数理解析研究所講究録
第 70 巻 1969 年 67-80

β面上におけるCouette流の順圧不安定

京大 理（地球物理） 岩嶋 樹也

§1 序

地球大気の大規模な運動に対してはCoriolis 力が大きな影響を与え，波長数千km以上の波動擾乱に対してはCoriolis parameter f *) の緯度変化 β *) が支配的であることが知られている。そのような大気の大規模波動を論ずるのに，多くの場合 β を一定として議論をする（β 面近似と称される）。また東西流の南北方向のshearによる不安定は順圧不安定（barotropic instability）と称され，鉛直shearによるものは南北方向の温度傾度に関係しており傾圧不安定（baroclinic instability）と呼ばれている。

ところで，f や β を考えない，いわゆる流体力学におけるCouette 流の線型安定性の問題については古くから論じられ，層流非粘性流体では全波長擾乱に対して安定であると結論さ

*) $f = 2\Omega\sin\varphi$　$\beta = \frac{2\Omega\cos\varphi}{R}$　Ω：地球自転角速度，φ：緯度，R：地球半径

れている。これに対して，β面上のCouette流型速度分布東西流の順圧安定性について，「どんな速度shearに対しても臨界波長が存在して，その波長以下では安定解，不安定解いずれも存在しない」ことがGambo (1950, 1951) により示されている。ここでは，そのようなtrivialな解以外に存在しえないことが文字通りすべての波動解が存在しえぬことかどうかを検討する。

§2 基本方程式と境界条件

われわれの対象としている大気中には，時間的にも空間的にも種々様々な規模の擾乱が存在している。ここでは，地球を一周する東西方向に一様な流れを基本流として数千kmあるいはそれ以上の規模の擾乱について考える。順圧大気（等圧面と等密度面が平行）中の二次元（水平面）運動であり，さらに非発散と仮定して，摂動法を用いれば，相対渦度 ζ（$=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$）に対する摂動渦度方程式：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta v = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

をえる。ただし，座標：x（東向き），y（北向き）ととりそれぞれの摂動速度成分を u, v，基本流を $\bar{U}=\bar{U}(y)$ とする。流れ関数で示せば

$$\psi(x,y,t)=\varphi(y)\exp\{i\alpha(x-ct)\} \quad \cdots (2)$$

(2), (1) より　$(U-C)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\alpha^2\varphi\right)+\beta\varphi=0$　(3)

基本流 U の速度 profile は図 1 に示されるように

$$U(y)=\gamma y+U_0 \qquad (\gamma\equiv \partial U/\partial y\ ,\ U_0 : y=0\text{ における }U)$$

境界条件は $y=y_1$, $y=y_2$ の rigid wall に垂直な速度成分 $v\left(=\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ が 0 として

$$\varphi(y_1)=\varphi(y_2)=0 \qquad (4)$$

ここで次のような変数変換を行なう。

$$y\to\quad \xi=\frac{2\alpha}{\gamma}(U-C) \qquad (5)$$

$$\varphi(y)\to\quad \Psi(\xi)=\varphi(y)e^{\xi/2} \qquad (6)$$

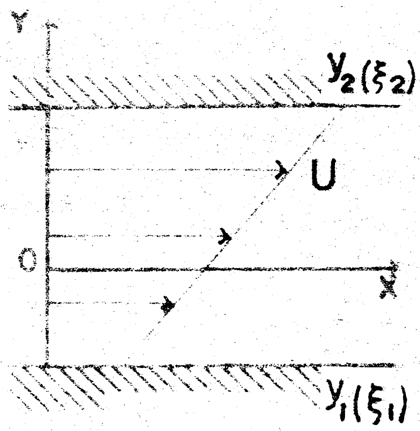


Fig. 1

このとき方程式（1）は合流型超幾何方程式（confluent hypergeometric eq.）

$$\xi\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}-\xi\frac{d\Psi}{d\xi}+\Gamma\Psi=0 \qquad (7)$$

ここで　$\Gamma=\frac{\beta}{2\alpha\gamma}$　(8)

§3　波動解の存在（安定性基準）

前節でえた方程式（7）の一般解として

$$\Psi(\xi)=A\,\Psi_1(\xi)+B\,\Psi_2(\xi) \qquad (9)$$

がえられる。ただし $\Psi_1(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$ は

$$\Psi_1(\xi)=\frac{\sin\pi a}{\pi}\Big[a\xi M(1+a,2,\xi)\Big\{\ln\xi+\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\Big\}+1+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(n-1)!\,n!}\xi^n\Big] \qquad (10)$$

$$\Psi_2(\xi) = \xi M(1+a, 2, \xi) \tag{11}$$

$$a = -\gamma \qquad \Gamma : \text{gamma 関数}$$

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a+\nu} - \frac{1}{1+\nu}\right) + \frac{1}{n}$$

$$M(a, b, c) = 1 + \frac{a}{1\cdot b}\xi + \frac{a(a+1)}{2!\,b(b+1)}\xi^2 + \cdots\cdots$$

また境界条件(4)より

$$\Psi(\xi_1) = \Psi(\xi_2) = 0 \tag{12}$$

従って(9)から

$$\left.\begin{aligned} A\Psi_1(\xi_1) + B\Psi_2(\xi_1) = 0 \\ A\Psi_1(\xi_2) + B\Psi_2(\xi_2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

non-trivialな解($A=0$かつ$B=0$でない)が存在するには

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(\xi_1) & \Psi_2(\xi_1) \\ \Psi_1(\xi_2) & \Psi_2(\xi_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

すなわち

$$\frac{\Psi_1(\xi_1)}{\Psi_2(\xi_2)} = \frac{\Psi(\xi_2)}{\Psi(\xi_2)} \tag{15}$$

が満足されねばならない。

Gambo(1950)は(16)式から、次のような関数

$$F(\xi) \equiv \frac{\Psi_1(\xi)}{\Psi_2(\xi)} \tag{16}$$

の振舞を解析的に調べることによって次のような結論をえた。

(1) $\gamma > 1$ のときには、$\Psi_1(\xi)$が"pseudo periodic"な振舞をし、$\Psi_2(\xi)$が単調関数であることから、$F(\xi_1) = F(\xi_2)$ を満足する二つ以上の実数ξ_1, ξ_2がえられる。すなわち安定(stable)である。

(ii) $1 > \gamma > 0$ のとき，$\Psi_1(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$ 両方とも 単調関数になり (15) を満たす実数 ξ が存在しない。すなわち安定解は存在しない。

Gambo (1950) は $\gamma > 0$, $\xi > 0$ の場合のみを取扱った。そこで筆者は，Gambo と同様に $\Psi_1(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$ の振舞を調べ，$\gamma < 0$, $\xi \leqq 0$ のときについて 次の結論をえた (Erdélyi, et al. : 1953)。

(iii) $\xi < 0$ かつ $\gamma > 0$ のとき (すなわち (5), (8) から $U - c < 0$) (16) を満足する解 ξ は存在しない。

(iv) $\xi > 0$ かつ $\gamma < 0$ のとき (i.e. $U - c < 0$) にも (16) を満足する実数 ξ は存在しない。

(v) $\xi < 0$ かつ $-2 < \gamma < 0$ のときも実数解 ξ はない。

(vi) $\xi < 0$ かつ $\gamma \leqq -2$ ならば実数解 ξ が存在する。

(vii) $\xi = 0$ かつ $\gamma < -1$ のときには実数解 ξ が存在する。

以上の結果をまとめれば「安定解が存在するためには $U_{Min} - c \geqq 0$ でなければならない。さらに $|\gamma| > 1$ でなければならぬ。(ただし，$U_{Min} - c > 0$ のときには，$\gamma > 1$ or $\gamma < -2$) (図2参照)。

---

*) 筆者の調べたところでは，$\Psi_2(\xi)$ は $\gamma > 1$ の場合，Gambo のいうように単調関数ではなく，"pseudo-periodic" な振舞をする。しかし結論としては変わらない。

Gambo (1950) は，図2の斜線より上（$\gamma > 0$ の領域）の領域を"unstable"としたが，後の論文(1951)において，次節で述べるRayleigh法により，実数解のみならず複素解もnon-trivialなものは存在しないことを述べ，通常用いられる意味の"unstable"（$c_i \neq 0$）とは異なるとした。

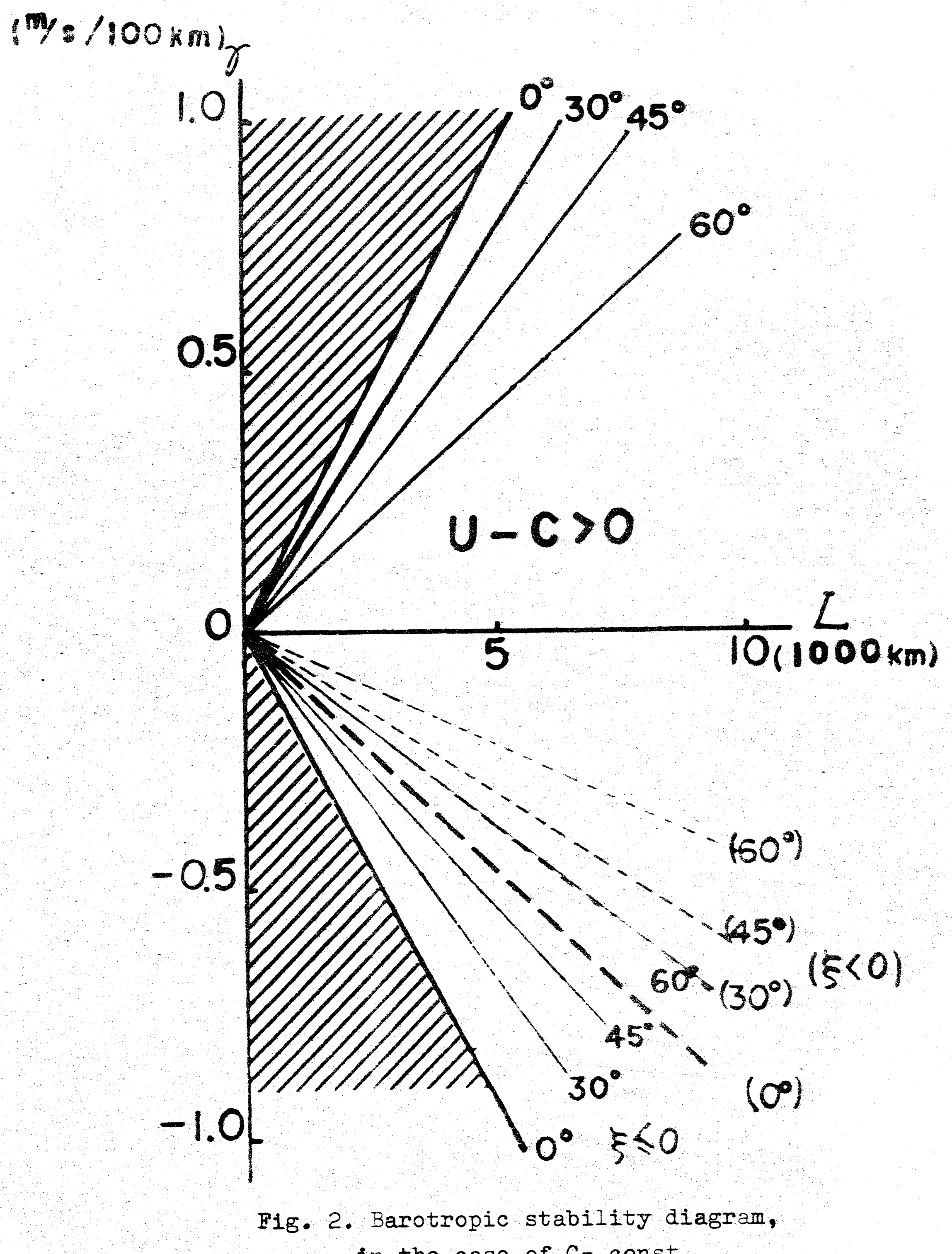


Fig. 2. Barotropic stability diagram,
in the case of C= const.
(γ>o : after Gambo)

§4 Rayleigh法による安定性の考察

実数解cが存在する場合を安定とし，存在しない場合を不安定とした。実数解が存在しない場合に複素解が存在し得るかどうかは示されていない。それが次のRayleigh法によって調べられる。

（3）式を

$$\varphi'' - \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{U-c}\right)\varphi = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

とし，　$c = c_r + ic_i$　，　$\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$　，($c_r, c_i; \varphi_r, \varphi_i$ は real）と考える。（16）の両辺にφに共役なφ^*を乗じ，y_1からy_2まで積分すれば，次式：

$$\left[\varphi^*\varphi' - \varphi^{*\prime}\varphi\right]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2}\left\{|\varphi'|^2 + \alpha^2|\varphi|^2 - \frac{\beta|\varphi|^2}{U-c}\right\}dy = 0 \cdots (17)$$

がえられる。ここで境界条件（4）（および $\varphi^*(y_1) = \varphi^*(y_2) = 0$）を使い，さらに実数部分と虚数部分に分ければ

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{|\varphi'|^2 + \alpha^2|\varphi|^2 - \frac{(U-c_r)\beta}{|U-c|^2}|\varphi|^2\right\}dy = 0 \qquad (18)$$

$$c_i\int_{y_1}^{y_2}\frac{\beta}{|U-c|^2}|\varphi|^2 dy = 0 \qquad (19)$$

従って，（19）から明らかなように，$c_i \neq 0$ の non-trivial な解は存在しえない。すなわち，§3でえられた実数解の存在しない領域は複素解も存在しないことがわかる。また（18）式から　最大のU（U_{max}）より大きい位相速度c_r（$U_{max} - c_r < 0$）の解は trivial なもの以外に存在しないことも知られる。

§5 位相速度 $c=c(y)$ のときの波動解の存在性

図2の斜線より上（$\gamma>0$）あるいは下（$\gamma<0$）の領域ではtrivialな解のみしか存在しえぬことが示されたが、これは文字通り「あらゆる擾乱が存在しえぬ」という意味でなく、位相速度c一定の（2）の形をした擾乱が存在しえぬことである。事実天気図からの調和解析によって求められた位相速度が南北変化している形跡がみられる。そこで、位相速度が南北変化ししている場合にも解がえられぬ場合があり得るか検討する。

$c=c(y)$ のときには方程式（3）に相当するものとして

$$i\alpha(\bar{U}-c)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\left\{2\alpha\frac{\partial c}{\partial y}t(\bar{U}-c)-2i\alpha c\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$+\left[i\alpha\{i\alpha t(c-\bar{U})-1\}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-\{2\alpha^2 t-i\alpha^3t^2(c-\bar{U})\}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2+i\alpha^3(c-\bar{U})\right.$$
$$\left.+\left(\beta-\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}\right)\right]\varphi=0 \qquad (20)$$

がえられ、簡単な場合として

$$\bar{U}-c=\varpi\ (\text{一定}) \qquad (21)$$

とすれば、（20）は、$t=t_0$ の瞬間には

$$\varpi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\gamma(1+i\alpha\varpi t_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\{\alpha^2\varpi(1+\gamma^2t_0^2)-\beta-2i\alpha\gamma t_0\}\varphi=0 \qquad (22)$$

となる。これに境界条件（4）を考慮して、振動数方程式を求めて、ϖについて解けば

$$\varpi=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma^2\{\alpha^2+n^2\pi^2/(y_2-y_1)^2\}}}{2\{\alpha^2+n^2\pi^2/(y_2-y_1)^2\}} \qquad (23)$$

ただし、nは正整数。

（22）式から図3に示されているようなStability diagram

がえられる。$n=0$, $n\neq 0$ （nは節の数を示す）それぞれの場合の流れ関数φは、

$$n=0 \text{ のとき：} \quad \varphi(y)=(Ay+B)\exp\{\gamma(\tfrac{1}{2\nu}+i\alpha t_0)y\} \qquad (23)$$

$$n\neq 0 \text{ のとき：} \quad \varphi(y)=(Ae^{i\frac{n\pi}{y_2-y_1}y}+Be^{-i\frac{n\pi}{y_2-y_1}y})\exp\{\gamma(\tfrac{1}{2\nu}+i\alpha t_0)y\} \qquad (24)$$

（ただし A, B：定数）

(23)から、$n=0$の基本モード流れ関数φはtrivialな解以外(4)の境界条件を満足しえないことが知られる。$n\neq 0$の、基本モード以外の解は境界条件を満足する。すなわち図3に示される臨界曲線より上の領域は不安定波動解が存在する部分である。$n=1, 2$の場合が図4に示されている。

以上から、次の結論がえられる。

① $C=\gamma y+\text{const.}$ の場合には、基本モードの解は存在しないが、高いモードの解は全波長擾乱に対して存在し

$$\gamma^2 \gtrless \frac{\beta^2}{4\{\alpha^2+n^2\pi^2/(y_2-y_1)^2\}} \quad \begin{matrix}\text{：不安定}\\ \text{：安定}\end{matrix}$$

によって安定性が判定される。

② 臨界shearが存在して、それより大きな($\gamma>0$)、あるいは小さな($\gamma<0$) shearの基本流はすべての波長擾乱に対して不安定になる。

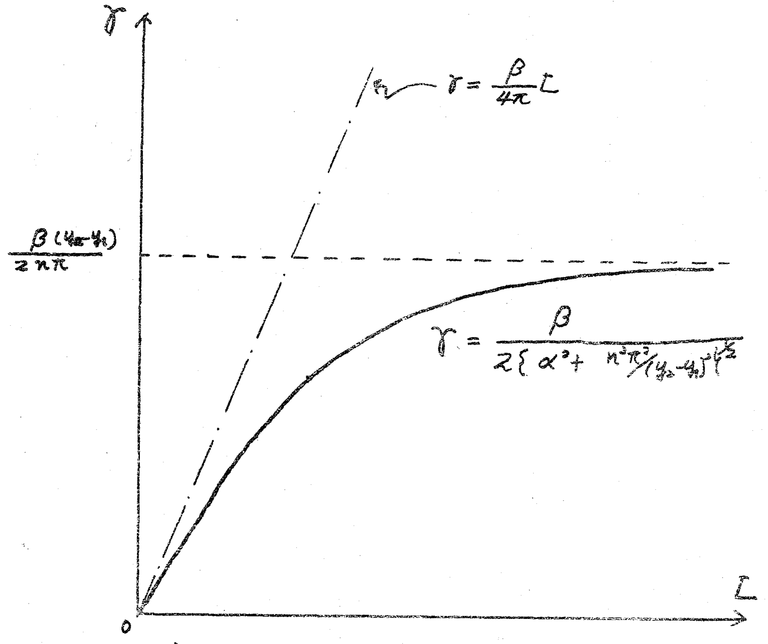
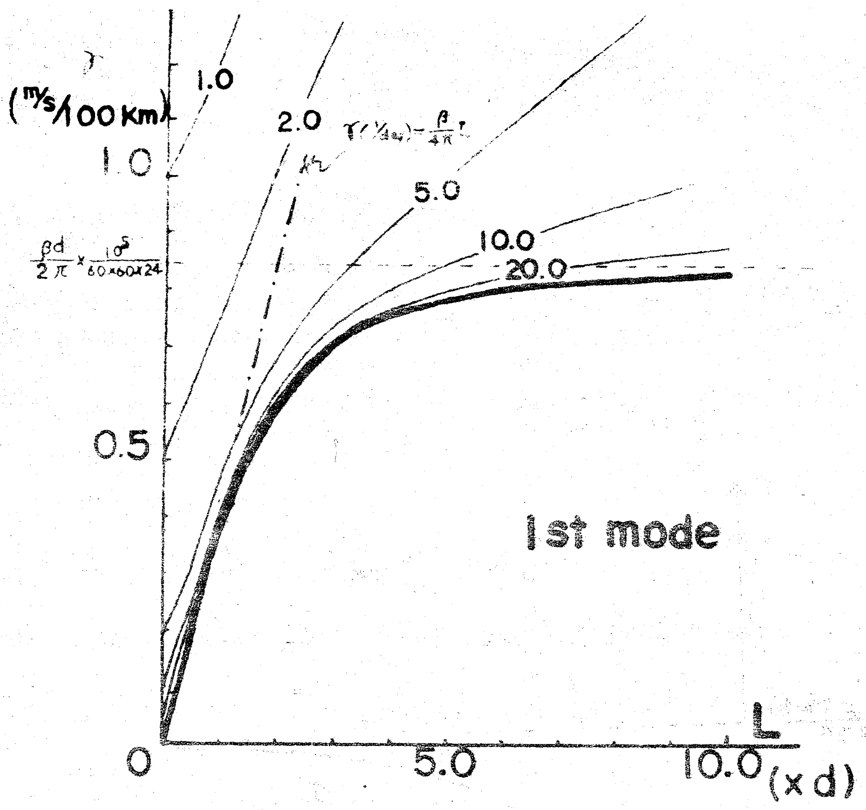
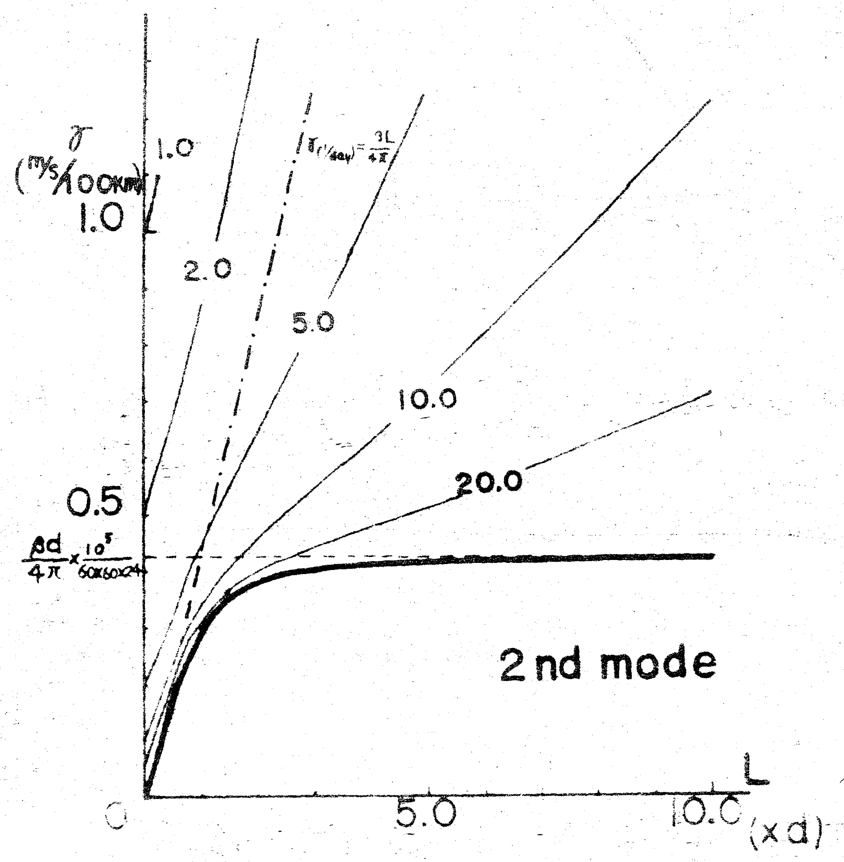

γ
$\gamma = \frac{\beta}{4\pi} L$
$\frac{\beta (y_2 - y_1)}{2 n \pi}$
$\gamma = \frac{\beta}{2\{\alpha^2 + n^2\pi^2/(y_2-y_1)^2\}^{1/2}}$
0
L

Fig. 3



γ
(m/s/100 km)
1.0
0.5
0
$\frac{\beta d}{2\pi} \times \frac{10^5}{60\times60\times24}$
1.0
2.0
5.0
10.0
20.0
1st mode
L
5.0
10.0 (x d)



γ
(m/s/100 km)
1.0
0.5
0
$\frac{\beta d}{4\pi} \times \frac{10^5}{60\times60\times24}$
1.0
2.0
5.0
10.0
20.0
γ(1/day) = $\frac{3L}{4\pi}$
2nd mode
L
5.0
10.0 (x d)

§5 結 語

β面上のCouette流は，位相速度c一定とする従来の取扱いでは，臨界波長以上の擾乱に対しては安定，それ以下の波長ではtrivialな波動解しかえられなかった。つまり，モデルに近い状態ならば，臨界波長以下の擾乱は存在しない。しかし，実際の天気図上の解析からは，位相速度が南北方向に変化しているようであり（解析数が少なく，筆者の観点から取扱ったものはないけれども），擾乱の波長は下限あるとは考えにくい。以上の点から，位相速度が南北に変化する簡単な場合として，　U－c＝一定　の場合を考察した。その結果，基本モードの擾乱は存在しえぬが高いモードの擾乱は全波長に対して存在することがわかった。

基本モードの擾乱が存在しえぬことは，位相速度一定の場合よりも何か制限が厳しくなったのかもしれぬが，高いモードでは波長制限が取り除かれた。まだ検討を要する点も多く実際の天気図の解析で確かめる（境界条件など，モデルにあう場合はそう多くないであろうし，むずかしいが）必要もある。さらに続けて検討したい。

Gambo,K.,1950: The criteria for stability of westerlies.
Geophysical Notes vol.3,no.29. Tokyo Univ.

Gambo,K.,1951: On the stability of the westerlies in a baroclinic atmosphere.
Geophysical Notes vol.4,no.7. Tokyo Univ.

Green,J.S.A.,1960: A problem in baroclinic stability.
Quart.J.R.Met.Soc.,86,237-251.

Erdelyi,A.,W.Magnus,F.Oberhettinger and F.Tricomi,1953:
Higher Transcendental Functions. Vol. I,
McGraw-Hill, New York.