数理解析研究所講究録
第 62 巻 1968 年 165-176

差分法による微分方程式の解法概論

立教大 理・数 一松 信

§0. はじめに

この題はものすごく大きな題で，「総合報告」をもとめられたわけであるが，十分の準備ができず，きわめて偏った，表面だけの話に終り期待されたほどの内容にまでまとまっていないことをおわびする．

数学者は「函数」とは「対応操作」のことというが，じっさいに函数方程式を解くといった場合には，解析的にとける場合は別として，「有限の表示」をしなければ扱えない．展開その他で有限次元の空間の要素で近似して表現する方法と，離散的な函数値に対する値の表で表現する方法とがよく使われ，後者が差分法による解法に該当する．

§1. 常微分方程式の場合．

大別して Runge-Kutta 型の前進型公式と，多段階法とに分けられる．その誤差解析は，非線型の方程式については

なお多くの問題点が残されているとはいえ，Henriciの著書[6]をはじめ，多くの詳しい研究がある．

近年わが国で行なわれた数多くの研究（そのいくつかは，当研究所講究録に発表されている）のうち，　　　めぼしいものをいくつか拾ってみると，つぎのようである．

1° 数値的不安定性のある多段階公式に対して，フィルター（平滑子）をかけて，不安定成分を除去する公式（伊理正夫；[1]に解説されている）．

2° Runge-Kutta型の公式について，函数の計算回数を小やして，打切誤差の自動評価能力をもたせた公式（[2]；なお未発表の同氏による研究がある）

3° 集積丸めの誤差の自己相関係数（吉沢正；[1]に解説されている）

4° 刻み幅の自動変更例（[4]）

5° 場所により，あるいは回数により加速係数をかえた逐次加速近似（[5]）

6° Runge-Kutta-Gill法による丸め誤差の累積の自動消去のためのトリックと，それを生かすための（浮動小数点演算での）プログラミング技法（[3]）．

なお $y'=f(x)$ の積分，すなわち数値積分に対して，中間分点での重みを等しくして，打切誤差を台形公式自身より

高次にした式が，あるいは台形公式や中点公式の修正として，あるいはSimpsonの公式の重ね合わせとして，水田洋ほか多くの人々によって独立にえられている．そして積分方程式などの数値解法へ適用したときの不安定性とその対策に対しても研究されている．

そのほか，計算技巧上の問題であるが，複数個の演算レジスタをもつ計算機で，差分近似計算を能率よく同時平行処理する平行計算法（[7]）なども注目すべきものである．

以上の各問題は，いずれも興味深いが，大部分はすでに紹介され，周知の結果と思われるので，文献をあげるのにとどめる．

偏微分方程式については，問題は複雑であるが，差分法に関する大きな問題は，安定性と収束性，差分近似した方程式の数値解法，不規則な境界値に関する境界条件の近似のしかた，などであろうと思われる．ある変数に対する函数近似の手法の併用とか，Collatzらがよくやっているような方程式は正しくみたして，境界値を近似的にみたす近似解など，折中方式の問題もあるが，いまはふれない．

§2 偏微分方程式 1. 安定性

数学的には収束性と安定性の問題が興味の中心である。放物型方程式の時間に関する前進型の安定性に対する刻み幅の制限などは、もっとも古典的な成果である。

非線型方程式に対しては、摂動がある限界までは安定で、しきい値をこえると急に不安定になる例が知られている。

例. $y_t + yy_x = 0$, $0 < x \leqq 1$, $0 < t \leqq T$

$y(x,0) = x$, $0 \leqq x \leqq 1$; $y(0,t) = 0$, $0 \leqq t \leqq T$

(真の解は $y = x/(1+t)$) については、[8], [9] の研究がある。普通の蛙飛び法 (yy_x を $\frac{1}{2}(y^2)_x$ として),

$$\frac{\eta_j^n - \eta_j^{n-2}}{2h} + \frac{(\eta_{j+1}^{n-1})^2 - (\eta_{j-1}^{n-1})^2}{4h} = 0$$

(η_j^n で n が時間 t, j が空間 x 方向の分点) ではしきい値 $r(h)$ がほぼ $r_0 h$ でへるのに対して、Lax-Wendroff 法

$$\frac{\eta_j^n - \eta_j^{n-1}}{h} + \frac{(\eta_{j+1/2}^{n-1/2})^2 - (\eta_{j-1/2}^{n-1/2})^2}{2h} = 0$$

では、$r(h) \sim r_0 h^{1/4}$ で、はるかにたくましい。

この問題は一応次のように定式化できる:

Banach 空間 E, E^0 があり、E 内の集合 D から E^0 の内への(一般に非線型の)写像 F があり、$Fy = 0$ の解 $y_0 \in D$ がただ1つあるとする。実パラメタ $h \in (0, h_0]$ に対して、

Banach 空間 E_h, E_h^0 と，写像

$$E \xrightarrow{\Delta_h} E_h \xrightarrow{\Phi_h} E_h^0 \xleftarrow{\Delta_h^0} E^0 \qquad (\Delta_h,\ \Delta_h^0 \text{ は線型})$$

があり，

$$\lim_{h\to+0} \|\Delta_h y\| = \|y\|, \qquad \lim_{h\to+0} \|\Delta_h^0 z\| = \|z\|,$$

$$\lim_{h\to+0} \|(\Phi_h \Delta_h - \Delta_h^0 F) z\| = 0 \qquad (z \in D)$$

であるとき，これらを<u>離散近似</u>，$\Phi_h \eta = 0$ の解 $\eta_0(h)$ を離散近似の<u>解</u>という．$-\Phi_h \Delta_h y_0$ が局所打切誤差で，

$$\eta_0(h) - \Delta_h y_0 \in E_h$$

が大域打切誤差である．前者 $\to 0$ のとき，後者 $\to 0$ のためには，<u>安定性条件</u>：

$\varepsilon \in E_h$, $\Phi_h(\Delta_h y_0 + \varepsilon) - \Phi_h \Delta_h y_0 = \delta \in E_h^0$ なら $\|\varepsilon\| \leqq M\|\delta\|^\beta$

($\beta > 0$, M は h によらない定数)

が十分である．一般に定数 $M, r_0, \alpha > 0$ が存在して，$\|\delta\| \leqq r_0 h^\alpha$，$\delta \in E_h^0$，$h \leqq h_0$ に対して

$$\Phi_h(\Delta_h z + \varepsilon) - \Phi_h \Delta_h z = \delta$$

をみたす ε は $\|\varepsilon\| \leqq M\|\delta\|$ をみたすとき，この離散近似は z で<u>α 位の制限安定</u>であるという．

Φ_h の Fréchet 微分 Φ_h' が Hölder 条件

$$\|\Phi_h'(\zeta) - \Phi_h'(\Delta_h z)\| \leqq L h^{-n} \|\zeta - \Delta_h z\|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqq 1$$

をみたし，かつ $\|\Phi_h'(\Delta_h z)^{-1}\| \leqq S$（左辺の存在も仮定）ならば，$z$ で n/α 位の制限安定で，定数は

$$r_0 = \alpha/(\alpha+1)[S(LS)^{1/\alpha}], \qquad M = (1+1/\alpha)S$$

で与えられる。 ── しかもこの限界は一般的には最良であることが証明されている[9]

しかし上記の実験例に適用すると，実験結果とはうまくあわない。この場合ノルムのとり方に問題があり，L^2ノルムなら安定であるが，L^∞ノルムでは，有界性がいえない：

$$\|\Phi_h'(\Delta_h z)^{-1}\|_\infty = O(h^{-1/2}) \quad \text{蛙飛び}$$
$$= O(h^{-1/8}) \quad \text{Lax-Wendroff}.$$

そして上記の定理をそのまま適用すると，それぞれ $\varepsilon = O(h^2)$, $O(h^{-1})$ と見当違いな値になる。

いずれにせよ，hが小さくなると，しきい値も小さくなり，場合によっては丸めの誤差などの摂動がしきい値をこえて，計算結果が無意味になる可能性もある。上の例はまた理論と実験例とのギャップが大きいことを示すものであろう。

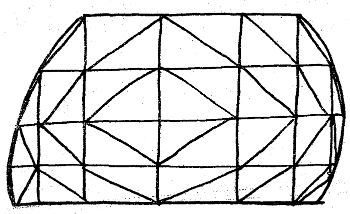
§3. 偏微分方程式2 差分近似の解法

差分近似した連立方程式の解法については反復法，とくに Gauss-Seidel 型の反復法がこれまでよく使われた。楕円型の境界値問題などについては，対角線が大きく，0が多いため，線型の場合でも消去法より有利であるが，刻みが細かくなると，収束がおそくなる。多次元の線型収束する列の加速

は，1次元のAitkenの方法と類似の公式がないわけではないが，n元ならば，n×nの行列の反転を必要とするので，実用的ではない．それでふつうには重みをつけたSOR (successive over-relaxation) と，集団緩和法，とくにADI (alternating direction implicit method) とがよく使われる．両者の比較については，いまでは少し古くなったが[11]がある．SORの加速係数の最適値の推定には多くの研究がある．最近[12]では，Čebyšev反復法による逐次近似と，最適加速係数の推定が扱われている．また加速係数が大きすぎるときの反射の影響を消す工夫([5])もある．それと関連して場所によって加速係数を変更する着想もある．しかし加速係数をあまり頻繁に変更することは，かえって数値的不安定性を助長する可能性があるといわれている．

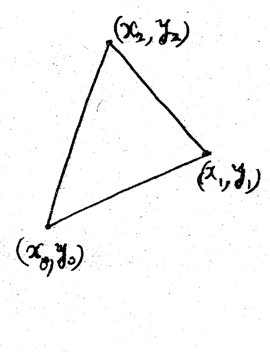
Čebyšev反復法とは，
普通のべき乗法でなく，x^nのかわりにČebyševの多項式$T_n(x)$の形になるように漸化式を作った反復で，このほうが収束が早い．

§4. 有限分割法（三角形格子による分割）



曲線で囲まれた領域での境界値問題では，境界値の指定に大きな問題があった．曲線座標によって，境界が $u=$ 定数と表現される場合はそれに直すのが便利だが，円と直線の合成や多角形の境界で，すでに困難が生ずる．刻み幅を h とすると，この部分から h^{-1} の打ち切り誤差が生ずるのが普通である．

近年有限分割法（finite method）として，三角形（3次元以上ならば単体）の格子で分割する方法が考えられている．これは境界値の誤差というだけでなく，長方形（直方体）の頂点で値が求められたとき，その内部での値を補間するために考えられたものであるらしい．すなわち適当に単体に分割して，それぞれの内部で線型補間するのである．しかしこれを差分近似に利用できる（たとえば[16]）．



(x_i, y_i) $(i=0,1,2)$ の3点で $f(x,y)$ が求められれば，(x_0, y_0) における1階微分係数の近似値は（h^2 以上を無視して）つぎの式で与えられる：

$$f_x(x_0, y_0) \doteqdot -\begin{vmatrix} 1 & y_0 & f(x_0,y_0) \\ 1 & y_1 & f(x_1,y_1) \\ 1 & y_2 & f(x_2,y_2) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

$$f_y(x_0, y_0) \doteqdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0,y_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1,y_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2,y_2) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2階微分係数を完全に表現するには6点を要するが，f_{xx}，f_{yy}だけなら，それぞれ(x_0, y_0)を通るx軸，y軸に平行な線上の3点から求められる．

この場合，全体を三角形に分割すると計算の手間が大変なので，普通には境界の近傍だけを三角形分割し，内部は普通の方形格子とする．三角形の内部の値は，頂点の値から線型補間で求める．

長所：1°きわめて一般的な方法で，原理的にはどんな領域，どんな方程式にも適用できる．

2°変化の激しさに応じて分割の精粗を変更することが自由で，精度を上げやすい．

問題点：1°三角形分割のしかたはかなり名人芸を要する．現在のところ，人間が分割してプログラムをしている．しかしこれは将来図形入出力（graphic display and input）の発展により，直接に図形が入出できれば，そのつど人間が指示することもできる．

2° 三角形に関する差分近似式がかなり複雑で，一つ一つ別の式になる．しかも線型方程式であっても大型の連立1次方程式になり，大型計算機で腕づくで解くしかない．──逆にいうと大型高速計算機がかなり自由に使えるようになったのではじめて実用になった．

3° まだ数学的裏づけ（安定性など）が十分でない．これは今後の数学者の問題である．

全般的にいって，分割をうまくやると，かなり粗い目でも大綱において正しい答がえられる場合が多く，すでに建築などでは実用化されている．今後注目すべき方法と思われる．

付記．この話題については鹿島建設の庄子氏に講演を依頼する予定であったが，不幸にして同氏の講演が取りやめになった．しかしいずれ機会を見て依頼したいと思う．

文献

[1] (森口繁一) 常微分方程式の数値解法に関する三つの着想, 電子計算機のための数値計算法 II, 培風館, 1967, 135–154.

[2] 田中正夫, 5個の函数値を使用する Runge-Kutta 公式について, 情報処理 7 (1966), 181–189

[2'] 田中正夫, Kutta-Merson Process とその類似の方法について, 情報処理 9 (1968), 18–30

[3] 伊理正夫・松谷泰行, Runge-Kutta-Gill 法について, 情報処理, 8, (1967) 103–107

[4] 小林光夫, 刻み幅自動調節の考案と実験例, 数理解析研究録, 34 (1967), 37–56

[5] 森口繁一, 加速行列を用いる無反射法, 数理解析研究録, 37 (1968), 71–95

[6] P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962.

[7] W. L. Miranker – W. Liniger, Parallel methods for the numerical integration of ordinary differential equations, Math. of Comp. 99 (1967, July), 303–320.

[8] R. D. Richtmyer - K. W. Morton, Stability studies for difference equations, Rept. Courant Inst. 1964.

[9] H. J. Stetter, Stability of nonlinear discretization algorithms, — J. H. Bramble 編, Numerical solution of partial differential equations, Academic Press, 1966. p. 111 — 123.

[10] R. B. Kellogg, Difference equations on a mesh arising from a general triangulation, Math. of Comp. No. 86 (1964, April), 203 — 210.

[11] SORとADIとの比較（藤川洋一郎）, [1]と同じ本 175 — 199

[12] L. A. Hageman - R. B. Kellogg, Estimating optimum overrelaxation parameters, Math. of Comp. 101 (1968, Jan.) 60 — 68.