数理解析研究所講究録
第 64 巻 1969 年 65-95

変分法と閉測地線について

四方 義啓

まえがき.　まず最初に、本稿がきわめて中途半端な、中間報告的なものになりましたことを御詫び申上げます。実は、茂木先生の構想によりますと、本稿ではかなり一般の多様体に関して、その閉測地線の数が、"モデル空間"のホモロジーによって下から きれいにおさえられてしまうはずでした。

しかしながら、そういう一般論を取扱うためには われわれの理論自身が まだまだ 手直しを必要とすることと、さらにそのための準備がかなりの量にのぼりそうなこと、などが、あきらかとなってきましたため 一応この程度で、今回はお茶を濁させて頂くことにしました。馬脚があらわれるのは特に§3で、応用例 1, 2 に於いては、計算を全く省略してしまいました。実は その中に少々、気持が悪い点がなくもないのです。そのようなわけで、応用例としては 古典的な場合と Alber の場合（球面の場合）だけしか取扱えませんでした。従って、ここでいう 測地線のかぞえ方は いわゆる "算術的" なそれであって、幾何学的なものではないわけです。もっとも、球面の場合の幾何学的な かぞえ方くらいであれば、無理をすれば、われわれの理論の範囲で取扱えるようなのですが、何分準備の時間もかぎられており

ましたし　ますます　気持の悪い点がふえるようでしたので　これまた割愛させて頂きました。いづれまた機会があればまとめさせて頂きたいと考えています。　最後にいろいろ　御心配頂きました佐々木先生，このような機会を与えて下さいました　茂木先生を始めとする水戸セミナーの皆様方，
そして文献その他いろいろ御世話になりました塚本先生に心より　御礼と　そして　本稿がこのようなものになりましたことへの御詫びを申上げます。（茂木先生によって提唱された"モデルの理論"なる言葉は本稿がそれをつかうには余りにもみすぼらしいようでしたので，別のもう少しましな機会までとっておくことにいたしました。）

§1. (I)型の変分問題

以下この節において，特に断わらないかぎり，X は距離空間，φ はその上の非負値連続函数とする。

定義．f を X からそれ自身の中への連続写像として，X, φ 及び f が次の条件 A)〜D) をみたすとき三対 $(X, \varphi\cdot f)$ を（体 k 上の）（I)型の変分問題とよぶ；

A) $\varphi(f(x)) \leqq \varphi(x)$ for any $x \in X$

B) $\varphi(f(x)) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(f\cdot f(x)) = \varphi(x)$

C) X のコンパクト集合 A に対して

$$F(A) = \cup f^n(A)$$

はまたコンパクトになる

D) f から導びかれた $H_*(X; k)$ の準同型 f_* は恒等的である．

(I)型の変分問題 $(X, \varphi\cdot f)$ 及び，X の部分集合 A に対して次のような記号を導入する；

$$\varphi(A) = \sup \varphi(a), \quad |A| = \inf_n \varphi(f^n(A))^*$$

$$\sigma_f = \{x \in X / \varphi(f(x)) = \varphi(x)\}, \quad \sigma_f(A) = \{x \in \sigma_f / \varphi(x) = |A|\}.$$

σ_f の点を（f に対する φ の）停留点ということにする。我々のこの節における目的は，条件 A)〜D) の下に停留点の個数の一つの下限が $H_*(X, k)$ における subordination

* $f^n(x) = \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n回}(x)$ である

の計算によって与えられるという事実（定理３）の証明である。

定理 1. $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とする。A を X のコンパクト部分集合とするとき $F(A) \cap \gamma_f(A)$ は空ではない。従って，特に $\gamma_f(A)$ は空でない。

証明 A はコンパクトだから $f^n(A)$ もコンパクト 従って，$a_n \in A$ がとれて，

$$\varphi(f^n(a_n)) = \varphi(f^n(A))$$

又 $F(A)$ はコンパクトであるから，点列 $\{f^n(a_{n+1})\}$ の収束部分列 $\{f^m(a_{m+1})\}$ がとれて，$\alpha = \lim f^m(a_{m+1})$ とおくとき もとより $\alpha \in F(A)$ であって

$$|A| \leqq \varphi(f^{m+1}(A)) = \varphi(f \cdot f^m(a_{m+1})) \leq \varphi(f^m(a_{m+1})) \leqq \varphi(f^m(A))$$

ゆえ，$\varphi^m(A) \longrightarrow |A|$ に注意すれば，

$$|A| = \varphi(f(\alpha)) = \lim \varphi(f^{m+1}(a_{m+1})) = \lim \varphi(f^m(a_{m+1})) = \varphi(\alpha).$$

従って，$\alpha \in \gamma_f(A)$，よって $\gamma_f(A)$ は空でない。

補題 1. $(X, \varphi; f)$ を (I) 型の変分問題とするとき X のコンパクト集合 A に対して

$$F(A) \cap \gamma_f \subset I(|A|).$$

証明 $x \in \bigcup_n f^n(A) = F(A)$ とし $f^m(a_m)$, $a_m \in A$ を x に収束する点列とする。もし，m がいくらでも大きくなれば，$\varphi(f^m(A))$ が $|A|$ に収束することから，

$$\varphi(x)=\lim \varphi(f^{m}(a_m))\leqq \lim \varphi(f^{m}(A))=|A|$$

よって，$x\in I(|A|)$．また，$\{m\}$ が有界なら $f^{n}(A)$ が閉じていることから，てきとうな整数 q に対して $x\in f^{q}(A)$，従って，更に $x\in \gamma_f$ なら

$$\varphi(x)=\varphi(f^{i}(x))\leqq \varphi(f^{i+q}(A)),\quad i=1,2,3\cdots$$

よってこの場合にも，$\varphi(x)\leqq |A|$．

補題 2　$(X,\varphi;f)$ を(I)型の変分問題とする．コンパクト集合 A と，$\gamma_f(A)$ の開近傍 U とに対して 整数 n_0 がとれて，$n\geqq n_0$ なる任意の n に対して

$$f^{n}(A)\subset U\cup J(|A|),$$

となる，ここに $J(a)\{x\in X/\varphi(x)<a\}$ である．

証明　$x\in \gamma_f(A)$ ならば，$\varphi(f(f(x)))=\varphi(f(x))=|A|$ だから，$f(\gamma_f(A))\subset \gamma_f(A)\subset U$．一方，$X$ 上の連続函数 $\mu(x)=\varphi(x)-\varphi(f(x))$ の零点は γ_f であり，補題 1 によれば，$F(A)\cap \gamma_f\cap J(|A|)^{c}\subset \gamma_f(|A|)$ だから，函数 $\mu(x)$ は集合 $F(A)\cap \gamma_f(|A|)^{c}\cap J(|A|)^{c}$ 上では零にならない．従って，それに含まれるコンパクト集合 $F(A)\cap V^{c}\cap J(|A|)^{c}$ の上で，最小値 $\delta>0$ をとる．そこで整数 n_0 を $n-1\geqq n_0$ ならば

$$\varphi(f^{n}(A))\leqq |A|+\delta/2$$

が成立するようにとれば，

$$f(f^n(A)) \subset U \cup J(|A|) \qquad (n-1 \geq n_0)$$

なることが次のようにして示される:

i) $x \in f^n(A) \cap (F(A) \cap V^c \cap J(|A|)^c)$ のとき

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) - \mu(x) \leq \varphi(x) - \delta \leq |A| - \delta/2 < |A|.$$

ii) $x \in f^n(A) \cap (F(A) \cap V^c \cap J(|A|)^c)^c$ のとき

この場合は更に次の二つの場合が考えられる;

ii)-1) $x \in J(|A|)$ のとき, この場合, $f(x) \in J(|A|)$ は あきらか,

ii)-2) $x \in V$ のとき, この場合はVの作り方から $f(x) \in f(V) \subset U$ である.

さて, Xの(kを係数とする)特異チェインσに対して その carrier, $Car\,\sigma$ を対応させ, $|\sigma|$, $\gamma f(\sigma)$ を夫々

$$|\sigma| = |Car\,\sigma|, \qquad \gamma f(\sigma) = \gamma f(Car\,\sigma)$$

によって定義する

補題 3 $(X, \varphi; f)$ を(I)型の変分問題とする. このとき Xの(k係数)サイクルσと, $\gamma f(\sigma)$の開近傍Uとに対して, $U \cup J(|\sigma|)$ のサイクル$\tilde{\sigma}$が存在して, 包含写像 $i: U \cup J(|\sigma|) \to X$ に対し, $i_*[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$ である, ここで $[\sigma]$ は σの表わす(k係数の)ホモロジー類とする

証明 $Car\,\sigma$ はコンパクトだから, 補題2によって十分大き

いれに対しては

$$\mathrm{Car}\, f^n{}_{\#}(\sigma) < f^n(\mathrm{Car}(\sigma)) \subset \bar{U}^{U} J(|\sigma|)$$

が成立する。よってサイクル $\tilde{\sigma} = f^n{}_{\#}(\sigma)$ は $\bar{U}^{U} J(|\sigma|)$ のサイクルとみなせて、条件 D) から $i_*[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$ は明らか。

定義　ホモロジー类 $\beta \in H_*(X; k)$ がホモロジー类 $\alpha \in H_*(X; k)$ に subordinate する、記号 $\beta \propto \alpha$、とはコホモロジー类 $\xi \in H^*(X; k)$ がとれて、

$$\beta = \alpha \frown \xi, \quad \dim \xi > 0$$

となるときをいう。又、サイクル τ がサイクル σ に subordinate するとはホモロジー类 $[\tau]$ がホモロジー类 $[\sigma]$ に subordinate するときをいう。

補題 4　$(X, \phi; f)$ を (I) 型の変分問題とする X の l 次元サイクル σ に対して $\gamma_f(\sigma)$ の開近傍 U で、$H^m(U; k) = 0$ なるものが存在すれば、σ に subordinate する任意の $(l-m)$ 次元サイクル τ は、$J(|\sigma|)$ のサイクル $\tilde{\tau}$ によって $i_*([\tilde{\tau}]) = [\tau]$ とかける。

証明　$[\tau] = [\sigma] \frown \xi$, $\xi \in H^m(X, k)$ とする。i, j を固有な三系 (X, ϕ, ϕ), $(X, U, J(|\sigma|))$ の間の包含写像として、次の図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
H_\ell(U\cup J(|\sigma|);k) \arrow[d, "i_*"'] & {[\tilde{\gamma}]} \arrow[d, dotted] & & H^m(U;k)=0 & & H_{\ell-m}(J(|\sigma|);k) \arrow[d, "i^*"'] \\
H_\ell(X;k) \arrow[d, "j_*"'] & {[\sigma]} & \otimes & H^m(X;k) \arrow[u, "i^*"'] & \xi \arrow[d, dotted] \arrow[r, "\cap"'] & H_{\ell-m}(X;k) \arrow[d, "j_*"'] \quad [\tau] \\
H_\ell(X,U\cup J(|\sigma|);k) & & \otimes & H^m(X,U;k) \arrow[u, "j^*"'] & \tilde{\xi} \arrow[r, "\cap"'] & H_{\ell-m}(X,J(|\sigma|);k)
\end{tikzcd}
$$

横列はキャップ積による写像である。もとより縦列は完全列だから $i^*\xi=0$ より $\tilde{\xi}\in H(X,U)$ がとれて、$\xi=j^*\tilde{\xi}$.

一方、補題3によって $\tilde{\gamma}\in H(U\cup J(|\sigma|))$ がとれて、$i_*([\tilde{\gamma}])=[\sigma]$ だから $j_*([\sigma])=0$. そこで $j_*([\tau])$ を考えるとキャップ積の自然性から、

$$j_*([\tau])=j_*([\sigma]\cap\xi)=j_*([\sigma]\cap j^*\tilde{\xi})=(j_*[\sigma])\cap\tilde{\xi}=0.$$

よって $[\tau]=i_*[\tilde{\tau}]$, $\tilde{\tau}\in H(J(|\sigma|))$ である。

さて、ホモロジー類 $\alpha\in H_*(X;k)$ に対して $|\alpha|$, $\mathcal{J}f(\alpha)$ をそれぞれ

$$|\alpha|=\inf\{|\sigma|/\sigma;\ X\text{ のサイクルで、}[\sigma]=\alpha\text{ なるもの}\}$$

$$\mathcal{J}f(\alpha)=\{x\in\mathcal{J}f\ /\ \varphi(x)=|\alpha|\}$$

によって定める。

補題 5　$(X,\varphi;f)$ を(I)型の変分問題とするとき $\alpha\in H_*(X;k)$ と実数 a に対して

$$|\alpha| < a \iff \alpha \in \mathrm{Im}(i_* : H_*(J(a);k) \to H_*(X;k))$$

証明　($\Leftarrow$) は明らかだから ($\Rightarrow$) のみを示せばよい．$\varepsilon > 0$ を $|\alpha| + 2\varepsilon < a$ となるようにとっておいて $|\alpha| \leqq |\sigma| < |\alpha| + \varepsilon$ をみたすサイクル σ をとる．開集合 $U = \{x \in X / |\sigma| - \varepsilon < \varphi(x) < |\sigma| + \varepsilon\}$ は $\delta f(\sigma)$ を含むからこれに対して補題3を適用すると $U \cup J(|\sigma|) \subset J(|\sigma| + \varepsilon) \subset J(a)$ のサイクル $\tilde{\sigma}$ がとれて，$i_*[\tilde{\sigma}] = \alpha$ である。

補題 6　$(X, \varphi ; f)$ を (I) 型の変分問題とする ホモロジー類 $\alpha, \beta \in H_*(X;k)$ に対して

$$\beta \propto \alpha \Rightarrow |\beta| \leqq |\alpha|.$$

証明　$\beta = \alpha \cap \xi$,　$\xi \in H^*(X;k)$ とかいておく。キャップ積はサイクル，コサイクルに対しても定義されていることに注意すれば α のサイクル σ と ξ のコサイクル Ξ に対して

$$\beta = [\sigma \cap \Xi], \quad \mathrm{Car}(\sigma \cap \Xi) \subset \mathrm{Car}\,\sigma$$

であるから，$|\beta| \leqq |\sigma \cap \Xi| \leqq |\sigma|$，　また σ は任意の α のサイクルであったから $|\beta| \leqq |\alpha|$.

補題 7　$(X, \varphi ; f)$ を (I) 型の変分問題とする また，$\tilde{R}$ を実数の集合に，$[a, b)\,(a<b)$ なる形の集合族を開集合の基とする位相を与えた空間とする。このとき $\alpha \in H_*(X;k)$ の高さ $|\alpha|$ が，$\tilde{R}$ の部分空間 $\{\varphi(x) / x \in \delta f\}^{\sim}$

において孤立点であるならば．X のサイクル σ がとれて

$$\alpha = [\sigma], \quad |\alpha| = |\sigma| .$$

証明　正数 $\varepsilon > 0$ に対して サイクル σ_ε をとって，$\alpha = [\sigma_\varepsilon]$，$|\alpha| \leq |\sigma_\varepsilon| < |\alpha| + \varepsilon$ ならしめておくとき，$\gamma_f(\sigma_\varepsilon)$ は定理1から空ではなく，従って ε が動けば $\{|\sigma_\varepsilon|\}$ は $\{\varphi(x)/x \in \gamma_f\}$ は無限点列をなし，$\hat{R}$ の位相の意味で $|\alpha|$ に収束する．従って $\varepsilon_0 > 0$ がとれて $\alpha = [\sigma_{\varepsilon_0}]$，$|\alpha| = |\sigma_{\varepsilon_0}|$ である．

定理 2　(X, φ, f) を(I)型の変分問題とする ホモロジー類 $\alpha, \beta \in H_*(X; k)$ に対して，

$$\begin{cases} \beta \prec \alpha , \quad |\beta| = |\alpha| \\ |\alpha| (= |\beta|) \text{ は } \widetilde{\{\varphi(x)/x \in \gamma_f\}} \text{ において孤立点} \end{cases}$$

が成立すれば，

$$\dim \gamma_f(\alpha) \geqq \dim \alpha - \dim \beta$$

証明　まず，補題7 によって X の サイクル σ で $\alpha = [\sigma]$，$|\alpha| = |\sigma|$ なるものがとれる．このとき $\gamma_f(\alpha) = \gamma_f(\sigma)$ の任意の開近傍 U に対して，その $(\dim\alpha - \dim\beta)$ 次元のコホモロジー $H^*(U; k)$ は零ではない，ここで，$m = \dim\alpha - \dim\beta$ である．実際，もし $H^m(U, k) = 0$ をみたす開近傍 U が存在すれば，補題4 から $\beta \in \mathrm{Im}(i_* : H_*(J(|\sigma|) \to H_*(X))$ 従って 補題5 によっ

て $|\beta|<|\sigma|=|\alpha|$ となってしまうからである。よって $\dim \delta f(\alpha)=\dim \delta f(\sigma) \geqq \dim \alpha - \dim \beta$ を得る。

定理 3. (X, φ, f) を(I)型の変分問題とする。もし X のホモロジー类 $\alpha_i \in H_*(X; k)$, $i=1 \cdots q$ がとれて

$$\begin{cases} \alpha_i \propto \alpha_{i+1}, & i=1, \cdots q-1, \\ \alpha_1 \notin \mathrm{Im}(i_*; H_*(J(a)) \to H_*(X)) \end{cases}$$

をみたせば、X は少くとも q 個の(φ の)停留点を持つ。より精密には $|\alpha_q|$ よりも大きい任意の実数 a' に対して

$$q \leqq {}^{\#}\{\delta f \cap (J(a))^c \cap J(a')\}$$

である。

証明　まず 補題5, 6 によって

$$a \leqq |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_q| < a'$$

が得られることに注意する。もしある番号 i に対して $|\alpha_i|$ が、$\tilde{R}$ における $\{\varphi(x) / x \in \delta f\}$ の集積点であったとすると $J(a)^c \cap J(a')$ が無限個の停留点を含む事はあきらか。従って以下 すべての i について $|\alpha_i|$ が $\tilde{R}$ における $\{\varphi(x) / x \in \delta f\}$ の孤立点であるとして定理を証明すればよい。さて、ある i に対して $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}|$ であったとすると定理2から $\dim \delta f(\alpha_i) \geqq 1$, よってこの場合も $J(a)^c \cap J(a')$ は無限個の停留点を含む。そこで残るのは、

$$a \leqq |\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_q| < a'$$

の場合だけとなるが 各 α_i に対して補題7 にいうサイクルをとってみればすぐわかるように $\mathcal{S}_f(\alpha_i) = \mathcal{S}_f(C_{a_i b_i})$ $(i=1 \cdots q)$ は空でない互いに素な $\mathcal{S}_f \cap (J(a))^c \cap J(a')$ の部分集合をなすから。この場合には $(J(a))^c \cap J(a')$ は少なくとも q 個の停留点をもつことがわかる。

2 変形から導びかれる変分問題

距離空間X上に 変形 D_t ($0 \leqq t \leqq 1$), すなわち, $D_0(x) = x$ ($x \in X$) となるような $X \times [0, 1]$ から X への写像が与えられたとき, X の写像 $D = D_1$ は任意の係数体に対して X のホモロジー群の同型をひきおこす. さらに, もしX自身がコンパクトであれば, 変形 D_t から之られた写像Dと X上の連続函数 φ とについて §1 の条件 A), B) がみたされるだけで, X上の (I)型の変分問題がえられるわけである. また, 実際の問題としては, このような場合を取扱う場合もかなりあると考えられるので, (II)型の変分問題を次のように定めておく:

定義　距離空間Xとその上の非負値連続函数 φ とに対して X の変形 D_t ($0 \leqq t \leqq 1$) がとれて 次の条件 A'), B') をみたすとき 三対 (X, φ, D_t) を (II)型の変分問題とよぶ. さらに X 自身がコンパクトであるとき この変分問題はコンパクト型であるという:

A') $\varphi(h_t(x)) \leqq \varphi(x)$ $\quad (\forall x \in X, \forall t \in [0, 1])$

B') $\varphi(h_t(x)) = \varphi(x) \Rightarrow 0 \leq s \leq t$ に対して $h_s(x) = x$.

また，(II)型の変分問題 $(X,\varphi;D_t)$ に対して

$$C_D=\{x\in X / D(x)=x\}.$$

とおいて C_D の点を停留点とよぶ．

定理 1　(II)型のコンパクトな変分問題 $(X,\varphi;D_t)$ は任意の体 k の上の (I)型の変分問題を定め $C_D=\gamma_D$ がなりたつ．

系 1　コンパクト型とはかぎらない (II)型の変分問題 $(X,\varphi;D_t)$ に対して，コンパクト集合 $Y\subset X$ がとれて次の条件 1), 2) をみたすとき 三対 $(Y,\varphi|_Y,D|_Y)$ は体 k 上の (I)型の変分問題になり，$\gamma_{D|_Y}=C_D\cap Y$ である：

1)　$D(Y)\subset Y$,　　($D=D_1$ である)

2)　$i: Y\to X$ を包含写像とするとき

$i_*: H_*(Y;k)\to H_*(X;k)$; injective.

証明　三対 $(Y,\varphi|_Y,D|_Y)$ が条件 A), B), C) をみたすのは明らかだから，条件 D) がみたされることだけを示せばよい．まず，次の図式は可換であるのは明らか．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "D|_Y"] & X \arrow[d, "D"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_*(Y) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(D|_Y)_*"] & H_*(X) \arrow[d, "D_*"] \\ H_*(Y) \arrow[r, "i_*"] & H_*(X) \end{tikzcd}$$

従って $D\cdot i$ と i とがホモトピー的であることに注意すれば

$$i_* \circ (D|_Y)_* = D_* \circ i_* = i_*$$

よって

$$i_*((D|_Y)_* - id) = 0$$

そこで、仮定2) から $(D|_Y)_* = id$ を得る.

定義 $\xi = (E, p, B)$ を(必らずしもファイバー空間をなすとはかぎらない)距離空間 E, B と E から B への写像 p の三対とする E よりの非負値連続函数 φ と E の変形 h_t 及び ξ とで作る三対 $(\xi, \varphi; h_t)$ が ξ の上の変分問題であるとはそれらが次の条件 A″) B″) F) をみたすときをいう.

A″) $\varphi(h_t(x)) \leq \varphi(x) \quad {}^\forall t \in [0,1] \quad {}^\forall x \in E$

B″) $\varphi(h_t(x)) = \varphi(x) \Rightarrow 0 \leqq s \leqq t$ に対して $p \circ h_s(x) = p(x)$.

F)-1 φ は B 上のてきとうな非負値連続函数 ψ によって $\varphi = \psi \circ p$ と表わされる

F)-2 $\varphi(h_1(x)) = \varphi(x)$ ならば, $y \in p^{-1}(p(x))$ に対して $p(h_1(y)) = p(y)$ である

さらに E がコンパクトであるとき この変分問題は コンパクト型であるという また

$$I_h = \{x \in E \,/\, p(h(x)) = p(x)\}$$

とおいて，I_hの点をこの種の問題の停留点とよぶ

補題 1　$(\mathfrak{F}, \varphi; h_t)$ を三対 $\mathfrak{F}=(E, p, B)$ 上のコンパクトな変分問題とするとき　三対 $(E, \varphi; h)$ ($h=h_1$ である) は (I)型の変分問題になり，その (I)型問題としての停留点の集合 $\mathcal{J}_h$ は I_h ~~はI_h~~ に等しい

証明　三対 $(E, \varphi; h)$ が条件 A) C) D) をみたすことは明らか 次，$x \in E$ に対して $\varphi(h(x)) = \varphi(x)$ であったとすると，F)-2 から，$x \in p^{-1}(p(x))$ に対して $p(h(x)) = p(x)$，従って $\mathcal{J}_h \subset I_h$ であり，また $h(x) \in p^{-1}(p(x))$，そこでもう一度 F)-2 によって $p(h(h(x))) = p(h(x)) = p(x)$．ゆえに，F)-1 から $\varphi(h \circ h(x)) = \psi p(h \circ h(x)) = \psi p(x) = \varphi(x)$ 従って条件 B) もみたされる．もとより $p(h(x)) = p(x)$ なら F)-1 によって $\varphi(h(x)) = \psi p(h(x)) = \psi p(x) = \varphi(x)$ だから $\mathcal{J}_h \supset I_h$ もあきらかである．

補題 2　$(\mathfrak{F}, \varphi; h_t)$ を 三対 $\mathfrak{F} = (E, p, B)$ の上の変分問題とする．Bの開集合UからEへの写像 s で，$p \circ s = id$ なるものが与えられるとき．(このような写像を以下$\mathfrak{F}$の切断ということにする) U に含まれる任意の閉集合Fに対し

てBの変形$\widehat{h}_t$が定義できて，三対$(B, \psi ; \widehat{h}_t)$は(II)型の変分問題になり，その停留点に関して

$$C_{\widehat{h}} \cap F \subset pI_{\widehat{h}} \subset C_{\widehat{h}}$$

がなりたつ

証明　Bの上の連続函数$\rho(b)$を次をみたすようにとる：

$$\begin{cases} 0 \leq \rho(b) \leq 1 & b \in B \\ \rho > 0 \text{ on } U, & \rho = 0 \text{ on } U^c \\ \rho = 1 \text{ on } F, & \end{cases}$$

これと切断sとによってBの変形$\widehat{h}_t$を次のように定める：

$$\widehat{h}_t(b) = \begin{cases} p \circ h_{\rho(b)t} \cdot s(b) & b \in U \\ b & b \notin U \end{cases}$$

このとき，まず，A″)，F)-1より$b \in U$のときは

$$\psi(\widehat{h}_t(b)) = \varphi(h_{\rho(b)t} \circ s(b)) \leqq \varphi(s(b)) = \psi p s(b) = \psi(b)$$

であるから$(B, \psi ; \widehat{h}_t)$がA′)をみたすことは明らか，またB′)についても次のようにして容易である．

$$\psi(\widehat{h}_t(b)) = \varphi(h_{\rho(b)t} \cdot s(b)) = \varphi(s(b)) = \psi(b) \quad (b \in U)$$

ならばB″)から$0 \leq u \leq t$に対して

$$p(h_{\rho(b)u}(s(b))) = p(s(b)) = b$$

であるから　$\widehat{h}_u(b) = b$　を得る

また，停留点に関しては．$b \in C_{\tilde{h}} \cap F$ ならば

$$p(h_{p(b)}(s(b))) = p(s(b))$$ であって

F上で $\varphi = 1$ となることから $s(b) \in I_h$，一方，
$b = px$，$x \in I_h$ とかけているなら，$b \in U$ の時は，$s(b) \in p^{-1}p(x)$ ゆえ F)-2 から，$p(h \circ s(b)) = p(s(b))$，さらに F)-1，B′より

$$\varphi(h \circ s(b)) = \varphi(s(b)),\ p(h_u \circ s(b)) = p(s(b))\ (0 \leq u \leq 1)$$

である，従って

$$\varphi(\tilde{h}(b)) = \varphi(h_{p(b)} \circ s(b)) = \varphi(s(b)) = \varphi(b)$$

これから $b \in \gamma_{\tilde{h}} = C_h$ を得て

$$C_{\tilde{h}} \cap F \subset p(I_h) \subset C_h$$

であることがわかる。

定理 2 $(\xi, \varphi; h_t)$ を三対 $\xi = (E, p, B)$ 上の変分問題とする $\{U_i / i = 1 \cdots N\}$ をBの開集合の族とし，各 U_i 上で ξ の切断 s_i が与えられているものとする。このとき，開集合 $\cup U_i$ に含まれる閉集合Fに対して，Bの変形 H_t がとれて，(B, φ, H_t) は(II)型の変分問題になりその停留点については

$$C_H \cap F \subset p(I_h) \subset C_H$$ が成立する．

証明　各 U_i の中に閉集合 F_i をとって $\cup F_i = F$ なら

しめ，U_i，F_i 及び切断 s_i に対して，補題２ にいう B の変形 $\tilde{h}_t^i$ を構成してゆく．さらに B の変形 H_t を

$$H_t(b) = \tilde{h}_t^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_t^1(b)$$

によって定めるとき 三対 $(B, \psi : H_t)$ が条件 A′), B′) をみたすことが次のようにしてわかる： まず $\tilde{h}_t^i$ が A′) をみたすから

$$\psi(H_t(b)) = \psi(\tilde{h}_t^N(\tilde{h}_t^{N-1} \circ \cdots \circ \tilde{h}_t^1(b))) \leqq \psi(\tilde{h}_t^{N-1} \circ \cdots \circ \tilde{h}_t^1(b))$$
$$\leqq \cdots\cdots \leqq \psi(\tilde{h}_t^1(b)) \leqq \psi(b)$$

ゆえ，A′) は明らか；従って，$\psi(H_t(b)) = \psi(b)$ なる $b \in B$ に対しては

$$\psi(b) = \psi(\tilde{h}_t^1(b)) = \psi(\tilde{h}_t^2 \circ \tilde{h}_t^1(b)) \cdots = \psi(\tilde{h}_t^N \circ \cdots \tilde{h}_t^1(b))$$

であるから，$\tilde{h}_t^i$ が B′) をみたすことから $0 \leqq u \leqq t$ に対して：

$$b = \tilde{h}_u^1(b), \quad b = \tilde{h}_t^1(b) = \tilde{h}_u^2(\tilde{h}_t^1(b)) = \tilde{h}_u^2(b), \cdots$$

を得て，従って

$$H_u(b) = \tilde{h}_u^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_u^1(b) = \tilde{h}_u^N \circ \cdots \circ \tilde{h}_u^2(b) = \cdots = b.$$

また，この計算で $t = u = 1$ としてみれば すぐわかるように

$$C_H = \gamma_H = \bigcap_{i=1}^{N} C_{\tilde{h}_i}$$

である．従って $F = \cup F_i$ であることに注意すれば $b \in C_H \cap F$ に対しては 補題２ から

$$b \in C_H \cap F_i \subset C_h^{\sim i} \cap F_i \subset p(I_h)$$

ゆえ. $C_H \cap F \subset p(I_h)$, さらに

$p(I_h) \subset C_h^{\sim i}$, $i = 1 \cdots N$

ゆえ, 結局

$$C_H \cap F \subset p(I_h) \subset \cap C_h^{\sim i} = C_H.$$

を得る.

系2 上の定理と同じ仮定のF, さらに次の条件 1), 2) がみたされるものとする.

1) 各 U_i の閉包はコンパクト

2) $F_H(F) = \overline{\bigcup_n H^n(F)}$ から B への包含写像 i に対して

$i_*: H_*(F_H(F): k) \to H_*(B: k)$: injective.

このとき $F_H(F)$ と ψ, H の $F_H(F)$ への制限 ψ', H' とのなす三対 $(F_H(F), \psi', H')$ は (I)型 の変分問題になりその停留点については

$$\gamma_{H'} = C_H \cap F_H(F)$$

が成立する

証明 $(B, \psi: H_t)$ が (II)型の変分問題であり. また. 当然ながら

$$H(F_H(F)) = H(\overline{\cup_n H^n(F)}) \subset \overline{H(\cup_n H^n(F))} \subset \overline{\cup H^n(F)} = F_H(F)$$

であるから，$F_H(F)$ がコンパクトであることさえ示せば，定理１の系１によって結論が従う．さて，$\overline{\cup U_i} = W$ とおくとき仮定から W はコンパクトで，従って，$W \cup H(W)$ もコンパクト．一方，H は W の外では恒等的であるから

$$H(W \cup H(W)) = H(W) \cup H(H(W) - W) \subset W \cup H(W)$$

従って，$F \subset W \cup H(W)$ に対して

$$\cup H^n(F) \subset W \cup H(W)$$

が成立する．よって $\overline{\cup H^n(F)} = F_H(F)$ はコンパクトである．

§3　代数的な整理と応用

この節においても　特に断わらないかぎり　Xは距離空間，φはその上の非負値連続函数とする．

定義　Xの部分空間　$A \subset B$と，体kに対し$m(X, A, B; k)$をホモロジー类$\alpha_1, \dots \alpha_q \in H_*(X; k)$の列で，次の条件(i)〜(iii)をみたすものの最大の長さと定める：

(i)　$\alpha_i \prec \alpha_{i+1}$，　$i = 1 \cdots q-1$

(ii)　$\alpha_i \notin Ker\ (j_* : H_*(X; k) \to H_*(X, A : k))$，$i = 1 \cdots q$

(iii)　$\alpha_i \in Ker\ (j_* ; H_*(X : k) \to H_*(X, B : k))$，$i = 1 \cdots q$

特に　$A = \phi$，$B = X$のとき　$m(X, \phi, X : k)$を単に$m(X; k)$とかく．また，実数$a < b$に対して

$$A = J(a) = \{x \in X / \varphi(x) < a\} \quad B = J(b) = \{x \in X / \varphi(x) < b\}$$

にとって　$m(X, J(a), J(b) : k)$を単に$m(X, a, b; k)$とかく．　この記号によれば，§1，定理3は次のようにもいいなをせる

定理1　距離空間Xとその上の非負値連続函数φとに対して．X上の写像fが存在して，三対(X, φ, f)が体k上の(I)型の変分問題になれば　任意の実数　$a < b$　に対して

$$m(X, a, b; k) \leqq {}^{\#}\{\gamma_f \cap J(a)^c \cap J(b)\}$$

系 1 記号は上の定理のようとする 三対 $(X, \varphi, -)$ が例えば(Ⅲ)型のコンパクト変分問題のときのように、任意の素数 p について $\mathbb{Z}_p$ 上の(Ⅰ)型の変分問題となるとき、

$$m(X, a, b) = \underset{p:\text{prime}}{\text{sub}}\ m(X, a, b; \mathbb{Z}_p)$$

とおけば、

$$m(X, a, b) \leq {}^{\#}\{\gamma_f \cap J(a)^c \cap J(b)\}$$

補題 1 距離空間 X, X' とそれぞれの部分空間の対 $A \subset B \subset X$, $A' \subset B' \subset X'$ に対して X' から X への写像 g が存在して、$g(A') \subset g(A)$, $g(B') \subset g(B)$ であるとする。

更に、g が誘導する(コ)ホモロジーの準同型に対して

$$g^*;\ H^*(X'; k) \longleftarrow H^*(X; k);\ \textit{surjective}$$

$$g_*;\ H_*(X', A'; k) \longrightarrow H_*(X, A; k);\ \textit{injective}$$

であるならば

$$m(X', A', B'; k) \leq m(X, A, B\ k)$$

証明 $\alpha'_1 \cdots \alpha'_q \in H_*(X'; k)$ が (X', A', B') に対して条件(i)〜(iii)をみたすものとする これらの g_* による像 $g_*(\alpha'_1), \cdots g_*(\alpha'_q) \in H_*(X; k)$ がやはり (X, A, B) に対して 条件(i)〜(iii)をみたすことを示せば補題は明らか。まず、$\alpha'_i = \alpha'_{i+1} \cap \xi'_i$ $\xi'_i \in H^*(X'; k)$,

とかくとき $\xi_i' = g^*\xi_i$, $\xi_i \in H^*(X;k)$ とできるから,
キャップ積の自然性より $g_*(\alpha_i') = (g_*(\alpha_{i+1}'))\frown\xi_i$
ゆえ, $\{g_*(\alpha_i')\}$ が (i) をみたすことがでる. また条件 (ii), (iii) については次の図式が可換であることから明らかである.

$$
\begin{tikzcd}
H_*(X') \arrow[r] \arrow[ddd] & H_*(X',A') \arrow[r] \arrow[ddd, "\text{injective}"] & H_*(X',B') \arrow[ddd] \\
\alpha_i' \arrow[r] \arrow[ddd] & j_*(\alpha_i) \arrow[r] \arrow[ddd] & 0 \arrow[ddd] \\
& & \\
H_*(X) \arrow[r] & H_*(X,A) \arrow[r] & H_*(X,B) \\
g_*(\alpha_i') \arrow[r] & j_*(g_*(\alpha_i)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

系 2　補題 1 において, $A'=\phi$ とおけば
$$g_*: H_*(X';k)\longrightarrow H_*(X,A;k);\ \text{injective}$$
ならば　$g(X')\subset B$　なる任意の X の部分空間に対して
$$m(X';k)\leqq m(X,A;B;k)$$
である.

定理 2　$(X,\varphi;f)$ を (I)型の変分問題とする. もし距離空間 X' と, X' から X への写像 g とに対して実数 a, b がとれて, $g(X')\subset J(b)$ かつ
$$g_*: H_*(X';k)\longrightarrow H_*(X,J(a);k);\ \text{injective}$$

であれば

$$m(X';k) \leqq \#\{\mathcal{V}_f \cap J(a)^c \cap J(b)\}$$

である.

注　実はさらにコンパクト台のホモロジー論（それを $\mathcal{H}$ で表わす）をつかえば X がコンパクトのとき，定理2 は次のように精密化しておくこともできる.

" $g_*: H_*(X';k) \to \mathcal{H}(X, I(a):k)$: injective

ならば　$m(X':k) \leqq \#\{\mathcal{V}_f \cap I(a)^c\}$. "

そしてこのことが一般の多様体上の閉測地線論を組立てるときに効いてくるのであるが，いろいろな事情から本稿では触れることができなかった。実際に効いてくる点は，次の2点である：まず，$a=0$ にとれること．これによって1点に縮んでしまう閉測地線を考えないですむ．次に，X 全体では都合の悪いことも $X-I(a)$ ではうまくいくこともあって，

従って $\mathcal{H}(X;k)=H(X:k)$ は計算しにくいとしても $\mathcal{H}(X, I(a))=\mathcal{H}(X-I(a))$ の計算ならできるといったことが起りうるのである.

応用例 1　M をコンパクト・リーマン多様体，$P(M)$ を弧長に比例したパラメーター $t \in [0, 1]$ をもち，piecewise

に微分可能な M 上の閉じた道の全体とする。 L を P(M) の各点に対し その長さを対応させる函数とする。 これは P(M) に次のような距離 d によって位相を入れるとき、P(M) 上の連続な函数になる。

$$d(\alpha,\beta)=|L(\alpha)-L(\beta)|+\min_{0\leq t\leq 1} dist\,(\alpha(t),\beta(t))$$

ここで、 $dist\,(p,q)$ は M 上の点 p. q 間の距離である。 よく知られているように、有限な正数 a に対して $I(a)=\{x\in P(M)/L(x)\leq a\}$ 上の変形 h_t がとれて、次をみたす。

1) $s\geq t$ なら $L(h_s(\alpha))\geq L(h_t(\alpha))$

2) $L(h_t(\alpha))=L(\alpha)$ から $h_t(\alpha)=\alpha$

3) α : geodesic $\Longleftrightarrow$ $h_1(\alpha)=\alpha$

このような h_t は道 α 上の十分多くの点 $p_1(\alpha)\cdots p_N(\alpha)$ を最短測地線で順次結んで得られるのであるから、P(M) の点 α で、N 個の M の点 $p_1(\alpha)\cdots p_N(\alpha)$ ($p_{N+1}(\alpha)=p_1(\alpha)$ とかく)

$$2\,dist\,(p_i(\alpha),p_{i+1}(\alpha))\leq \text{elementary length of } M$$

にとれて、かつ、

$$\alpha=\bigcup_{i=1}^{N}\overline{p_i(\alpha)\,p_{i+1}(\alpha)}$$

とかけるようなものの全体を $P^N(M)$ とかくとき h_1 は更に次をもみたす

4) aによってきまる整数Nがあって

$$\alpha \in I(a) \Longrightarrow h_1(\alpha) \in P^N(M)_\cap I(a)$$

以上より 三対 $(I(a), L; h_t)$ が(II)型の変分問題になることはみやすい. 実際, 上の条件 1), 2) がそれぞれ 条件 A′), B′) に対応しているのである. またさらに, $P^N(M)_\cap I(a)$ はコンパクトであり, 明らかに包含写像 $i: P^N(M)_\cap I(a) \to I(a)$ はホモロジー群の間の同型対応をひきおこすから $h = h_1$ を $P^N(M)_\cap I(a)$ に制限したものを同じ記号hで表わすとき 4)より 三対 $(P^N(M)_\cap I(a), L; h)$ は §2, 系1の条件をみたし, 従って (I)型 の変分問題を与える. よって 定理1, 2 がつかえることになり, εを十分小さくとると $J(\varepsilon)$の点は いっせいに 1点のみより成る道に縮んでしまうから $J(\varepsilon)$は全体として Mに可縮であることに注意すれば 長さがε以上でa以下であるような閉測地線の数の下限が まったく代数的に計算できる $m(P(M), \varepsilon, a; k)$ によって与えられることがわかる。

応用例 2 $(I(a), L, h_t)$ をコンパクト・リーマン多様体M上に構成された 前例の三対とする. $G \subset I(a)$ を(piecewise とはいわないで) 微分可能な道ばかりよりなる $I(a)$ のコンパクト集合とするとき $G = G_0$ から帰納的に

定義される集合 $G_{i+1}=\{h_t(x_i)/0\leq t\leq 1, x_i\in G_i\}$, の和集合 $E=\cup G_i$ はまたコンパクトであることが証明される(と思う. すくなくとも $M=S^n$, $F=C_n$ のときはたしかである). 従って, L, h_t を E に制限したものを同じ記号 L, h_t で表わして (II)型のコンパクトな変分問題 $(E, L; h_t)$ を得る. E の元のパラメーター空間 S^1 への S^1 自身の作用を E への S^1 の作用と考えて商空間 $E/S^1=B$ が作られる. E から B への自然な射影を p とするとき 三対 $(\xi, L; h_t)$ が 三対 $\xi=(E, p, B)$ 上の変分問題になることはみやすい. 一方, $\tilde{I}(a), \ldots$ を B 上に自然に定義されている長サ $\tilde{L}$ によって定まる集合 $\{b\in B/\tilde{L}(b)\leq a\}, \ldots$ とするとき $\tilde{I}(a')$ $(a'>0)$ では S^1 の作用は次をみたす:

"$s, t\in S'$, $b\in\tilde{I}(a')^c$ $(a'>0)$ に対して

$s(b)=t(b)$ ならば $s=t$"

従って(例えば Montgomery-Zippin Transf. Groups p.220 参照) ξ は $\tilde{I}(a')^c$ 上で局所的な切断を有する. よって任意の $a>0$ に対して コンパクト空間 B の閉集合 $\tilde{I}(a)^c=F$ を有限個の開集合でおおって その各開集合の上で切断が与えられているようにすることができる. そこで, §2, 定理2が適用できて コンパクト空間 B の上に

(II)型の変分問題 $(B, \widetilde{L}; H_t)$ で

$$C_H \cap \widetilde{J}(a)^c \subset p(\widetilde{I}_k) \subset p\{\text{geodesics in } P(M)\}$$

をみたすようなものが作れる。そして定理1によって

$$m(B, a, b; k) \leqq \#\{C_H \cap \widetilde{J}(a)^c \cap \widetilde{J}(b)\}$$

であるから 閉測地線の下限の計算の問題は $m(B, a, b; k)$ の計算に還元されてしまうわけである。さらに、もし、たとえば、包含写像 $i: G \to E = {}^{\cup} G_i$ がひきおこす写像 $\widetilde{i}: p(G) \to B = p(E)$ に対して

$$\widetilde{i}_*: H_*(p(G); k) \to H_*(B, \widetilde{J}(a); k)$$

が単射的であれば 定理2によって M上の閉測地線で長さが a以上のものの数の下限の一つが $H_*(p(G); k)$ における subordination を調べることによって与えられることがわかる。

そこで、当然、では、どのようなGを最初にとれば $\widehat{i}_*$ が単射的となり、かつ、$H_*(p(G); k)$ において subordinate するホモロジー元がもっとも多くなるかということが問題になるはずである。これらに関する一般論にはふつうのホモロジーよりコンパクト台のホモロジーの方が都合がよいことは $\mathcal{H}_*(B, \widetilde{J}(a)^c)$ が $B - \widetilde{J}(a)^c$ に対かよらないことと、$B - \widetilde{J}(a)^c$ の上では ξ は S^1 をファイバーとするファイバーバンドルになっていて $\mathcal{H}_*(B, \widetilde{J}(a)^c)$ の計算が比較的容易であることからもうなづけよう。実際、上の構成をMをS^1

に同相な多様体，G を S^n 上の大円の集合 G_n の $P(M)$ における同相像に対して行なったときには，この方法（実は Gysin の完全列と呼ばれるもの）によって

$$\hat{i}_* : \quad H_*(p(G); Z_p) \to \mathcal{H}_*(B, \hat{I}(0)^c; Z_p)$$

が単射的であることがわかる．そして $p(G)$ が $(n+1)$-空間内の２次元線形空間全体のなす多様体 C_n に同相なことから $H_*(p(G); Z_2)$ における subordination の計算ができるのである．もっとも，ふつうのホモロジー論をとったとしても i_* が単射的であることは Alber や Klingenberg によって証明されていて，従って，同じく，問題は $H_*(p(G); Z_2)$ における subordination に還元されてしまう．そして $H_*(C_n; Z_2) = H_*(p(G); Z_2)$ はよくわかっているので，（例へば，A. Borel, Ann. of Math. 57）S^n に同相な多様体 M は $n = 2^* + s$ $(s < 2^*)$ とかくとき $2n-1-s$ ケ以上の閉測地線を持つことが結論できるのである．

実は，もう少し一般に，rank 1 の対称空間について，このような G の存在を示し，それを，モデルと呼び，その上での一般論を構成したかったのですが，いろいろな事情から果せませんでした．こゝにお詫び申上げます．しかし，そういうもの，すなわち，上の i_*（又は $\hat{i}_*$）を単射

的にするようなものがとれたとしたら…… という議論は、
これまで述べて来たものでできているようにも思います。
途中インチキしましたところにつきましては どうか不悪
御許し下さい。