む日本の研究者によって明らかにされた。

与えられたグラフから1つのE-木を求め、更に最適分割 (d を与えるという意味で) E_n^* , E_m^* を決定する方法については文献〔1〕に発表されている。

さて次に混合解析における主要な計算であるところの行列 $(AHA^T + \Gamma)$ の逆転の手間について考えて見よう。ある分割において G_n が rank r_1, r_2, \dots, r_p なる P 個の非可成分に分かれ、 G_m が nullity $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ なる q 個の非可成分に分かれたとすれば

$$AHA' + \Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \text{r}_1 \\ \text{r}_2 \\ \vdots \\ \text{r}_p \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -N_{nm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} N_{nm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (2.6)$$

という形になる。 N_{nm} , $-N_{nm}$ は $0, \pm 1$ 要素だけから成る行列であるという性質を使えば計算時間を

$$\sum_{i=1}^p r_i^3 + \{u(G_m)\}^3 \quad \text{又は} \quad \{r(G_n)\}^3 + \sum_{i=1}^q u_i^3$$

で評価できる。これと、いきなり節点解析（閉路解析）を行なった時の計算時間 $r^3(u^3)$ と比較してみればその有効さは顕著である。このように適当な分割法を見つけて混合解析を行なうことによって計算手数が数百分の1、数千分の1になる場合はまれではない。

今のところ、自由度 d を与える独立変数のとり方の組から、上で述べた意味で計算手数を最小にするものを決定することは可能となっている。しかし混合階級 r_H が d より大きくなることも許して、上の意味の最適分割を求めることは、残された問題の1つである。

3. 一般電気回路の過渡解析

R L C の 3 種の素子 (非線形, 相互誘導を含む) からなる電気回路の過渡解析の問題を考えてみよう。この問題では正規形の微分方程式 (状態方程式) の一般形

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

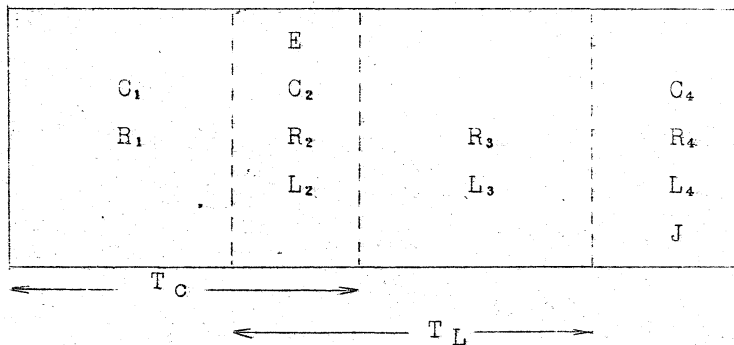
を導くことがまず重要である。

これも回路構造をグラフ G として考察することから始まる。まず次の 2 つの木 T_C, T_L をとる。

T_C : 全ての電圧源とできるだけ多くの C を枝とし, 全ての電流源とできるだけ多くの L を補木枝とする木。

T_L : 全ての電圧源, T_C の L の枝とできるだけ多くの L を枝とし, 全ての電流源, T_C の C の補木枝とできるだけ多くの C を補木枝とする木。

これによって各素子は次の様な部分集合に分解される。



ここで L_2 (T_C と T_L の共通 L 枝の組) の L の個数 r_L は L だけの独立な カットセット の数に等しく, C_2 (T_C と T_L の共通 C 枝の組) の C の個数 r_C は C だけの独立な カットセット の数に等しいことがわかる。

同様に C_4 (T_C と T_L の共通 C 補木枝の組) の C の個数 μ_C は C だけの独立な タイセット の数に等しく, L_4 (T_C と T_L の共通 L 補木枝の組) の L

の個数 μ_L は L だけの独立なタイセットの数に等しい。

この回路の微分方程式を立てると、その階数は L と C の総和に等しいが、L または C だけからなるカットセット、タイセットに関しては積分定数を除いては単に線形制限式にすぎないから微分方程式の階数から除くことができる。従って R L C 回路網の回路方程式の階数は

$$d = n_L + n_C - (r_C + r_L + \mu_C + \mu_L) \quad (3.2)$$

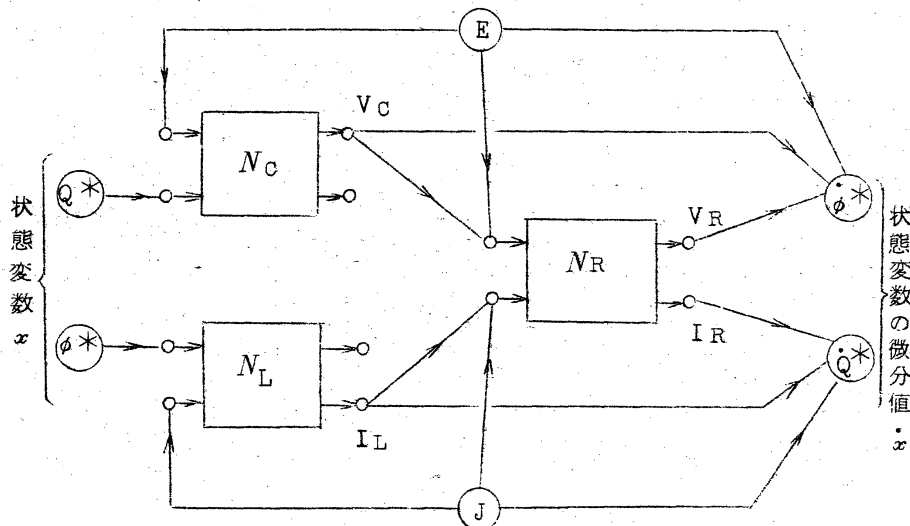
とあらわされる。すなわち d は C_1 に属する C の個数と L_1 に属する L の個数の和に等しい。

このようにして回路方程式の階数は回路網トポロジの考察から明らかとなり、独立変数としては、

$$\left. \begin{aligned} Q^* &= (T_C \text{ において } C_1 \text{ からきまる独立なカットセットに含まれる電荷の総和}) \\ \phi^* &= (T_L \text{ において } L_1 \text{ からきまる独立なタイセットに含まれる磁束の総和}) \end{aligned} \right\}$$

を採用すれば回路の全ての状態を規定することができるのであり、その意味から Q^*, ϕ^* を状態変数とよぶ。

状態変数 Q^*, ϕ^* と電源 E, J から回路解析を行なり手順を流れ図で示すと次の様になる。



すなわち C 以外の T_C の枝を短絡， C 以外の T_C の補木枝を開放した C だけの回路 N_C を考え Q^* と E を外力として一種素子回路（抵抗回路）を解き T_C の枝電圧 V_C を決定する。同じく L 以外の T_C の枝を短絡し， L 以外の T_C の補木枝を開放した L だけの回路 N_L についても ϕ^* と J を外力として一種素子回路を解き T_C の補木枝電流 I_L を決定する。

次にこれらの枝電圧，補木枝電流と E ， J を外力として R 以外の T_C の枝を短絡，補木枝を開放して抵抗回路 N_R を解き枝電圧 V_R ，補木枝電流 I_R を求めれば ϕ^* ， \dot{Q}^* を見出すことができる。

すなわち回路微分方程式が算法的に決定された。これを数値的に積分することにより過渡特性を見出すことができる。ここに述べた状態変波解析の算法は最も一般化されたもので複雑な非線形結合回路網においても有効に計算を進めることができる。このような解析は最近の IC 技術の進歩とともにますます重要となってきている。この解析理論も計算機時代の電気回路網理論にふさわしいものであろう。

4. 常微分方程式の数値解法の問題

4.1 たちのわるい非線形常微分方程式の数値解法の問題点

半導体, IC, 電子デバイスなどのように本来非線形偏微分方程式であらわされる系をモデル化して集中定数非線形電気回路として解析する際, 現われる非線形常微分方程式は, 時定数が広範囲に分布している所謂 "STIFF SYSTEM" となっていることが多い。このようなシステムの数値積分では通常の公式 (RKG法など) ではしばしば数値積分困難におち入ることがある。

今微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) \\ X &= (x_i(t)), \quad f = (f_i(x_j(t))) \end{aligned} \quad (4.1)$$

を考え, 時刻 t において局所的に次の線形同次システム

$$\begin{aligned} \dot{X} &= J(t) \cdot X \\ J(t) &= \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\} \text{ (Jacobian 行列)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

を対応させる。 $J(t)$ の固有値 λ_i の実部が負とし, t と共に λ_i はゆっくり変化するものとして t の近傍で (4.1) を (4.2) で近似する。

(4.2) の $t_n = nh$ ($n=0, 1, 2, \dots$) における 1 つの固有解は

$$X(t_{n+1}) = e^{-q} \cdot X(t_n) \quad (4.3)$$

$q = \lambda_h$ (但し $-\lambda$ は $J(t_n)$ の単一固有値の 1 つとする)

とあらわすことが出来る。

従来多くの数値積分公式は (4.3) において $|q| = |\lambda h|$ が十分小さい値であるものとして e^{-q} をその q^p の項まで一致する近似べき級数に展開したもの (Euler, R.K. 等) に相当し $J(t)$ の固有値が t と共にゆっくり変化する場合 (すなわち λ が小さい) に有効である。

しかし Stiff System では $J(t)$ の固有値は急激に変化し, e^{-q} の Taylor 展開は収束しにくく, 数値積分はしばしば困難になる。

このような Stiff System を計算機で数値積分を行う際の数値積分公式は次の条件を元たすことが望ましい。

- (i) 考えている t の範囲で $J(t)$ の固有値 $-\lambda_1$ とステップ巾 h の積をと
り $q = \lambda h$ のとるあらゆる値 ($q \rightarrow 0$ から十分大きい q まで) に対し
て十分な精度をもつこと。
- (ii) 逐次計算ステップを重ねて行っても数値解が発散しないこと。換言
すれば $q \rightarrow 0$ でも数値計算的に安定であること。

このように精度と安定度は数値積分上最も重要で又相矛盾する面もある。
安定度として Dahlquist の定義した A-Stable をとれば $q \rightarrow 0$
での精度 p は $p \leq 2$ しかとれないこともわかっている。

我々は q の値が十分大きくても又十分小さくても精度よく且安定な数
値積分公式を求めたい。それによると固有値に比して大きいステップ幅
 h が許されるし、ステップを累積しても数値的に発散することはなくな
る。

4.2 数値積分公式の精度の検討

簡単のため一変数 $x(t)$ の関数 $f(x, t)$ について考察しよう。 $x(t+h)$
を次のように展開する。

$$x(t+h) = x(t) + h \left[(1-a) \dot{x}(t+h) + a \dot{x}(t) \right] + h^2 \int_0^1 (\theta-a) \ddot{x}(t+\theta h) d\theta \quad (4.4)$$

$$x(t+h) = x(t) + h \left[\left(\frac{1+a}{2} \right) \dot{x}(t+h) + \left(\frac{1-a}{2} \right) \dot{x}(t) \right] - \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{b+a}{2} \right) \ddot{x}(t+h) \right. \\ \left. - \left(\frac{b-a}{2} \right) \ddot{x}(t) \right] - \frac{h^3}{4} \int_0^1 [2\theta^2 - 2(1-a)\theta + (b-a)] \dddot{x}(t+\theta h) d\theta \quad (4.5)$$

上式で $b = \frac{1}{2}$ とおいて最後の項を部分積分すれば

$$\begin{aligned}
x(t+h) = & x(t) + h \left[\left(\frac{1+a}{2} \right) \dot{x}(t+h) + \left(\frac{1-a}{2} \right) \dot{x}(t) \right] - \frac{h^2}{12} [(1+3a) \ddot{x}(t+h) \\
& - (1-3a) \ddot{x}(t)] - \frac{h^4}{12} \int_0^1 \theta [2\theta^2 - 3(1-a)\theta + 3(b-a)] x^{(4)}(t+\theta h) d\theta
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

上式において $t=t_n=nh$, $x(t_n)=x_n$ とおき, 展開の剰余項を無視すれば x_n から x_{n+1} を求める Implicit 積分公式を求めることが出来る。

さてこの積分公式の精度と安定度を考察するために $f(x, t)$ として特別な関数 $f(x, t) = -\lambda x$ を考察しよう。但し λ は $\operatorname{Re} \lambda > 0$ の任意の複素数とする。その正確な解は $x = e^{-\lambda t}$ となるが, これは又一般の微分方程式 (4.1) の t の近傍における局所的近似方程式 (4.2) の 1 つの固有解 (固有値は t と $t+h$ で不変と考える) とも考えられる。

この微分方程式 $\dot{x} = -\lambda x$ に (4.4) (4.5) (4.6) から導かれる積分公式を適用すれば次の公式が得られる。

$$x_{n+1} = r^{(\nu)}(q) \cdot x_n \tag{4.7}$$

$$r^{(1)}(q) = \frac{1-\mu q}{1+(1-\mu)q} \tag{4.8}$$

$$r^{(2)}(q) = \frac{4-2(1-a)q+(b-a)q^2}{4+2(1+a)q+(b+a)q^2} \tag{4.9}$$

$$r^{(3)}(q) = \frac{12-6(1-a)q+(1-3a)q^2}{12+6(1+a)q+(1+3a)q^2} \tag{4.10}$$

積分公式 (4.7) が Dahlquist の意味の A-Stable であるための必要十分条件は全ての q に対し $\operatorname{Re} q > 0$ において $|r^{(\nu)}(q)| < 1$ であることである。これから (4.8) (4.9) (4.10) が A-Stable の条件を充たすた

めには

$$\mu \leq \frac{1}{2}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0 \quad (4.11)$$

が必要十分である。

ところで t_n と t_{n+1} の間では固有値は変わらないとすれば, (4.3) が正確な解であり (4.7) との誤差

$$\varepsilon^{(\nu)}(q) = r^{(\nu)}(q) - e^{-q} \quad (4.12)$$

を $q \rightarrow 0$, および q の大きい値に対しても出来るかぎり小さくする様積分公式のパラメータを選ぶことが必要である。

まず $\varepsilon^{(1)}(q)$ について考察すれば

$q \rightarrow 0$ に対して $\varepsilon^{(1)}(q) \rightarrow 0$ のとき $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$; これは Trapezoidal Rule
($p=2$)

$q \rightarrow \infty$ に対して $\varepsilon^{(1)}(q) \rightarrow 0$ のとき $\mu \rightarrow 0$; これは Backward Euler
($p=1$)

一般には $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ の適当な値に対し $0 \leq q_0 < \infty$ の q_0 で $\varepsilon^{(1)}(q_0)$ が零となる。

次に $\varepsilon^{(2)}(q)$ については

$q \rightarrow 0$ に対し $\varepsilon^{(2)} \rightarrow 0$ のとき $a=b=0$; Second Padé 近似

$q \rightarrow \infty$ に対し $\varepsilon^{(2)} \rightarrow 0$ のとき $a=b=1$; Backward Taylor

一般には $0 < q_1 < \infty, 0 < q_2 < \infty$ の 2 個の q の値に対し

$\varepsilon^{(2)}(q_1, q_2) = 0$ とするには a, b は 0 と 1 の間の適当な値とせねばならない。

以上のようにしてきめたパラメータをもつ積分公式は大きい q の値で誤差を小さく出来るのみならず, A-stable である。しかし実用上からみれば A-stable は強すぎる条件であって, 更に q の広範囲な値に対して精度のよいしかも実用的に安定な (A-Stable より弱い) 数値積分算法が望まれる。

4.3 数値計算について

一般の非線形常微分方程式(4.1)を前述のようなImplicit公式で数値計算を行う際 X_n から X_{n+1} を求めるには(4.4)と(4.1)から次の非線形連立方程式を解かねばならない。

$$X_{n+1} - X_n - h \{ (1-u)X_{n+1} + uX_n \} = 0 \quad (4.13)$$

すなわち

$$\{ X_{n+1} - (1-u)hf_{n+1} \} - (X_n + u hf_n) = 0 \quad (4.14)$$

これは例えばNewton-Raphsonの逐次計算によって次のように解くことが出来る。

$$\begin{aligned} X_{n+1}^{(1)} &= X_n + [I - (1-u)hJ_n]^{-1} h \cdot f_n \\ X_{n+1}^{(\ell+1)} &= X_{n+1}^{(\ell)} + [I - (1-u)hJ_{n+1}^{(\ell)}]^{-1} \{ X_n + u hf_n \\ &\quad + (1-u)hf_{n+1} - X_{n+1}^{(\ell)} \} \end{aligned}$$

$$\ell = 1, 2, \dots$$

$$J_n = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{t=n h} \quad (4.15)$$

このように各ステップ毎に非線形方程式を解くことは面倒であるが、これによって大きい q の値に対して良い精度と安定度が保証されるならば、その努力は引き合ものである。しかし(4.15)ではJacobian行列の逆行列を計算する手間があり、階数 n のに対し通常 n^3 の手数がかゝり、これを少しでも能率化することは、このようなImplicit公式の実用化のKey Pointとなる。一般にJacobianは所謂Sparse matrixであり、しかも電気回路のような場合にはそのSparsenessは t に無関

係であるから、各ステップ毎に逆行列を計算するより逆行列を数式 (Program) 的に求めておきステップ毎の数値計算の段階では略非零要素の個数に比例する手数で計算する手法が提案されている。このような Sparse Matrix の逆算には Crout の算法が有効である。

Hachtel, WilloughbyらはIC化されたCML回路の過渡解析を行うため、トランジスタを非線形集中定数電子回路で表現し45元連立非線形微分方程式を解いた。この時固有値は低域(.3~50GHz)に5個中間域(150~300GHz)に28個そして500~3300GHzにわたってひろく分布した12個であって計算時間は5ns迄の応答を計算するのにIBM 360 モデル67で6分であった。これは通常のRunge-Kutta法で行うとすれば2時間以上も要するのでこのようなStiff Systemに対してimplicit integrationが非常に有効であることがわかる。

5. むすび

計算機時代には計算の能率又は手数の問題が問題の解決可能か不可能かの鍵を握るものとなる。その意味から従来簡単に考えられ見過し勝であった計算能率、精度(切捨て、丸め誤差)の問題も徹底的に基礎理論から実用算法まで研究されることが望まれる。本文ではその方向に沿うものとして電子回路解析のトピックスを述べたもので御検討の資料として御役に立てば幸いである。

文 献

- [1] 石崎, 大附, 渡部 "回路網解析と位相幾何学的自由度"
電子通信学会誌 1968年6月
- [2] Ohotsuki, Watanabe "State - Variable Analysis of RLC Networks Containing Nonlinear Coupling Elements" C.T. Feb. 1969 (To be appeared)
- [3] 伊理 "行列階数および項別階数に関する一つの最大最小定理(回路網の位相幾何学的自由度の問題に対する一つの代数的接近法)"
電子通信学会誌 1968年5月
- [4] 岸, 梶谷 "リニアグラフにおける最大距離にある二つの木"
電子通信学会誌 1968年5月
- [5] Dahlquist "A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods" BTT 3 1963
- [6] W. Loniejer & Willoughby private communication
- [7] G.D. Hachtel & R.A. Willoughby "A Program for Design Optimization of an Integrated Emitter - Follower Current Switch Circuit" ISSCC 1968. Feb.