数理解析研究所講究録
第63巻 1969年 49-61

コンパクト不変領域への漸近性に関する二三の定理

神戸大理　浦　太郎

1. 以下 X で位相空間，R で実数全体の集合を表わす.

写像 $\pi : X \times R \longrightarrow X$ が次の条件をみたすとき，π または (X, π) は相空間 X の上の力学系 dynamical system を定義するという.

(1)　$\pi(x, 0) = x$,　(2)　$\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$,

(3)　π は $X \times R$ で連続である.

以下一つの力学系 (X, π) が与えられているとする.

1 bis.　R^+ で負でない実数全体の集合を表わす. R^- については説明するまでもないであろう（以下同様）. $x \in X$ に対して $\mathcal{V}(x)$ は x の近傍フィルターを表わす. R の上の $t \to \infty$ に対応するフィルターを $\mathcal{L}^+$ で表わす.

2. $x \in X$ のとき，$t \in R$ に対して $\pi(x, t)$ を対応させる写像 $R \to X$ を π_x で表わす．

$C^+(x) = \pi_x(R^+)$ を x を出る正半軌道，

$C(x) \equiv C^+(x) \cup C^-(x) = \pi_x(R)$ を x を通る（全）軌道という．

$\mathcal{L}^+$ に従った π_x の cluster set を $L^+(x)$ と書き，x の + limit set という．

$V(x) \times R^+$ に従った π の cluster set を $D^+(x)$ と書き，x の + prolongation といい，$V(x) \times \mathcal{L}^+$ に従った π の cluster set を $J^+(x)$ と書き，+ prolongational limit set という．（Cf. [1], [3], [10], [11]）．

（ J^+ および n° 5 の （IV） は本論説の主題と直接の関係はないが，C^+，L^+，D^+ との関連性を明らかにするためにのべておいた）．

3. $x \in X$ とするとき，

$C^+(x) = \{x\}$ （$\Leftrightarrow C^-(x) = \{x\} \Leftrightarrow C(x) = \{x\}$）

ならば，x は特異点 singular point であるという．

4. $x \in X$ とするとき，

$$^{\exists}t \neq 0 \ni \pi_x(t) = x$$

ならば, x は self intersecting であるという.
それは次の三種類に分類される.

(1) $^{\exists}\min t > 0 \ni \pi_x(t) = x$. このとき, x は周期的 periodic であるという.

(2) $^{\forall}t \in R$, $\pi_x(t) = x$. これは 3 に述べた「x は特異点である」ことに他ならない.

(3) (1) でも (2) でもない. このとき, x は quasi-singular であるという. (Cf. [5])

定理. X が Hausdorff ならば quasi-singular points はない. (Cf. [5]).

定理. X が Hausdorff であれば, $x \in X$ が self intersecting であることと, $C(x)$ が compact であることは同値である. (未発表).

注意 X は Hausdorff であるとしよう. $x \in X$ が self intersecting であることと, $C^+(x)$ が compact であることとが同値なことは, 容易に証明される. この + を取ると非常に難しくなるのである.

5. $x \in X$ とする.

(I) $L^+(x) = \phi$ ならば x は + receding であると

いう.

(II) $L^+(x) \neq \phi$ とする.

(1) $L^+(x) \ni x$ ($\Leftrightarrow L^+(x) \cap C(x) \neq \phi \Leftrightarrow L^+(x) \supset C(x)$) ならば, x は + Poisson 安定 stable であるという.

(2) $L^+(x) \not\ni x$ ($\Leftrightarrow L^+(x) \cap C(x) = \phi$) ならば, x は ($L^+(x)$に) + 漸近的 asymptotic (to $L^+(x)$) であるという.

(III) $C^+(x)$ が relatively compact ならば, x は + Lagrange 安定 stable であるという.

(IV) $J^+(x) \ni x$ ($\Leftarrow L^+(x) \ni x$, $\Rightarrow J^+(x) \supset \overline{C^+(x)}$) ならば, x は + non-wandering であるという. これは x が − non-wandering であること, すなわち $J^-(x) \ni x$ と同値であるので, non-wandering には向きを指示する必要はない. (Cf. [6], [7], [8]).

6. 我々は漸近性 (II 2) を研究したい. 漸近性にはここで述べたものの他にも, 沢山の定義が与えられる. それに関しては Bushaw が面白い研究をしている. (未発表).

$L^+(x)$ が singleton $\{y\}$ ならば, y は特異点であり, $X \subset R^2$ で $L^+(x) \neq \phi$ かつ $L^+(x)$ が特異点を

含まなければ，$L^+(x)$ は一つの周期軌道であって，
$C(x)$ の十分近くの点は，すべて $L^+(x)$ に＋漸近する．
これらは古典的結果である．

我々は研究の方向を逆にとって，$M\subset X$ が与えられたときに，

$$\exists\, x \notin M \ni M \supset L^+(x) \neq \phi$$

とその dual $(\exists\, x \notin M \ni M \supset L^-(x) \neq \phi)$ をしらべること，およびそのような点 x の性質をしらべることが，この論説の目的である．勿論 M には場合に応じて，附加的条件を課さなければならなくなる．なお関連した新しい結果にもふれておく．

7. $\phi \neq M \subset X$ とする．

$C^+(M)\subset M$ $(\Leftrightarrow C^+(M)=M)$ ならば，M は＋不変 invariant であるという．

$C(M)\subset M$ $(\Leftrightarrow C(M)=M)$ ならば，M は不変であるという．M は不変集合，不変領域であるともいう．

$y\in X$ が特異点ならば singleton $\{y\}$，X が Hausdorff で x が periodic ならば $C(x)$ はコンパクト不変である．

そこで M を不変集合とする．

$x \notin M$, $\phi \neq L^+(x) \subset M$ ならば x は広義で M に+漸近的であるという.

$x \notin M$, $L^+(x) = M$ ならば x は(狭義で) M に+漸近的であるという.

M を(コンパクトな)閉じた不変集合とする.($N \subset M$ が(コンパクトな)閉じた不変集合ならば, $N = M$ である)なる命題が成立つとき, M は(コンパクトな) minimal set であるという.

定理. $x \in X$, $L^+(x) \neq \phi$ ならば $L^+(x)$ は閉じた不変集合である.

定理. M はコンパクトな minimal set であるとする. $x\ (\notin M)$ が広義で M に+漸近的ならば, x は狭義でも M に+漸近的である.

8. $\phi \neq M \subset X$ に対して,

$$A^+_w(M) = \{x \mid L^+(x) \cap M \neq 0\},$$

$$A^+(M) = \{x \mid \phi \neq L^+(x) \subset M\}$$

とおき, $A^+_w(M)$ と $A^+(\omega)$ とをそれぞれ M の region of + weak attraction, region of + attraction という.

この記号を使えば，M を不変集合，$x \notin M$ とするとき，x が広義で M に＋漸近的なることと，$x \in A^+(M)$ とは同値である．（Cf. [1], [2], [3]）．

9. 今後，相空間 X は局所コンパクト（Hausdorff）であるとし，M は常に $\phi \neq M \subset X$ なるコンパクト不変集合を表わすものとする．

10. $D^+(M) = M$ ならば，M は＋安定 stable であるといい，$A^+_w(M) \in \mathcal{V}(M)$ ならば，M は＋ weak attractor，$A^+(M) \in \mathcal{V}(M)$ ならば，M は＋attractor であるという．

11.

定理．M が＋ weak attractor であることと，$A^+_w(M)$ が M を含む開いた不変集合であることとは同値である．

M が＋ attractor であることと，$A^+(M)$ が M を含む開いた不変集合であることとは同値である．（Cf. [1], [2], [3]）．

12. M が + attractor であると同時に + 安定であるとき，M は + 漸近安定であるという．

定理．M が + weak attractor であれば，$D^+(M)$ はコンパクト，+ 漸近安定な不変集合であり，その region of + attraction は $A^+_w(M)$，すなわち

$$A^+(D^+(M)) = A^+_w(M)$$

である．かつ $N\ (\supset M)$ がコンパクト，+ 漸近安定な不変集合であれば，$N \supset D^+(M)$ である．いいかえると，$D^+(M)$ は M を含む最小のコンパクト，+ 漸近安定な不変集合である．（Cf. [1], [2], [3]）．

13. $P(N)$ を変数 $N\ (\in 2^X)$ をもつ一つの命題とする．M が $P(N)$ に関して孤立しているとは

$$\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni \{(P(N),\ N \subset V) \Rightarrow N \subset M\}$$

なることをいう．

$\mathcal{Q}$ を X の部分のつくる族，すなわち 2^X の部分集合とするとき，M が $\mathcal{Q}$ から孤立しているとは

$$\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni \{(N \in \mathcal{Q},\ N \subset V) \Rightarrow N \subset M\}$$

なることをいう．（Cf. [10]）．

14.

定理. M がコンパクト不変集合から孤立しているとする.

(1) M は+漸近安定である.

(2) M は−漸近安定である.

(3) 二点 $x, y \notin M$ が存在して, $L^+(x) \subset M$, $L^-(x) \subset M$ である.

(1), (2), (3) のいずれか一つが起こる. もし M が閉集合でなければ, 一つだけしか起こらない.

15.

定理 (Zubov). M が+安定ならば, すべての $x \notin M$ に対して $L^-(x) \cap M = \phi$ である.

この逆は真でないが, M が+安定なことと, すべての $x \notin M$ に対して $D^-(x) \cap M = \phi$ は同値である. (Cf. [10], [11], [12]).

16. 14の定理が得られたので, 我々の議論は M がコンパクト不変集合から孤立していない場合に向けられる. その一般論は [12] に述べられているが, 複雑であるので, ここでは省略する. なお [12] では安定性

を中心として述べてある.

17. これから,「コンパクトな不変集合より孤立している」という條件を多少弱めても得られる結果を二三述べる.

今後 M はコンパクトな minimal set とし, かつコンパクトな minimal sets からは孤立していると仮定する. また U で

$$N(\subset \bar{U}) \text{ コンパクト minimal} \Rightarrow N = M$$

なるような M の近傍を表わすものとする.

18.

$$N_U^+ = \{x \in \bar{U} - M \mid C^+(x) \subset \bar{U}\}$$

とおく. 慣例に反して

$$N_U = N_U^+ \cap N_U^-$$

とおく. $N_U \neq \phi$ ならば, N_U は Bendixson の région nodale fermée である.

定理. $(\exists V \in \mathcal{V}(M) \ni N_V = \phi)$ ならば $C^-(N_U^+) = A^+(M)$ である. (未発表)

定理 $N_U = \phi$ ならば, すべての $x \in N_U^+$ に対して, x は M に + 漸近的である. (Cf. [7], [8]).

定理. $x \in N_v^+ - N_v^-$ ならば, x は $L^+(x)$ に$^+$漸近的である. (Cf. [7], [8]).

19. 以上述べたことは, 適当な修正を施せば, local dynamical systems に拡張せられるが, 簡単のために dynamical systems の枠内で述べておいた. 前者については, 文献 [4], [5], [8], [11] を見られたい.

References

[1] J. Auslander, N. P. Bhatia, P. Seibert : Attractors in Dynamical Systems, Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 9 (1964), pp. 55-66.

[2] N. P. Bhatia : Weak Attractors in Dynamical Systems, Ibid., vol. 11(1966), pp. 56-64.

[3] N. P. Bhatia, G. Szegö : Dynamical Systems : Stability Theory and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1967, Berlin, Heidelberg, New York.

[4] O. Hájek : Structure of Dynamical Systems, Comm. Math. Univ. Carolinae, vol. 6(1965), pp. 53-72.

[5] ________ : Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, 1968, New York.

[6] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov : Qualitative Theory of Differential Equations, Moscow-Leningrad, 1949(Russian); English edition, Princeton Univ. Press 1960, Princeton.

[7] T. Saito : On the Flow outside an Isolated Minimal Set, Proc. US-Japan Seminar on Diff. and Funct. Equations June 1967 edited by W. A. Harris Jr. and Y. Sibuya, W. A. Benjamin 1967, New York, Amsterdam.

[8] ________ : Isolated Minimal Sets (to appear).

[9] G. R. Sell : Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics I, II, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 127(1967), pp. 241-262, 263-286.

[10] T. Ura : Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, vol. 70(1953), pp. 287-360.

[11] ______ : Sur le courant extérieure à une région invariante; prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkc. Ekvac., vol. 2(1959), pp. 143-200.

[12] ______ : On the Flow outside a Closed Invariant Set; Stability, Relative Stability and Saddle Sets, Contr. Diff. Eq., vol. 3(1964), pp. 249-294.

[13] ______ , I. Kimura : Sur le courant extérieur à une région invariante; Théorème de Bendixson, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, vol. 8(1960), pp. 23-39.