数理解析研究所講究録
第70巻 1969年 11-24

二重層大気における反射
および透過函数について

龍谷大　辻田 烝治

§1 序論

均質な2つの *plane parallel atmosphere* を重ね合わせた場合の、*Scattering* および *Transmission function* の計算は、最初、*Hawkins* によって試みられた。*Hawkins* は、*Source function* に関する *Milne* の積分方程式から出発し、S-およびT-函数を、厳密解の形に求めた。その過程は、解析的な面からは *self-closed* であると考えられるが、その解が物理的な意味を満たしていないことは、後になって、*Hansen* によって指摘された。また、*Matsumoto* は、解が一意性の条件を満たしていないことを証明した。

他方、*van de Hulst* は、*Adding method* として二重層大気におけるS-およびT-函数を計算する問題をとり上げ、*optical* に薄い層におけるS-およびT-函数が知られている場合に、そう言う層を次々に重ねて行くことによって、*optical*

に厚い層におけるS-およびT-函数が、能率よく計算されるであろうと言うことを述べている。

van de Hulst の考え方に基いて、*Hansen* と *Irvine* がそれぞれ独立に、二重層に関する計算を行なっている。

まず、*Hansen* によれば、物理的に性質の等しい2つの層を重ね合わせた場合のS-およびT-函数は、次のように表わされる。2つの層の *optical thickness* は、共にτとする。

$$\begin{aligned}\frac{S(2\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\cdot F}{4\mu} &= \frac{S(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\cdot F}{4\mu} \\ &\quad + e^{-\tau/\mu}\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\Sigma_0(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\cdot F e^{-\tau/\mu_0} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi} T(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')\frac{1}{4\mu'}\Sigma_0(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)F e^{-\tau/\mu_0}d\mu' d\phi' \\ &\quad + \frac{e^{-\tau/\mu}}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}\Sigma_0(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')\,\frac{T(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)}{4\mu'}F\,d\mu' d\phi' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} T(\tau;\mu,\phi;\mu'',\phi'')\frac{1}{4\pi\mu''}\Sigma_0(\tau;\mu'',\phi'';\mu',\phi')\cdot \\ &\qquad\qquad \frac{T(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)F}{4\mu'}d\mu' d\phi' \end{aligned} \tag{1}$$

ただし

$$\Sigma_0(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) \equiv \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} S_n(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) \tag{2}$$

$$S_1(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) \equiv S(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}S_n(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) &\equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} S(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')\cdot \\ &\qquad \cdot S_{n-1}(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)\frac{d\mu'}{\mu'}d\phi'\end{aligned} \tag{4}$$

(1)の右辺各項の物理的意味は、次のようなものである。

才1項：上の層だけによって拡散反射される量。

才2項：上の層を直接透過し、下の層と上の層の間を拡散的に反射されて往復をくり返し、最後に上の層を直接透過して表面に出て来る量。

才3項：途中まで才2項と同じ過程を経るが、最後に上の層を拡散的に透過して表面に出て来る量。

才4項：上の層を拡散的に透過した後、下の層と上の層の間を拡散的に反射されて往復をくり返し、最後に上の層を直接透過して表面に出て来る量。

才5項：途中まで才4項の内容と同じであるが、最後に上の層を拡散的に透過して表面に出て来る量。

$$
\begin{aligned}
T(2\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) = {} & T(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)e^{-\tau/\mu_0} + e^{-\tau/\mu}T(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) \\
& + e^{-\tau/\mu}\Sigma_\varepsilon(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)e^{-\tau/\mu_0} \\
& + \frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} T(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')\,T(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)\frac{d\mu'}{\mu'}d\phi' \\
& + \frac{e^{-\tau/\mu_0}}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} T(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')\Sigma_\varepsilon(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)\frac{d\mu'}{\mu'}d\phi' \\
& + \frac{e^{-\tau/\mu}}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \Sigma_\varepsilon(\tau;\mu,\phi;\mu',\phi')T(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)\frac{d\mu'}{\mu'}d\phi' \\
& + \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} T(\tau;\mu,\phi;\mu'',\phi'')\Sigma_\varepsilon(\tau;\mu'',\phi'';\mu',\phi')\cdot \\
& \qquad \cdot T(\tau;\mu',\phi';\mu_0,\phi_0)\frac{d\mu'}{\mu'}d\phi'\frac{d\mu''}{\mu''}d\phi'' \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ただし $\Sigma_\varepsilon(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\equiv\sum_{n=2,4,6\cdots}^{\infty}S_n(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)$ (6)

(5)の右辺各項の物理的意味も、S-函数の場合に倣って説明することができ、それらによって、二重層を透過する輻射のすべての場合が、かぞえ上げられていることになる。

実際にこの方式に従って、数値計算を実行しようとすると、無限級数(2)および(6)の処理が問題になる。*Hansen* は、はじめの数項の和をとって打ち切り、残りの項の和の代りに等比級数の和で置き換えている。そうすることの妥当性もまた、*van de Hulst* によって論じられている。

他方、*Irvine* は、*incident parallel rays* に対して、次のような *formulation* を行なっている。

上の面に、方向 μ_0 で入射する輻射があるときに、2つの層の境界における上向きの *radiation intensity* を $U(\mu,\mu_0)$、下向きのそれを $D(\mu,\mu_0)$ で表わし、また、上の層に関する物理量を1、下の層に関する物理量を2と言う *suffix* をつけて示すことにする。まず、*Reflection function* $R(\mu,\mu_0)$ が次のように与えられる。

$$R(\mu,\mu_0)=R_1(\mu,\mu_0)+U(\mu,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu}+2\pi\int_0^1 T_1(\mu,\mu')\,U(\mu',\mu_0)\,\mu'd\mu' \qquad (7)$$

同様に、*Transmission function* $T(\mu,\mu_0)$ も、次のように与えられる。

$$T(\mu,\mu_0)=D(\mu,\mu_0)e^{-\tau_2/\mu}+T_2(\mu,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+2\pi\int_0^1 T_1(\mu,\mu')D(\mu',\mu_0)\mu'd\mu' \quad (8)$$

ただし

$$U(\mu,\mu_0)=R_2(\mu,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+\Omega\{R_2(\mu,\mu')D(\mu',\mu_0)\} \quad (9)$$

$$D(\mu,\mu_0)=T_1(\mu,\mu_0)+Q(\mu,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+\Omega\{Q(\mu,\mu')T_1(\mu',\mu_0)\} \quad (10)$$

$$Q(\mu,\mu_0)=\sum_{i=1}^{\infty}Q_i(\mu,\mu_0) \quad (11)$$

$$Q_{i+1}(\mu,\mu_0)=\Omega\{Q_1(\mu,\mu')Q_i(\mu',\mu_0)\} \quad (12)$$

$$Q_1(\mu,\mu_0)=\Omega\{R_1(\mu,\mu')R_2(\mu',\mu_0)\} \quad (13)$$

$$\Omega\{f(\mu,\mu')\cdot g(\mu',\mu_0)\}=2\pi\int_0^1 f(\mu,\mu')g(\mu',\mu_0)\mu'd\mu' \quad (14)$$

Irvine の取扱いも、本質的に *Hansen* のものと同じであることが容易にわかる。そして、この場合も無限級数(11)は、はじめの数項で打ち切られ、残りの項は等比級数の和で置き換えられている。

ところで、*Hansen* や *Irvine* の *formulation* は、実は、*Chandrasekhar* の *invariance principle* から、自動的に導かれるものであることを示すことができる。

Chandrasekhar の *invariance principle* は次のように書かれる。

$$I(\tau_1;+\mu,\phi)=\frac{F}{4\mu}e^{-\tau_1/\mu_0}S_2(\tau_2;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}S_2(\tau_2;\mu,\phi;\mu',\phi')I(\tau_1;-\mu',\phi')d\mu'd\phi' \tag{15}$$

$$I(\tau_1;-\mu,\phi)=\frac{F}{4\mu}T_1(\tau_1;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0) + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}S_1(\tau_1;\mu,\phi;\mu',\phi')I(\tau_1;+\mu',\phi')d\mu'd\phi' \tag{16}$$

$$\frac{F}{4\mu}S(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)=\frac{F}{4\mu}S_1(\tau_1;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)+e^{-\tau_1/\mu}I(\tau_1;+\mu,\phi) + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}T_1(\tau_1;\mu,\phi;\mu',\phi')I(\tau_1;+\mu',\phi')d\mu'd\phi' \tag{17}$$

$$\frac{F}{4\mu}T(\tau;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)=\frac{F}{4\mu}e^{-\tau_1/\mu_0}T_2(\tau_2;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)+e^{-\tau_2/\mu}I(\tau_1;-\mu,\phi) + \frac{1}{4\pi\mu}\int_0^1\int_0^{2\pi}T_2(\tau_2;\mu,\phi;\mu',\phi')I(\tau_1;-\mu',\phi')d\mu'd\phi' \tag{18}$$

ただし

$$\tau=\tau_1+\tau_2$$

これらは、Irvine の式(7)〜(10)に対応しており、たとえば、(17)の右辺第２項および第３項に(15)を代入し、その結果に(16)を代入し、またその結果に(15)を代入し-----、と言う操作をくり返して行けば、前２者とまったく同じ結果に到達することがわかるであろう。したがって、van de Hulst、Hansen および Irvine 達の取扱いは、原理的には、Chandrasekhar の invariance principle に帰着すると言うことができる。

§2 本論

次に、Gutshabash および筆者による方法について、その概要を述べる。

従前どおり、各層に関する物理量は既知であるとし、上の層に関する量を1、下の層に関する量を2と言う suffix で表わすことにして、Chandrasekhar の invariance principle から出発する（(15)〜(18) 参照。）。ただし、便宜上、2つの層の境界における、下向きおよび上向きの各 radiation intensity の notation を変え、それらの満たすべき境界条件を次のように書く。

$$\left.\begin{array}{ll} I_1(\tau_1;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\equiv I(\tau_1;-\mu,\phi)=0 & (0<\mu<1) \\ I_2(\tau_1;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)\equiv I(\tau_1;+\mu,\phi)\equiv 0 & (-1<\mu<0) \end{array}\right\} \qquad (19)$$

いま、一般の phase function を考えるのであるが、しかしそれは有限の Legendre 級数で表わせるものとする。

$$P_i(\mu,\phi;\ \mu_0,\phi_0)=\sum_{m=0}^{N}(2-\delta_{0,m})\left\{\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{i\ell}^{(m)}P_\ell^m(\mu)P_\ell^m(\mu_0)\right\}\cos m(\phi_0-\phi) \qquad (20)$$

ただし $\varpi_{i\ell}^{(m)}\equiv\varpi_{i\ell}\cdot\dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}$; $\delta_{0,m}=\begin{cases}1 & (m=0)\\ 0 & (m\neq 0)\end{cases}$; $i=1,2$

その場合には、S-およびT-函数も次のように展開される。

$$S_i(\tau_i;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)=\sum_{m=0}^{N}S_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu_0)\cos m(\phi_0-\phi) \tag{21}$$

$$T_i(\tau_i;\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)=\sum_{m=0}^{N}T_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu_0)\cos m(\phi_0-\phi) \tag{22}$$

さらに、*radiation intensity* も次のように展開できるものとする。

$$I_i(\tau_i;\mu,\phi;\mu',\phi')=\sum_{m=0}^{N}I_i(\tau_i;\mu,\mu')\cos m(\phi'-\phi) \qquad (i=1,2) \tag{23}$$

invariance principle、*equation of transfer*、境界条件および(20)、(21)、(22)を用いて、*Chandrasekhar* の手法に従い、次のような諸関係式を得る。

$$S_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}(2-\delta_{0,m})\sum_{l=m}^{N}(-1)^{l+m}\varpi_{i,l}^{(m)}\{\psi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)\psi_l^{(m)}(\tau_i,\mu_0) -\phi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)\phi_l^{(m)}(\tau_i,\mu_0)\} \tag{24}$$

$$T_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}(2-\delta_{0,m})\sum_{l=m}^{N}\varpi_{i,l}^{(m)}\{\phi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)\psi_l^{(m)}(\tau_i,\mu_0) -\psi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)\phi_l^{(m)}(\tau_i,\mu_0)\} \tag{25}$$

$$\psi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)=P_l^m(\mu)+\frac{(-1)^{l+m}}{2(2-\delta_{0,m})}\int_0^1 S_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu')P_l^m(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{26}$$

$$\phi_l^{(m)}(\tau_i,\mu)=P_l^m(\mu)e^{-\tau_i/\mu}+\frac{(-1)^{l+m}}{2(2-\delta_{0,m})}\int_0^1 T_i^{(m)}(\tau_i;\mu,\mu')P_l^m(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{27}$$

また、(19)、(23)を(15)、(16)に代入すると、

$$I_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4\mu}T_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu_0)+\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})\mu}\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')I_2^{(m)}(\tau_1;\mu',\mu_0)d\mu' \tag{28}$$

$$I_2^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4\mu}S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu_0)+\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})\mu}\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')I_1^{(m)}(\tau_1;\mu',\mu_0)d\mu' \tag{29}$$

この$I_1^{(m)}$、$I_2^{(m)}$が多項式の形に表わせるものと仮定して、次のような形に置く。

$$I_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4}\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{1,\ell}^{(m)}A_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0) \tag{30}$$

$$I_2^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4}\frac{\mu_0}{\mu+\mu_0}\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{2,\ell}^{(m)}B_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0) \tag{31}$$

(24)、(25)、(30)および(31)を、(28)および(29)に代入して整理すると、次のようになる。

$$A_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0)=\alpha_{1,\ell}^{(m)}(\mu_0)\,\phi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu)-\alpha_{2,\ell}^{(m)}(\mu_0)\,\psi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu)+\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})}\frac{\varpi_{2,\ell}^{(m)}}{\varpi_{1,\ell}^{(m)}}\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')B_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{32}$$

$$B_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0)=\alpha_{3,\ell}^{(m)}(\mu_0)\,\psi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu)-\alpha_{4,\ell}^{(m)}(\mu_0)\,\phi_\ell^{(m)}(\tau_2;\mu)+\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})}\frac{\varpi_{1,\ell}^{(m)}}{\varpi_{2,\ell}^{(m)}}\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')A_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{33}$$

ただし

$$\alpha_{1,\ell}^{(m)}(\mu_0)=(2-\delta_{0,m})\psi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu_0)+\frac{(-1)^{\ell+m}}{2}\mu_0\int_0^1\varphi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu')\frac{\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{2,\ell}^{(m)}B_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)}{\mu'+\mu_0}d\mu' \quad (34)$$

$$\alpha_{2,\ell}^{(m)}(\mu_0)=(2-\delta_{0,m})\varphi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu_0)+\frac{(-1)^{\ell+m}}{2}\mu_0\int_0^1\psi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu')\frac{\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{2,\ell}^{(m)}B_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)}{\mu'+\mu_0}d\mu' \quad (35)$$

$$\alpha_{3,\ell}^{(m)}(\mu_0)=(2-\delta_{0,m})\psi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+\frac{\mu_0}{2}\int_0^1\psi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu')\frac{\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{1,\ell}^{(m)}A_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)}{\mu'-\mu_0}d\mu' \quad (36)$$

$$\alpha_{4,\ell}^{(m)}(\mu_0)=(2-\delta_{0,m})\varphi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+\frac{\mu_0}{2}\int_0^1\varphi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu')\frac{\sum_{\ell=m}^{N}\varpi_{1,\ell}^{(m)}A_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)}{\mu'-\mu_0}d\mu' \quad (37)$$

ここで、(32)の右辺才３項に(33)を、また、(33)の右辺才３項には(32)を、それぞれ代入すると、(32)の右辺には$B_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)$の代りに$A_\ell^{(m)}(\mu'',\mu_0)$が、他方、(33)の右辺には$A_\ell^{(m)}(\mu',\mu_0)$の代りに$B_\ell^{(m)}(\mu'',\mu_0)$が、それぞれ現われる。そこで再び同じ操作をくり返す。この過程を無限にくり返して行くことを考えると、$A_\ell^{(m)}$、$B_\ell^{(m)}$は次のように表わされるであろう。

$$A_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0)=\alpha_{1,\ell}^{(m)}(\mu_0)\beta_{1,\ell}^{(m)}(\mu)-\alpha_{2,\ell}^{(m)}(\mu_0)\beta_{2,\ell}^{(m)}(\mu)$$
$$+\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})}\frac{\varpi_{2,\ell}^{(m)}}{\varpi_{1,\ell}^{(m)}}\left\{\alpha_{3,\ell}^{(m)}(\mu_0)\beta_{3,\ell}^{(m)}(\mu)-\alpha_{4,\ell}^{(m)}(\mu_0)\beta_{4,\ell}^{(m)}(\mu)\right\} \quad (38)$$

$$B_\ell^{(m)}(\mu,\mu_0)=\frac{1}{2(2-\delta_{0,m})}\frac{\varpi_{1,\ell}^{(m)}}{\varpi_{2,\ell}^{(m)}}\left\{\alpha_{1,\ell}^{(m)}(\mu_0)\gamma_{1,\ell}^{(m)}(\mu)-\alpha_{2,\ell}^{(m)}(\mu_0)\gamma_{2,\ell}^{(m)}(\mu)\right\}$$
$$+\alpha_{3,\ell}^{(m)}(\mu_0)\gamma_{3,\ell}^{(m)}(\mu)-\alpha_{4,\ell}^{(m)}(\mu_0)\gamma_{4,\ell}^{(m)}(\mu) \quad (39)$$

ただし

$$\beta_{1,\ell}^{(m)}(\mu)=\varphi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu)+\frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2}\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')\,\gamma_{1,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{40}$$

$$\beta_{2,\ell}^{(m)}(\mu)=\psi_\ell^{(m)}(\tau_1,\mu)+\frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2}\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')\,\gamma_{2,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{41}$$

$$\beta_{3,\ell}^{(m)}(\mu)=\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')\,\gamma_{3,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{42}$$

$$\beta_{4,\ell}^{(m)}(\mu)=\int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1;\mu,\mu')\,\gamma_{4,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{43}$$

$$\gamma_{1,\ell}^{(m)}(\mu)=\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')\,\beta_{1,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{44}$$

$$\gamma_{2,\ell}^{(m)}(\mu)=\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')\,\beta_{2,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{45}$$

$$\gamma_{3,\ell}^{(m)}(\mu)=\psi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu)+\frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2}\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')\,\beta_{3,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{46}$$

$$\gamma_{4,\ell}^{(m)}(\mu)=\varphi_\ell^{(m)}(\tau_2,\mu)+\frac{1}{4(2-\delta_{0m})^2}\int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2;\mu,\mu')\,\beta_{4,\ell}^{(m)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{47}$$

いま、$S_i^{(m)}$、$T_i^{(m)}$の値は知られているわけであるから、(40)〜(43)と(44)〜(47)を連立積分方程式系として、$\beta_{j\ell}^{(m)}$、$\gamma_{j\ell}^{(m)}$ $(j=1,2,3,4)$を求めることができる。$\beta_{j\ell}^{(m)}$、$\gamma_{j\ell}^{(m)}$が得られると、(34)〜(39)によって、$\alpha_{j\ell}^{(m)}$、$A_\ell^{(m)}$、$B_\ell^{(m)}$は代数的に決定することができる。この$A_\ell^{(m)}$、$B_\ell^{(m)}$を用いて(30)、(31)から$I_1^{(m)}$、$I_2^{(m)}$が得られる。したがって、最終的には、*invariance principle* (15)〜(18)によって、重ね合わせた層に関する、S-およびT-函数が得られることになる。

いま、Legendre 展開の第1項だけをとり、第2項以下を切り捨てることにする。このことは、物理的には等方的散乱を仮定することに対応する。

そうすると、(20)に対応して、

$$P_i(\mu,\phi;\mu_0,\phi_0)=\varpi_i^{(0)}P_0^0(\mu)P_0^0(\mu_0) \qquad (i=1,2) \tag{48}$$

(24)〜(27)に対応して、

$$S_i(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}\varpi_i^{(0)}\{X_i(\mu)X_i(\mu_0)-Y_i(\mu)Y_i(\mu_0)\} \tag{49}$$

$$T_i(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}\varpi_i^{(0)}\{Y_i(\mu)X_i(\mu_0)-X_i(\mu)Y_i(\mu_0)\} \tag{50}$$

$$X_i(\mu)=1+\frac{1}{2}\int_0^1 S_i(\tau_i;\mu,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{51}$$

$$Y_i(\mu)=e^{-\tau_i/\mu}+\frac{1}{2}\int_0^1 T_i(\tau_i;\mu,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{52}$$

この X_i、Y_i は、いわゆる Chandrasekhar の X-および Y-函数である。

(30)、(31)に対応して、

$$I_1(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4}\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}\varpi_1^{(0)}A^{(0)}(\mu,\mu_0) \tag{53}$$

$$I_2(\tau_i;\mu,\mu_0)=\frac{F}{4}\frac{\mu_0}{\mu+\mu_0}\varpi_2^{(0)}B^{(0)}(\mu,\mu_0) \tag{54}$$

(34)～(37)に対応して、

$$\alpha_1^{(0)}(\mu_0)=X_1(\mu_0)+\frac{\varpi_2^{(0)}}{2}\mu_0\int_0^1\frac{Y_1(\mu')}{\mu'+\mu_0}B^{(0)}(\mu',\mu_0)d\mu' \tag{55}$$

$$\alpha_2^{(0)}(\mu_0)=Y_1(\mu_0)+\frac{\varpi_2^{(0)}}{2}\mu_0\int_0^1\frac{X_1(\mu')}{\mu'+\mu_0}B^{(0)}(\mu',\mu_0)d\mu' \tag{56}$$

$$\alpha_3^{(0)}(\mu_0)=X_2(\mu_0)\cdot e^{-\tau_1/\mu_0}+\frac{\varpi_1^{(0)}}{2}\mu_0\int_0^1\frac{X_2(\mu')}{\mu'-\mu_0}A^{(0)}(\mu',\mu_0)d\mu' \tag{57}$$

$$\alpha_4^{(0)}(\mu_0)=Y_2(\mu_0)e^{-\tau_1/\mu_0}+\frac{\varpi_1^{(0)}}{2}\mu_0\int_0^1\frac{Y_2(\mu')}{\mu'-\mu_0}A^{(0)}(\mu',\mu_0)d\mu' \tag{58}$$

(38)、(39)に対応して、

$$A^{(0)}(\mu,\mu_0)=\alpha_1^{(0)}(\mu_0)\beta_1^{(0)}(\mu)-\alpha_2^{(0)}(\mu_0)\beta_2^{(0)}(\mu)+\frac{1}{2}\frac{\varpi_2^{(0)}}{\varpi_1^{(0)}}\left\{\alpha_3^{(0)}(\mu_0)\beta_3^{(0)}(\mu)-\alpha_4^{(0)}(\mu_0)\beta_4^{(0)}(\mu)\right\} \tag{59}$$

$$B^{(0)}(\mu,\mu_0)=\frac{1}{2}\frac{\varpi_1^{(0)}}{\varpi_2^{(0)}}\left\{\alpha_1^{(0)}(\mu_0)\gamma_1^{(0)}(\mu)-\alpha_2^{(0)}(\mu_0)\gamma_2^{(0)}(\mu)\right\}+\alpha_3^{(0)}(\mu_0)\gamma_3^{(0)}(\mu)-\alpha_4^{(0)}(\mu_0)\gamma_4^{(0)}(\mu) \tag{60}$$

(40)～(47)に対応して、

$$\beta_1^{(0)}(\mu)=Y_1(\mu)+\frac{1}{4}\int_0^1 S_1(\tau_1;\mu,\mu')\gamma_1^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{61}$$

$$\beta_2^{(0)}(\mu)=X_1(\mu)+\frac{1}{4}\int_0^1 S_1(\tau_1;\mu,\mu')\gamma_2^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{62}$$

$$\beta_3^{(0)}(\mu)=\frac{1}{4}\int_0^1 S_1(\tau_1;\mu,\mu')\gamma_3^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{63}$$

$$\beta_4^{(0)}(\mu)=\frac{1}{4}\int_0^1 S_1(\tau_1;\mu,\mu')\gamma_4^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{64}$$

$$\gamma_1^{(0)}(\mu)=\frac{1}{4}\int_0^1 S_2(\tau_2;\mu,\mu')\beta_1^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{65}$$

$$\gamma_2^{(0)}(\mu)=\frac{1}{4}\int_0^1 S_2(\tau_2;\mu,\mu')\beta_2^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{66}$$

$$\gamma_3^{(0)}(\mu)=X_2(\mu)+\frac{1}{4}\int_0^1 S_2(\tau_2;\mu,\mu')\beta_3^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{67}$$

$$\gamma_4^{(0)}(\mu)=Y_2(\mu)+\frac{1}{4}\int_0^1 S_2(\tau_2;\mu,\mu')\beta_4^{(0)}(\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{68}$$

このような簡単な形の積分方程式系を、数値的に解くことは容易である。

参考文献

(1) F.M. Hawkins, Ap. J., 134, 28, 1961.

(2) H.C. van de Hulst; NASA Institute for Space Studies Report, New York, 1963.

(3) J.E. Hansen, Radiative Transfer by Doubling Very Thin Layers, to appear in Ap. J.

(4) W.M. Irvine, Multiple Scattering by Large Particles, II. Optically Thick Layers, to appear.

(5) M. Matsumoto, Private communication, 1967.

(6) S.D. Gutshabash, Vestnik Leningradsk Univ., 12, 1, 158, 1957.

(7) S. Chandrasekhar, Radiative Transfer, 1950.