数理解析研究所講究録
第69巻 1969年 95-115

対称双曲系に対する混合問題を解く
変形Friedrichs差分法について

大阪市大 工　亀高惟倫

§1、対称双曲系に対する適切な混合問題

半空間において次の様な混合問題を考えます。以下簡単のため定数係数の場合のみを扱う。

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \qquad (t,x,y) \in [0,T]\times R^m_+$$

(2) $$P_- B u(t,0,y) = 0 \qquad (t,y) \in [0,T]\times R^{m-1}$$

(3) $$u(0,x,y) = u^0(x,y) \qquad (x,y) \in R^m_+ = [0,\infty)\times R^{m-1}$$

<u>仮定1.</u>

$$D = \begin{pmatrix} D_+ & \\ & D_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix} \qquad \text{実対角 } N\times N \text{ 行列}$$

$$d_1, \cdots, d_p > \delta > 0 > -\delta > d_{p+1}, \cdots, d_N \qquad (p+q=N)$$

$F_i \quad (i=1,\cdots,m-1)$ 実対称 N×N 行列

次に $B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ b & I_q \end{pmatrix}$ I_p, I_q : それぞれp次, q次単位行列

b : q×p 実行列

$P_+ = \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $P_- = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_q \end{pmatrix}$

の形の境界条件が dissipative である事を仮定する.

<u>仮定2.</u>

(4) $(B^{-1}P_+)^* D (B^{-1}P_+) \geq 0$ すなわち $D_+ + b^* D_- b \geq 0$.

[存在定理]

仮定1, 2の下に混合問題(1) (2) (3) は $\mathcal{E}^s_{L^2}(R^m_+)$ で適切である, ($s = 0, 1, 2, \cdots$) すなわち $^\forall u^0 \in \mathcal{E}^s_{L^2}(R^m_+)$ に対し解が一意的に存在し $u(t) \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{E}^s_{L^2}(R^m_+))$ であって次のエネルギー不等式をみたす.

(5) $$\| u(t) \|_{\mathcal{E}^s_{L^2}(R^m_+)} \leq \text{const.} \| u(0) \|_{\mathcal{E}^s_{L^2}(R^m_+)}$$

§2. 変形 Friedrichs 差分法

混合問題 (1) (2) (3) に対する差分近似として次の様な変形 Friedrichs 差分法を考えよう。

$$(1')\quad u^{n+1}(j,k) = \frac{1}{4}\Big[u^n(j+1,k)+u^n(j-1,k)+\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\{u^n(j,k+1_i)+u^n(j,k-1_i)\}\Big]$$

$$+\frac{\lambda}{2}D\{u^n(j+1,k)-u^n(j-1,k)\}+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{m-1}F_i\{u^n(j,k+1_i)-u^n(j,k-1_i)\}$$

$$(j \geq 1)$$

$$(2')\quad u^{n+1}(0,k) = \frac{1}{2}B^{-1}P_+\Big[\frac{1}{2(m-1)}\sum_{i=1}^{m-1}\{u^n(0,k+1_i)+u^n(0,k-1_i)\}+u^n(1,k)\Big]$$

$$(3')\quad u^0(j,k) = u^0(j,k) \qquad (j \geq 0)$$

ここで

$u^n(j,k) = u(n\lambda h, jh, kh)$, $(j,k) = (j, k_1, \cdots, k_{m-1})$

j, k_i : 整数 $\quad 1_i = (0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$

h : mesh-width, λh : time-step, λ : mesh ratio

この変形 Friedrichs 差分法 (1′) (2′) (3′) は混合問題 (1) (2) (3) に対し、正確度 1 (accurate of order 1) である。

混合問題 (1) (2) (3) を近似する一般の差分法に対して正確度を定義する事は最後に行う。

§3 安定性

先ず mesh-width h に対応する discretization operator $\dot{P}(h)$ を次の様に定義する。$u(x,y) \in B^0(R_+^m)$ に対し

$$(6) \qquad \dot{P}(h)\,u(x,y) = u(j,k) = u(jh,kh) \qquad (x,y) \in Q(j,k)$$

ここで

$$Q(j,k) = \left\{ (x,y);\ (j-\tfrac{1}{2})h \le x < (j+\tfrac{1}{2})h,\ (k_i-\tfrac{1}{2})h \le y_i < (k_i+\tfrac{1}{2})h \quad i=1,\cdots,m-1 \right\}$$

特に $j=0$ の時は

$$Q(0,k) = \left\{ (x,y);\ 0 \le x < \tfrac{h}{2},\ (k_i-\tfrac{1}{2})h \le y_i < (k_i+\tfrac{1}{2})h \quad i=1,\cdots,m-1 \right\}$$

$$(7) \qquad \| \dot{P}(h)\,u(x,y) \|^2_{L^2(R_+^m)} = \sum_{\substack{j\ge 0 \\ k}} \| \dot{P}(h)\,u(x,y) \|^2_{L^2(Q(j,k))}$$

$$= h^m \left[\frac{1}{2} \sum_k |u(0,k)|^2 + \sum_{\substack{j\ge 1 \\ k}} |u(j,k)|^2 \right]$$

である。又差分法 (1′)(2′)(3′) の解 u^n は各 $Q(j,k)$ において $u^n(j,k)$ の値を取る step function とみなす事にする。差分法 (1′)(2′)(3′) を 1-step 解くという操作を step function u^n から step function u^{n+1} への対応とみなして、この解作用素を $C(h)$ とする。すなわち差分法 (1′)(2′)(3′) の初期値 $u^0(x,y)$ に対応する解は

$$(8)\qquad u^n = \left(C(h)\,\tilde{S}(h)\right)^n u^0(x,y)$$

である。（ $\tilde{S}(h)\,C(h) = C(h)$ に注意 ）

<u>仮定 3</u>

$$(9)\qquad (B^{-1}P_+)^*(B^{-1}P_+) \leq I + 2\lambda D$$

すなわち

$$b^* b \leq 2\lambda D_+ , \qquad I_{\bar{x}} + 2\lambda D_- \geq 0$$

<u>仮定 4</u>

$$(10)\qquad \lambda \sup_{|\eta|=1} \left\| \sum_{i=1}^{m-1} F_i \eta_i \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{5(m-1)}} , \qquad \lambda \|D\| \leq \frac{1}{2}$$

<u>定理 1（安定性）</u>

仮定 1, 3, 4, の下に変形 Friedrichs 差分法 (1′), (2′), (3′) の解は L^2 ノルムで安定であって次のエネルギー不等式をみたす

$$(11)\qquad \left\| \left(C(h)\,\tilde{S}(h)\right)^n u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)} \leq \left\| \tilde{S}(h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

証明は Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. Ser. A Vol. 4, 1968 を参照していただく事にしてここでは省略させていただく。

§4 収束

十分なめらかな初期値 $u^0(x,y) \in \mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)$ に対応する変形 Friedrichs 差分法 (1'), (2'), (3') の解 $u^n = (C(h)\hat{S}(h))^n u^0(x,y)$ が §1 の存在定理により一意的存在が保障されている。真の解 $u(t,x,y) = E(t)u^0(x,y)$ へ $L^2(R_+^m)$ で収束する事を証明したい。証明は後まわしにするが次の補題が成りたつ。

<u>補題.1</u>

$\forall u(x,y) \in \mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}(R_+^m)$ に対し

$$\|u(x,y) - \hat{S}(h)u(x,y)\|_{L^2(R_+^m)} \le const.\, h\, \|u(x,y)\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}(R_+^m)} \tag{12}$$

<u>補題.2</u>

$\forall u(x,y) \in \mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)$ に対し

$$\left\|\left[C(h)\hat{S}(h) - S(h)E(\lambda h)\right]u(x,y)\right\|_{L^2(R_+^m)} \le const.\, h^{\frac{3}{2}} \|u(x,y)\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)} \tag{13}$$

<u>補題.3</u>

$\forall u(x,y) \in \mathcal{E}_{L^2}^{1}(R_+^m)$, $0 \le s, t \le T$ に対し

$$\|[E(s) - E(t)]u(x,y)\|_{L^2(R_+^m)} \le const\, |s-t|\, \|u(x,y)\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{1}(R_+^m)} \tag{14}$$

<u>定理.2 (収束)</u>

任意の初期値 $u^0(x,y) \in \mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)$ に対応する変形 Friedrichs 差分法 (1'), (2'), (3') の解 $u^n = (C(h)\hat{S}(h))^n u^0(x,y)$ は

$h \to 0$, $n\lambda h \to t$ とした時 $L^2(R^m_+)$ で同じ境界条件を満足する混合問題(1), (2), (3)の真の解 $u(t,x,y) = E(t)u^0(x,y)$ に収束する、又この時次の評価が成り立つ.

(15) $$\left\| \left(C(h)S(h)\right)^n u^0(x,y) - E(t)u^0(x,y) \right\|_{L^2(R^m_+)}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{\frac{1}{2}} \| u^0(x,y) \|_{\Sigma^{[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}(R^m_+)} + \text{const.} \left| n\lambda h - t \right| \| u^0(x,y) \|_{\Sigma^1_{L^2}(R^m_+)}$$

証明. 方針は Cauchy 問題の場合の Lax の equivalence theorem の証明と同様である、すなわち

(16) $$\left(C(h)S(h)\right)^n u^0(x,y) - E(t)u^0(x,y)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \left(C(h)S(h)\right)^l \left[C(h)S(h) - E(\lambda h)\right] E((n-l-1)\lambda h)\, u^0(x,y)$$

$$+ \left[C(h)S(h) - E(\lambda h)\right] E((n-1)\lambda h)\, u^0(x,y)$$

$$+ \left[E(n\lambda h) - E(t)\right] u^0(x,y)$$

が成り立つ、先ず補題 3 より (16)式右辺第3項の評価を得る.

(17) $$\left\| \left[E(n\lambda h) - E(t)\right] u^0(x,y) \right\|_{L^2(R^m_+)} \leq \text{const.} \left| n\lambda h - t \right| \| u^0(x,y) \|_{\Sigma^1_{L^2}(R^m_+)}$$

次に補題1, 2, 及び $E(t)$ に対する $\mathcal{E}_{L^2}^{s}(R_+^m)$ $\left(s=\left[\frac{m}{2}\right]+2,\ \left[\frac{m}{2}\right]+3\right)$ でのエネルギー不等式を使って (16)式右辺第2項の評価を得る。

$$(18)\qquad \left\| \left[C(h)\tilde{p}(h) - E(\lambda h)\right] E((n-1)\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

$$\leq \left\| \left[C(h)\tilde{p}(h) - \tilde{p}(h)E(\lambda h)\right] E((n-1)\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

$$+ \left\| \left[\tilde{p}(h) - I\right] E(n\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

$$\leq \text{const}\, h^{\frac{3}{2}} \left\| E((n-1)\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)}$$

$$+ \text{const}.\, h \left\| E(n\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}(R_+^m)}$$

$$\leq \text{const}.\, h \left\| u^0(x,y) \right\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)}$$

次に定理1（安定性）、補題2、及び $E(t)$ に対する $\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R_+^m)$ でのエネルギー不等式より (16)式右辺第1項の評価を得る。

$$(19)\qquad \left\| \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(C(h)\tilde{p}(h)\right)^{\ell} \left[C(h)\tilde{p}(h) - E(\lambda h)\right] E((n-\ell-1)\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \left\| \left(C(h)\tilde{p}(h)\right)^{\ell} \left[C(h)\tilde{p}(h) - E(\lambda h)\right] E((n-\ell-1)\lambda h)\, u^0(x,y) \right\|_{L^2(R_+^m)}$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \| \rho(h)[c(h)\rho(h) - E(\Lambda h)] E((n-\ell-1)\Lambda h)\, u^{\circ}(x,y) \|_{L^2(R^m_+)}$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \text{const.}\, h^{\frac{3}{2}} \| E((n-\ell-1)\Lambda h)\, u^{\circ}(x,y) \|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)}$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \text{const}\, h^{\frac{3}{2}} \| u^{\circ}(x,y) \|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{\frac{1}{2}} \| u^{\circ}(x,y) \|_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)}$$

以上の評価を合わせて定理2の評価を得る　　[Q.E.D.]

§5. 補題の証明

[補題1証明]　本質的ではないが mesh-width h として $h = \frac{h_0}{2^{\ell}}$ $(h_0 > 0,\ \ell = 1,2,3,\cdots)$ の形のもののみ考える。$Q_h(j,k)$ は§3で定義した直方体が mesh-width h に対応するものである事を示すために suffix h をそえたもの。$\rho_h(j,k)$ は点 (jh,kh) を中心に $Q_h(j,k)$ を含む最小の球とする。この時 Sobolev's lemma により次の評価を得る。

$$(20)\qquad \| u(x,y) - \rho(h) u(x,y) \|^2_{L^2(R^m_+)} = \sum_{\substack{j\geq 0\\ k}} \| u(x,y) - u(j,k) \|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \sum_{\substack{j\geq 0\\ k}} h^{m+2} | u(x,y) |^2_{B^1(Q_h(j,k))} \leq h^2 h_0^m \sum_{\substack{j\geq 0\\ k}} | u(x,y) |^2_{B^1(\rho_h(j,k))}$$

$$\leq h^2 h_0^m \sum_{\substack{j\geq 0\\k}} \| u(x,y) \|^2_{\Sigma_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}(\rho_{h_0}(j,k))} \leq \mathrm{const.}\, h^2 \| u(x,y) \|^2_{\Sigma_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}(R^m_+)}$$

[Q.E.D.]

[補題2証明]

$$(21)\qquad \| [C(h)S(h) - S(h)E(\lambda h)]\, u(x,y) \|^2_{L^2(R^m_+)}$$

$$= \sum_{\substack{j\geq 0\\k}} \| [C(h)S(h) - S(h)E(\lambda h)]\, u(x,y) \|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

であるが、先ず $j \geq 1$ の場合 $Q_h(j,k)$ 上では

$$(22)\qquad C(h)S(h)u(x,y) = \frac{1}{4}\Big[u(j+1,k) + u(j-1,k) + \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\{u(j,k+l_i) + u(j,k-l_i)\}\Big]$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\Big[D\{u(j+1,k) - u(j-1,k)\} + \sum_{i=1}^{m-1} F_i\{u(j,k+l_i) - u(j,k-l_i)\}\Big]$$

又 $E(t)u(x,y) = u(t,x,y)$ と書く事にすれば

$$(23)\qquad S(h)E(\lambda h)u(x,y) = u(j,k) + \int_0^{\lambda h}\Big[D\frac{\partial u}{\partial x}(t,j,k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(t,j,k)\Big]dt$$

$$= u(j,k) + \lambda h\Big[D\frac{\partial u}{\partial x}(j,k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(j,k)\Big]$$

$$+ \int_0^{\lambda h}\Big[D\Big\{\frac{\partial u}{\partial x}(t,j,k) - \frac{\partial u}{\partial x}(j,k)\Big\} + \sum_{i=1}^{m-1} F_i\Big\{\frac{\partial u}{\partial y_i}(t,j,k) - \frac{\partial u}{\partial y_i}(j,k)\Big\}\Big]dt$$

それぞれ次の不等式が成り立つ

(24) $$\left\| \frac{1}{4}\{u(j+1,k)+u(j-1,k)\} - \frac{1}{2}u(j,k) \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))} \leq \text{const.}\, h^{m+4} \left| u(x,y) \right|^2_{B^2(Q_h(j,k))}$$

(25) $$\left\| \frac{1}{4(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \{u(j,k+l_i)+u(j,k-l_i)\} - \frac{1}{2}u(j,k) \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+4} \left| u(x,y) \right|^2_{B^2(Q_h(j,k))}$$

(26) $$\left\| \frac{\lambda}{2} D\{u(j+1,k)-u(j-1,k)\} - \lambda h D \frac{\partial u}{\partial x}(j,k) \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+4} \left| u(x,y) \right|^2_{B^2(Q_h(j,k))}$$

(27) $$\left\| \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{m-1} F_i \{u(j,k+l_i)-u(j,k-l_i)\} - \lambda h \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(j,k) \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+4} \left| u(x,y) \right|^2_{B^2(Q_h(j,k))}$$

(28) $$\left\| \int_0^{\lambda h} D\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(t,j,k) - D\frac{\partial u}{\partial x}(j,k)\right\} dt \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$= h^m \left| \int_0^{\lambda h} D\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(t,j,k) - \frac{\partial u}{\partial x}(j,k)\right\} dt \right|^2$$

$$\leq \text{const}\, h^{m+1} \int_0^{\lambda h} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t,j,k) - \frac{\partial u}{\partial x}(j,k) \right|^2 dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+2} \int_0^{\lambda h} \int_0^{t} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t_1, j, k) \right|^2 dt_1\, dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+3} \int_0^{\lambda h} \left| D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, j, k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y_i}(t, j, k) \right|^2 dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+3} \int_0^{\lambda h} \left| u(t, x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_h(j,k))} dt$$

(29) $$\left\| \int_0^{\lambda h} \sum_{i=1}^{m-1} F_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial y_i}(t, j, k) - \frac{\partial u}{\partial y_i}(j, k) \right\} dt \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+3} \int_0^{\lambda h} \left| u(t, x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_h(j,k))} dt$$

以上の評価を合わせ、$E(t)$ に対する $\mathcal{E}^{[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}(R^m_+)$ でのエネルギー不等式を使えば結局、

(30) $$\sum_{\substack{j \geq 1 \\ k}} \left\| \left[C(h) S(h) - S(h) E(\lambda h) \right] u(x, y) \right\|^2_{L^2(Q_h(j,k))}$$

$$\leq \sum_{\substack{j \geq 1 \\ k}} \left[\text{const.}\, h^{m+4} \left| u(x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_h(j,k))} + \text{const.}\, h^{m+3} \int_0^{\lambda h} \left| u(t, x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_h(j,k))} dt \right]$$

$$\leq \text{const.}\, h^4 \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k}} h_0^m \left| u(x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_{h_0}(j,k))} + \text{const.}\, h^3 \int_0^{\lambda h} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k}} h_0^m \left| u(t, x, y) \right|^2_{\mathcal{B}^2(Q_{h_0}(j,k))} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^4 \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k}} \left\| u(x, y) \right\|^2_{\mathcal{E}^{[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}(S_{h_0}(j,k))} + \text{const.}\, h^3 \int_0^{\lambda h} \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k}} \left\| u(t, x, y) \right\|_{\mathcal{E}^{[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}(S_{h_0}(j,k))} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^4 \| u(x,y) \|^2_{\sum_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)} + \text{const.}\, h^3 \int_0^{\lambda h} \| u(t,x,y) \|^2_{\sum_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)} d\tau$$

$$\leq \text{const.}\, h^4 \| u(x,y) \|^2_{\sum_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)}$$

次に $j=0$ の場合 $Q_h(0,k)$ 上では

(31) $$C(h)\, S(h)\, u(x,y) = \frac{1}{2} B^{-1} P_+ \left[\frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \{ u(0,k+l_i) + u(0,k-l_i) \} + u(1,k) \right]$$

$$= \frac{1}{2} B^{-1} P_+ \left[\frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \{ u(0,k+l_i) + u(0,k-l_i) \} + u(0,k) + \{ u(1,k) - u(0,k) \} \right]$$

(32) $$S(h)\, E(\lambda h)\, u(x,y) = u(0,k) + \int_0^{\lambda h} \left[D \frac{\partial u}{\partial x}(t,0,k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(t,0,k) \right] dt$$

一方 $E(t)\, u(x,y)$ が境界条件 (2) をみたす事から

(33) $$S(h)\, E(\lambda h)\, u(x,y) = B^{-1} P_+\, u(0,k) + \int_0^{\lambda h} B^{-1} P_+ \left[D \frac{\partial u}{\partial x}(t,0,k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(t,0,k) \right] dt$$

(34) $$\| B^{-1} P_+ \{ u(0,k+l_i) - u(0,k) \} \|^2_{L^2(Q_h(0,k))} \leq \text{const.}\, h^{m+2} | u(0,y) |^2_{B^1(Q_h(k))}$$

ただし $Q_h(k) = \{ y;\ (k_i - \frac{1}{2})h \leq y_i < (k_i + \frac{1}{2})h \quad i = 1, \cdots, m-1 \}$ したがって

(35) $$\left\| \frac{1}{2} B^{-1} P_+ \left[\frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \{ u(0,k+l_i) + u(0,k-l_i) \} - u(0,k) \right] \right\|^2_{L^2(Q_h(0,k))}$$

$$\leq \text{const.}\, h^{m+2} | u(0,y) |^2_{B^1(Q_h(k))}$$

(36) $$\left\| \tfrac{1}{2} B^{-1} P_+ \{ u(1,k) - u(0,k) \} \right\|^2_{L^2(Q_h(0,k))} \le \mathrm{const.}\, h^{m} \left| \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,k)\, d\xi \right|^2$$

$$\le \mathrm{const.}\, h^{m+1} \int_0^h \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,k)\right|^2 d\xi \le \mathrm{const.}\, h^{m+1} \int_0^h \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y)\right|^2_{B^0(Q_h(k))} d\xi$$

(37) $$\left\| \int_0^{\Lambda h} B^{-1} P_+ \left[D \frac{\partial u}{\partial x}(t,0,k) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(t,0,k) \right] dt \right\|^2_{L^2(Q_h(0,k))}$$

$$\le \mathrm{const.}\, h^{m+1} \int_0^{\Lambda h} \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y)\right|^2_{B^0(Q_h(k))} + \left|u(t,0,y)\right|^2_{B^1(Q_h(k))} \right] dt$$

以上の評価を合わせ、$S_{h_0}(k)$ を R^{m-1} の中の点 kh_0 を中心に $Q_{h_0}(k)$ を含む最小球として、Sobolev's lemma 及び $E(t)$ に対するエネルギー不等式を使って

(38) $$\sum_k \left\| \left[C(h) S(h) - S(h) E(\Lambda h) \right] u(x,y) \right\|^2_{L^2(Q_h(0,k))}$$

$$\le \sum_k \Big[\mathrm{const.}\, h^{m+2} \left| u(0,y) \right|^2_{B^1(Q_h(k))} + \mathrm{const.}\, h^{m+1} \int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y) \right|^2_{B^0(Q_h(k))} d\xi$$

$$+ \mathrm{const.}\, h^{m+1} \int_0^{\Lambda h} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) \right|^2_{B^0(Q_h(k))} + \left| u(t,0,y) \right|^2_{B^1(Q_h(k))} \right] dt \Big]$$

$$\le \mathrm{const.}\, h^3 \sum_k h_0^{m-1} \left| u(0,y) \right|^2_{B^1(Q_{h_0}(k))} + \mathrm{const.}\, h^2 \int_0^h \sum_k h_0^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y) \right|^2_{B^0(Q_{h_0}(k))} d\xi$$

$$+ \mathrm{const}\, h^2 \int_0^{\Lambda h} \left\{ \sum_k h_0^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) \right|^2_{B^0(Q_{h_0}(k))} + \sum_k h_0^{m-1} \left| u(t,0,y) \right|^2_{B^1(Q_{h_0}(k))} \right\} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^3 \sum_k \|u(0,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+2}(\tilde{P}_{h_0}(k))} + \text{const.}\, h^2 \int_0^h \sum_k \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y)\right\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+1}(\tilde{P}_{h_0}(k))} d\xi$$

$$+ \text{const.}\, h^2 \int_0^{\lambda h} \left\{ \sum_k \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y)\right\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+1}(\tilde{P}_{h_0}(k))} + \sum_k \|u(t,0,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+2}(\tilde{P}_{h_0}(k))} \right\} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^3 \|u(0,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+2}(R^{m-1})} + \text{const.}\, h^2 \int_0^h \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y)\right\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+1}(R^{m-1})} d\xi$$

$$+ \text{const.}\, h^2 \int_0^{\lambda h} \left\{ \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y)\right\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+1}(R^{m-1})} + \|u(t,0,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m-1}{2}]+2}(R^{m-1})} \right\} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^3 \|u(x,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)} + \text{const.}\, h^2 \int_0^{\lambda h} \|u(t,x,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)} dt$$

$$\leq \text{const.}\, h^3 \|u(x,y)\|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}(R^m_+)}$$

〔補題２証明終り〕

〔補題３証明〕　$E(t)$ に対する $\mathcal{E}^1_{L^2}(R^m_+)$ でのエネルギー不等式を使って

(39)
$$\|[E(s)-E(t)]\,u(x,y)\|^2_{L^2(R^m_+)} = \left\|\int_t^s \frac{\partial u}{\partial t}(\tau,x,y)\,d\tau\right\|^2_{L^2(R^m_+)}$$

$$= \left\|\int_t^s \left\{ D\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,x,y) + \sum_{i=1}^{m-1} F_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(\tau,x,y) \right\} d\tau \right\|^2_{L^2(R^m_+)}$$

$$\leq \text{const.}\, |s-t| \left| \int_t^s \|u(\tau,x,y)\|^2_{\mathcal{E}^1_{L^2}(R^m_+)}\, d\tau \right|$$

$$\leq \text{const.}\,|s-t|\,\left|\int_t^s \|u(x,y)\|^2_{\mathcal{L}^2_t(R_+^m)}\,d\tau\right| \leq \text{const.}\,|s-t|^2\,\|u(x,y)\|^2_{\mathcal{L}^2_t(R_+^m)}$$

［補題3証明終り］

§6. 境界値の収束

$x=0$ の近傍で $\psi(x)\equiv 1$ なる $\psi(x)\in\mathcal{D}(R^1)$ を1つ固定するテスト函数として $\varphi(t,y)\in\mathcal{D}((0,T)\times R^{m-1})$ をえらんだとき $\varphi(t,y)\psi(x)=\varphi(t,x,y)$ と書く事にする

$$(40)\qquad \int_0^\infty dt\int_0^\infty dx\int_{R^{m-1}} dy\left[\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_{i=1}^{m-1}F_i\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]\cdot\varphi$$

$$=\int_0^\infty dt\int_{R^{m-1}} dy\; D\,u(t,0,y)\cdot\varphi(t,y)-\int_0^\infty dt\int_0^\infty dx\int_{R^{m-1}} dy\; u\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}-D\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sum_{i=1}^{m-1}F_i\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right]$$

なる関係を変形 Friedrichs 差分法にもとづいて差分化すると

$$(41)\qquad \sum_{\substack{n\geq 0\\ j\geq 1\\ k}} h^m\left[u^{n+1}(j,k)-\frac{1}{4}\left[u^n(j+1,k)+u^n(j-1,k)+\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\{u(j,k+h_i)+u(j,k-h_i)\}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{2}D\{u^n(j+1,k)-u^n(j-1,k)\}-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{m-1}F_i\{u^n(j,k+h_i)-u^n(j,k-h_i)\}\right]\cdot\varphi^n(j,k)$$

$$=\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}} h^m\,u^n(j,k)\left[-\frac{1}{4}\left[\varphi^n(j+1,k)+\varphi^n(j-1,k)+\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\{\varphi^n(j,k+h_i)+\varphi^n(j,k-h_i)\}\right]+\varphi^{n-1}(j,k)\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2}D\{\varphi^n(j+1,k)-\varphi^n(j-1,k)\}+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{m-1}F_i\{\varphi^n(j,k+h_i)-\varphi^n(j,k-h_i)\}\right]$$

$$+\sum_{\substack{n\geq 1\\ k}} h^m \frac{\Delta}{2}\left\{D u^n(1,k)\,\varphi^n(0,k) + D u^n(0,k)\,\varphi^n(1,k)\right\}$$

今 u^n が変形 Friedrichs 差分式 (1'), (2'), (3') の解とすると (41) 式左辺は 0 に等しい、したがって $\varphi^n(0,k)=\varphi^n(1,k)$ に注意して

$$(42)\qquad \sum_{\substack{n\geq 1\\ k}} h^m \frac{\Delta}{2} D\left\{u^n(1,k)+u^n(0,k)\right\}\cdot\varphi^n(0,k)$$

$$=\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}} h^m u^n(j,k)\cdot\Big[-\frac{1}{4}\Big[\varphi^n(j+1,k)+\varphi^n(j-1,k)+\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\left\{\varphi^n(j,k+l_i)+\varphi^n(j,k-l_i)\right\}\Big]+\varphi^{n-1}(j,k)$$

$$+\frac{\Delta}{2}D\left\{\varphi^n(j+1,k)-\varphi^n(j-1,k)\right\}+\frac{\Delta}{2}\sum_{i=1}^{m-1}F_i\left\{\varphi^n(j,k+l_i)-\varphi^n(j,k-l_i)\right\}\Big]$$

そこで上の表現を利用して (42) 式左辺の絶対値を評価しよう。

$$(43)\qquad \left|\sum_{\substack{n\geq 1\\ k}} h^m \frac{\Delta}{2} D\left\{u^n(1,k)+u^n(0,k)\right\}\cdot\varphi^n(0,k)\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}} \lambda h^{m+1}\left|u^n(j,k)\right|\cdot\left|\frac{1}{\lambda h}\Big[\,(\ )\text{式右辺}\,[\quad]\,\text{内に同じ}\Big]\right|$$

$$\leq\Big(\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}}\lambda h^{m+1}\left|u^n(j,k)\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}}\lambda h^{m+1}\left|\frac{1}{\lambda h}\Big[\ \text{上に同じ}\ \Big]\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\Big(\mathrm{const.}\sum_{n\geq 1}\lambda h\left\|\rho(h)u^0(x,y)\right\|^2_{L^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}}\lambda h^{m+1}\left|\varphi(t,x,y)\right|^2_{\mathcal{B}^1(Q_h^n(j,k))}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \mathrm{const.}\left\|\rho(h)u^0(x,y)\right\|_{L^2}\Big(\sum_{\substack{n\geq 1\\ j\geq 1\\ k}}\lambda h^{m+1}\left|\varphi(t,y)\right|^2_{\mathcal{B}^1(Q_h^n(k))}\left|\psi(x)\right|^2_{\mathcal{B}^1(Q_h(j))}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \mathrm{const.} \| \delta(h) u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)} \| \varphi(t,y) \|_{\mathcal{B}^{[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}((0,T)\times R^{m-1})} \| \psi(x) \|_{\mathcal{E}^2_{L^2}(R^1_+)}$$

ただし　$Q^n_h(j,k) = \{(t,x,y)\ ;\ (n-1)\Delta h < t \leq n\Delta h,\ (x,y) \in Q_h(j,k)\}$

$Q^n_h(k) = \{(t,y)\ ;\ (n-1)\Delta h < t \leq n\Delta h,\ y \in Q_h(k)\}$

$Q_h(j) = \{x\ ;\ (j-\frac{1}{2})h \leq x < (j+\frac{1}{2})h\}$

文§.4の補題1を使えば

$$(44) \qquad \| \delta(h) u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)} \leq \| u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)} + \| \delta(h) u^0(x,y) - u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)}$$

$$\leq \| u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)} + \mathrm{const.}\, h \| u^0(x,y) \|_{\mathcal{E}^{[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}(R^m_+)}$$

したがって近似解の境界値 $\frac{1}{2}\{u^n(1,k) + u^n(0,k)\}$ は $(0,T)\times R^{m-1}$ 上の超函数とみなすとき $\mathcal{B}^{1,[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}((0,T)\times R^{m-1})$ に属し

$$(45) \qquad \left\| \frac{1}{2}\{u^n(1,k) + u^n(0,k)\} \right\|_{\mathcal{B}^{1,[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}((0,T)\times R^{m-1})}$$

$$\leq \| u^0(x,y) \|_{L^2(R^m_+)} + \mathrm{const.}\, h \| u^0(x,y) \|_{\mathcal{E}^{[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}(R^m_+)}$$

なる評価が成り立つ。よってここで mesh-width $h \to 0$ としたとき近似解の境界値の真の解の境界値への収束を保証するものとしてこの定理が成り立つ。

$$(46) \qquad (\tilde{u}_h)(t,y) = \frac{1}{2}\{u^n_h(1,k) + u^n_h(0,k)\} \qquad (t,y) \in Q^n_h(k) \qquad \text{とする.}$$

定理.2（境界値の収束）

$h\to 0$ とした時近似解の境界値は真の解の境界値へ超函数の意味で収束する　すなわち

$$(47)\qquad \gamma u_h \longrightarrow u(t,0,y) \qquad \text{in } \mathcal{D}'^{,[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}((0,T)\times R^{m-1})$$

証明　(42)式において $h\to 0$ とすると (42)式右辺は(40)式右辺第2項に収束する．したがって $\gamma u_h \to u(t,0,y)$ in $\mathcal{D}'$ は明らかである．したがって γu_h が $\mathcal{D}'^{,[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}$ で Cauchy 列である事をいえばよい．実際次の不等式が成りたつ．

$$(48)\qquad \|\gamma u_h-\gamma u_{h'}\|_{\mathcal{D}'^{,[\frac{m}{2}]+3}_{L^2}((0,T)\times R^{m-1})}$$

$$\leq \text{const.}\|u_h-u_{h'}\|_{L^2((0,T)\times R^m_+)}+\text{const.}(h+h')\Big[\|u^0(x,y)\|_{L^2(R^m_+)}+\text{const.}(h+h')\|u^0(x,y)\|_{\Sigma^{[\frac{m}{2}]+2}_{L^2}(R^m_+)}\Big]$$

(48)式右辺第1項 $\to 0$ $(h,h'\to 0)$ は定理.1より保証される．

さて(48)式の証明をしよう．(42)式右辺の［　］内を $(L^*_h\varphi_h)^n(j,k)\cdot\Lambda h$ と略記する．$h'<h$ として

$$(49)\qquad \big|\langle \lambda D\{\gamma u_h-\gamma u_{h'}\},\ \varphi(t,y)\rangle\big|$$

$$=\Big|\sum_{\substack{n\geq 1\\ k}} h^m D\tfrac{1}{2}\{u^n_h(0,k)+u^n_h(1,k)\}\cdot\varphi^n_h(0,k)-\sum_{\substack{n'\geq 1\\ k'}} h'^m D\tfrac{1}{2}\{u^{n'}_{h'}(0,k')+u^{n'}_{h'}(1,k')\}\cdot\varphi^{n'}_{h'}(0,k')\Big|$$

$$= \Big| \sum_{\substack{n\geq 1 \\ j\geq 1 \\ k}} \lambda h^{m+1} u_h^n(j,k) \cdot (L_h^* \varphi_h)^n(j,k) - \sum_{\substack{n'\geq 1 \\ j'\geq 1 \\ k'}} \lambda h'^{\cdots} u_{h'}^{n'}(j',k') (L_{h'}^* \varphi_{h'})^{n'}(j',k') \Big|$$

$$\leq \Big| \sum_{\substack{n\geq 1 \\ j\geq 1 \\ k}} \Big[\lambda h^{m+1} u_h^n(j,k) - \sum_{(n',j',k')\in Q_h^n(j,k)} \lambda h'^{m+1} u_{h'}^{n'}(j',k') \Big] \cdot (L_h^* \varphi_h)^n(j,k)$$

$$+ \Big| \sum_{\substack{n\geq 1 \\ j\geq 1 \\ k}} \sum_{(n',j',k')\in Q_h^n(j,k)} \lambda h'^{m+1} u_{h'}^{n'}(j',k') \Big[(L_h^* \varphi_h)^n(j,k) - (L_{h'}^* \varphi_{h'})^{n'}(j',k') \Big] \Big|$$

$$\leq \mathrm{const} \| u_h - u_{h'} \|_{L^2((0,T)\times R_+^m)} \| \varphi(t,y) \|_{\mathcal{B}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+2}((0,T)\times R^{m-1})}$$

$$+ \mathrm{const}. \, h \, \| S(h') u^0(x,y) \|_{L^2(R_+^m)} \| \varphi(t,y) \|_{\mathcal{B}_{L^2}^{[\frac{m}{2}]+3}((0,T)\times R^{m-1})}$$

求める評価が得られた。

[定理2証明終り]

§7 最後に

以上議論は簡単のため定数係数の場合に限ったが、対称双曲系であるから通常のテクニックで容易に変数係数の場合に移行し得る、さらに R_+^m 内部の compact set 上で方程式の係数が非対称になる様に perturbe されていても全体として regularly hyperbolic であれば、仮定4を少し変形してこの変形 Friedrichs 差分法は安定である事が示せる (Yamaguti - Nogi [ ] の結果を使う)

正確度(accuracy)の次数の高さは一般の形では定義しなかったが、正確度2の差分法の例として Lax-Wendroff 差分法は一部の対称双曲系に対し安定である事が示せる。

参考文献

[1] Yamaguti, M. and Nogi, T. An algebra of pseudo difference schemes and its application. Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3 (1967) 151-166.

[2] 山口昌哉 Wellposedness と Stability 数理解析講究録 第32巻 p.39-60

[3] Lax, P.D. and Richtmyer, R.D. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math, vol. 9, (1956) p.267-293

[4] Lax, P.D. and Wendroff, B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. Comm. Pure Appl. Math. vol. 17 (1964) p.381-398

[5] Kametaka, Y. On the stability of modified Friedrichs scheme for the mixed problem for symmetric hyperbolic system Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A 4 (1968) [to appear]