数理解析研究所講究録
第70巻 1969年 123-140



# Boussinesq 流体の非定常回転運動について

京大 工学部 桜井健郎

## §1. 序

容器と共に剛体回転をする流体が容器の回転速度の変化に対してどのように応答するかを調べる問題を回転減衰の問題と言い、流体が新しい回転状態に適応する時間を回転減衰時間と言う。後に示すように回転減衰には流体全体にわたる非定常な非粘性子午面流れが重要な役割りを果すので、狭義には非粘性子午面流れによる応答を調べるのが回転減衰の問題であり、その持続時間が回転減衰時間である[1]。こゝでも狭義の定義に則る事にする。

最近、層状流体の回転減衰問題が流体力学者及び天文学者にとって大きな問題になっている。

天文学からの動機としては、"太陽の内部はその表面よりも早く回転しているであろう"というDickeの仮説が考えられる[2]。この仮説は水星の近日点の移動の微妙な誤差に関係し

、従って、一般相対性理論の精度にまで関わる重要なものである。Howard その他は縮まない非定常回転流れの知識を用いて太陽内での回転減衰時間が$10^5 \sim 10^7$年である事を指摘し、Dicke の仮説を批判した[3]。之に対し、DickeはBoussinesq流体の非定常回転流れに関するPedlosky の結果（それが誤りである事を証明するのが本篇の目的である。）及び層状流体の定常流れの知識を用いてHoward らに反論を加えている[4]。この論争は現在進行中であるが、それが解決されれば一般相対性理論の精度についての見解を拡めることができるだけでなく、太陽の現在の回転状態の解明にも役立つ事が期待される。

流体力学からの動機としては、基本的な問題として当然のことの他に、Holton 及びPedlosky の論争に終止符を打つという事が考えられる。Holtonは円柱容器に入れられた層状流体の回転減衰の問題を取り扱い、縮まない流体の場合とよく似た、しかし完全に同じではない回転減衰が存在する事を理論的及び実験的に示した[5]。PedloskyはHoltonの取り扱いに不下りな点のある事を指摘し、Holtonの問題を正しい境界條件について定式化し直した[6]。しかし、Pedloskyは、自身で定式化した問題を”とても解けない”という理由で一般的に解くことは全く行っていない。特に、側壁が断熱の場合、PedloskyはHoltonの言うような回転減衰が存在しない事を主張してい

るが、そしてそれがDickeの議論に使われているが、その主張には自己矛盾のある事がHoltonその他によって示されている[7]。他方、Holtonらも、自身で指摘した自己矛盾をどのように解決するかについては何の努力もしていない（世は正に無責任時代である）。英国の流体力学雑誌"Journal of Fluid Mechanics"の一Refereeに言わせるなら、"側壁が断熱の場合の回転減衰の問題は、この種の問題の中では最も難しいものの一つ"である。

最近筆者は天文学からの動機に刺戟されて、Holton及びPedloskyとは独立に、側壁の温度が与えられた円柱容器内の層状流体の回転減衰問題を論じ、Pedloskyと全く同様な定式化とHoltonの結果と同様な結果を得ている[8]。その方法は側壁が断熱の場合にも直ちに拡張され、Holton及びPedloskyの不一致に終止符を打つ事が期待される。こゝには上記の理由に基いて次の問題を考える：熱伝導性の縮む粘性流体が鉛直な対称軸のまわりに一定の角速度で一様に回転する直円柱容器に入れられ、容器と共に剛体回転を行なっている。容器の上底の温度は下底の温度よりも高く側壁は断熱に保たれ、流体は安定な温度分布に従っている。このような状態の下で、容器の熱的状態をそのまゝにして角速度を突然一定値だけ変化させた場合、狭義の回転減衰は起るであろうか[9]。

## §2. 基礎方程式

熱伝導性の縮む粘性流体の軸対称運動は、Boussinesq近似を用い、鉛直な対称軸のまわりに角速度$\Omega$で回転する座標系での円柱座標を用いると次のようになる：

$$\partial q_r/\partial t - 2q_\theta = -\partial p/\partial r + E\mathcal{L}q_r, \qquad (1)$$

$$\partial q_\theta/\partial t + 2q_r = E\mathcal{L}q_\theta, \qquad (2)$$

$$\partial q_z/\partial t = -\partial p/\partial z + E\Delta q_z + T, \qquad (3)$$

$$\sigma(\partial T/\partial t + S q_z) = E\Delta T, \qquad (4)$$

$$0 = (1/r)\partial(rq_r)/\partial r + \partial q_z/\partial z, \qquad (5)$$

$$E = \nu/(L^2\Omega), \quad S = \alpha g(\overline{T}_1 - \overline{T}_0)/(L\Omega^2), \quad \sigma = \nu/\kappa, \qquad (6)$$

$$\mathcal{L} = \Delta - (1/r^2), \quad \Delta = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2, \qquad (7)$$

但し

$$(\overline{r}, \theta, \overline{z}) = (Lr, \theta, Lz), \quad \overline{t} = t/\Omega, \qquad (8)$$

$$\overline{q} = \varepsilon\Omega L q, \quad \overline{p} = \overline{p}_s + \varepsilon\Omega^2 L^2 \overline{\rho}_s p, \quad \overline{T} = \overline{T}_s + \varepsilon L\Omega^2 T/(\alpha g), \qquad (9)$$

$$\overline{\rho}_s = \overline{\rho}_0\left\{1 - \frac{\alpha(\overline{T}_1 - \overline{T}_0)\overline{z}}{L}\right\}, \quad \overline{p}_s = \overline{p}_0 - \int_0^{\overline{z}} g\overline{\rho}_s d\overline{z}, \quad \overline{T}_s = \overline{T}_0 + \frac{\overline{T}_1 - \overline{T}_0}{L}\overline{z}. \qquad (10)$$

こゝに$(q_r, q_\theta, q_z)$, $p$, $\rho$, $T$, $(r, \theta, z)$, $t$, $\nu$, $\kappa$, $\alpha$, $g$, $L$及び$\varepsilon$は夫々速度，圧力，密度，温度，位置ベクトル，時間，動粘性係数，熱伝導係数，熱膨脹係数，重力の加速度，円柱の高さ及び回転平衡からの微少なずれを表わすパラメータで、また、添字$s$，1及び0及び文字の上の横棒は夫々回転平衡状態、上底及び下底及び次元を持つ物理量に対応する。上の線型

の基礎方程式をBoussinesq近似の式から導くに当ってはε及び$L\Omega^2/g$の程度の大きさの項を無視している。本篇に於てはEは1に比べて非常に小さいが、S及びσは1の程度である。それ故、Barcilon及びPedloskyの定常流的分類によると、狭義の回転減衰の起らない層状度の強い場合に相当する[10]。

子午面流れの流れ函数を導入すると次の結果を得る：

$$E\tilde{\mathcal{L}}\left\{E^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{L}}-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\right\}\tilde{\psi}+2\,\partial\tilde{q}_\theta/\partial\tilde{z}=\partial\tilde{T}/\partial\tilde{r}, \qquad (11)$$

$$\left\{E^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{L}}-\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\right\}\tilde{q}_\theta-2\,\partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{z}=0, \qquad (12)$$

$$\left\{E^{\frac{1}{2}}\tilde{\Delta}-\sigma\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\right\}\tilde{T}+\frac{\sigma S}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}(\tilde{r}\tilde{\psi})=0, \qquad (13)$$

但し

$$q_r=\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad q_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi), \qquad (14)$$

$$\left.\begin{array}{lll} r=\tilde{r}, & z=\tilde{z}, & t=E^{-\frac{1}{2}}\tilde{t}, \\ \psi=E^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, & q_\theta=\tilde{q}_\theta, & T=\tilde{T}. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

縮まない流体に対する回転減衰時間は$\sqrt{L^2/(\nu\Omega)}$で、(8)式の無次元時間によると$E^{-\frac{1}{2}}$になる。(15)の変換は我々が縮まない回転減衰時間の間に起る事柄だけに着目している事を示している。この変換式からは、また、その時間内では縮まない場合と同じ程度の大きさの子午面流れが生じ、それが角速度分布に影響を与える事がわかる。

我々の問題の初期及び境界条件は次のようになる：

$\tilde{t}\le 0$, 流体全体について　$\tilde{\psi}=\tilde{q}_\theta=\tilde{T}=0$,　　(16)

$$\tilde{t}>0,\quad \begin{cases} \text{上底}(\tilde{z}=1)\text{及び下底}(\tilde{z}=0)\text{で} \\ \qquad \tilde{\psi}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{z}}=\tilde{T}=0,\qquad \tilde{q}_\theta=\omega\tilde{r}, \qquad (17) \\ \text{側壁}(\tilde{r}=r_0)\text{で} \\ \qquad \tilde{\psi}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{r}}=0,\qquad \tilde{q}_\theta=\omega r_0. \qquad (18) \end{cases}$$

今後、簡単の為文字の上の～は省略する。

## §3. 円柱の半径が無限大になった場合の相似解

円柱の半径が無限大になった場合、次のような相似解が存在する：

$$\psi=r\phi(z,t),\quad q_\theta=rV(\theta,t),\quad T=T(z,t), \qquad (19)$$

$$E\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{E^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\phi+2\frac{\partial V}{\partial z}=0, \qquad (20)$$

$$\left\{E^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right\}V-2\frac{\partial\phi}{\partial z}=0, \qquad (21)$$

$$\left\{E^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right\}T+2\sigma S\phi=0. \qquad (22)$$

方程式(20)及び(21)は縮まない場合の式そのものである。唯今の場合、層状の度合$S$或は熱伝導性の度合$\sigma$の如何によらず回転減衰は縮まない場合と全く同様に起る。一般の$r_0$についての解を求める際に留意しなければならないのは、この相似解が有限な$r_0$に対する解から孤立したものではなく、$r_0$を大きくした場合の極限として存在し得るという事である。回転減衰の非存在を示すPedloskyの解は明らかにこの條件を満していない[6]。この相似解からのもう一つの重要な事柄は、方程式(22)から解るように、熱境界層の厚さが$E^{\frac{1}{4}}$という事

である。子午面流れは流体粒子の角運動量だけでなく、熱量をも輸送し、内部の非粘性域の温度を変化させる。非粘性域の温度と壁の温度とを調和させるのがこの温度境界層なのである。水平な壁面に厚さ$E^{\frac{1}{4}}$の境界層が表われるのは非定常な回転減衰に特徴的な事柄で、定常流れに於ては全く見られていない。

上から、側壁に於ても厚み$E^{\frac{1}{2}}$と$E^{\frac{1}{4}}$の境界層が共存する事が予想できる。たゞ、水平面での厚さ$E^{\frac{1}{2}}$の境界層に於ては地衡風作用によって角速度と子午面流れとが双互に作用し合うが、側壁での厚さ$E^{\frac{1}{2}}$の境界層に於ては浮力の作用に対応して温度分布と子午面流れとが双互に作用し合う点が異なっている。それ故、容器の角速度はそのまゝにして側壁の温度分布を変化させる"熱的回転変動"も興味ある可能性の一つに数えられる。それについては別の機会に述べるであろう。

§4.　円柱の半径が有限の場合の解

内部の非粘性域に於て全ての量を次のように展開する：

$$q(r,\theta,z)=q^{(0)}(r,\theta,z)+E^{\frac{1}{4}}q^{(1)}(r,\theta,z)+E^{\frac{1}{2}}q^{(2)}(r,\theta,z)+\cdots \quad (23)$$

この展開に於て、各近似（$q^{(0)}$, $q^{(1)}$等）は全て1の程度の大きさを有する。これが成り立つかどうかが我々の解の妥当性を確める際の目安である。これと同様な事柄は今後の全ての展

開式にあてはまる。

水平境界層に於て全ての量を次のように展開する：

$$
\begin{aligned}
q(r,\theta,z) = {} & q^{(0)}(r,\theta,z) + E^{\frac{1}{4}} q^{(1)}(r,\theta,z) + E^{\frac{1}{2}} q^{(2)}(r,\theta,z) + \cdots \\
& + \hat{q}_j^{(0)}(r,\theta,\zeta_j) + E^{\frac{1}{4}} \hat{q}_j^{(1)}(r,\theta,\zeta_j) + E^{\frac{1}{2}} \hat{q}_j^{(2)}(r,\theta,\zeta_j) + \cdots \\
& + \hat{\hat{q}}_j^{(0)}(r,\theta,\eta_j) + E^{\frac{1}{4}} \hat{\hat{q}}_j^{(1)}(r,\theta,\eta_j) + E^{\frac{1}{2}} \hat{\hat{q}}_j^{(2)}(r,\theta,\eta_j) + \cdots, \qquad (24)
\end{aligned}
$$

但し

$$z = j + (-1)^j E^{\frac{1}{4}} \zeta_j, \qquad j = 0, 1 \qquad (25)$$

$$z = j + (-1)^j E^{\frac{1}{2}} \eta_j, \qquad j = 0, 1 \qquad (26)$$

こゝに ^ 及び $\hat{\hat{}}$ のついた量は壁近くでの境界層の存在による非粘性解に対する補正項を表わし、夫々厚み $E^{\frac{1}{4}}$ 及び $E^{\frac{1}{2}}$ の層からの寄与に対応する。境界層は壁近くに局在する故、これらの補正項は各層の外縁（$\zeta_j$ 或は $\eta_j \to \infty$）で 0 にならねばならない。

同様の展開が側壁境界層に於て適用される：

$$
\begin{aligned}
q(r,\theta,z) = {} & q^{(0)}(r,\theta,z) + E^{\frac{1}{4}} q^{(1)}(r,\theta,z) + E^{\frac{1}{2}} q^{(2)}(r,\theta,z) + \cdots \\
& + \bar{q}^{(0)}(\alpha,\theta,z) + E^{\frac{1}{4}} \bar{q}^{(1)}(\alpha,\theta,z) + E^{\frac{1}{2}} \bar{q}^{(2)}(\alpha,\theta,z) + \cdots \\
& + \bar{\bar{q}}^{(0)}(\beta,\theta,z) + E^{\frac{1}{4}} \bar{\bar{q}}^{(1)}(\beta,\theta,z) + E^{\frac{1}{2}} \bar{\bar{q}}^{(2)}(\beta,\theta,z) + \cdots, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$r = r_0 - E^{\frac{1}{4}} \alpha, \qquad (28)$$

$$r = r_0 - E^{\frac{1}{2}} \beta. \qquad (29)$$

これらの境界層の他に水平境界層と側壁境界層とが重なり合う隅の領域が存在し、縮まない流れの模様モードの類推か

ら、非粘性域に対して影響を及ぼす可能性が考えられる[11]。しかし、唯今の場合、そのような影響はない（そのことの証明は別の機会に発表する）。

(23)から(29)までを(11)から(13)までに代入すると第零近似の式として次の諸式を得る（簡単の為明らかに零になる量は省略してある）。

非粘性域の内部で：

$$2\frac{\partial q_\theta^{(0)}}{\partial z}-\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}=0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial q_\theta^{(0)}}{\partial t}+2\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}=0, \tag{31}$$

$$\sigma\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}-\frac{\sigma S}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\psi^{(0)}\right)=0, \tag{32}$$

水平境界層の内部で：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{T}_j^{(0)}=0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^4 \hat{\psi}_j^{(0)}}{\partial \eta_j^4}+2(-1)^j\frac{\partial \hat{q}_{\theta j}^{(0)}}{\partial \eta_j}=0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{q}_{\theta j}^{(0)}}{\partial \eta_j^2}-2(-1)^j\frac{\partial \hat{\psi}_j^{(0)}}{\partial \eta_j}=0, \tag{35}$$

側壁境界層の内部で：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar{q}_\theta^{(0)}=0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \beta^4}+\frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta}=0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta^2}-\sigma S\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \beta}=0. \tag{38}$$

第零近似の境界条件は次のようになる。

水平面 $(z=j,\ j=0,1)$ で：

$$\psi^{(0)}+\hat{\psi}_j^{(0)}=0, \tag{39}$$

$$q_\theta^{(0)}+\hat{q}_{\theta j}^{(0)}=\omega r, \tag{40}$$

$$\partial\hat{\psi}_j^{(0)}/\partial\eta_j=0, \tag{41}$$

$$\hat{T}_j^{(0)}=0, \tag{42}$$

側壁 $(r=r_0)$ で：

$$\psi^{(0)}+\bar{\psi}^{(0)}=0, \tag{43}$$

$$q_\theta^{(0)}+\bar{q}_\theta^{(0)}=\omega r_0, \tag{44}$$

$$\partial\bar{\psi}^{(0)}/\partial\beta=0, \tag{45}$$

$$\partial\bar{T}^{(0)}/\partial\beta=0. \tag{46}$$

同じく初期条件は次のようになる。

$t \leq 0$で全ての第零近似の量が0、　　　　(47)

(45)及び(46)を満足し、境界層外縁で0になる(37)及び(38)の解は直ちに求められる：

$$\bar{\bar{\Psi}}^{(0)} = \bar{\bar{T}}^{(0)} = 0. \qquad (48)$$

(43)により、(48)から直ちに次の関係が導かれる：

$$\text{側壁で} \quad \Psi^{(0)} = 0. \qquad (49)$$

この関係及び(31)から次の関係が導かれる：

$$\text{側壁で} \quad \partial \bar{v}_\theta^{(0)} / \partial t = 0. \qquad (50)$$

非粘性解は境界層の厚みの程度の座標変化に対して変らないから、(50)は、Pedloskyが指摘したように[6]、側壁境界層外縁での角速度が回転減衰時間の間一定である事を示している。しかし、この事は子午面流れの起らない事を、従って、狭義の回転減衰の起らない事を意味しない。すぐ後に示されるように、(49)を満足するような非粘性解は確かに存在する。子午面流れは側壁境界層の外縁をはい上り（或は下り）閉じた流線を作り得る。この事の無視がPedloskyを誤った結論に導いたのである。

第1近似の式は次のようになる（0になる量は省略し）：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{T}_j^{(1)} = 0, \qquad (51)$$

$$\frac{\partial \bar{T}^{(1)}}{\partial \alpha} = -2 \frac{\partial \bar{v}_\theta^{(0)}}{\partial z}, \qquad (52)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{v}_\theta^{(1)} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{v}_\theta^{(0)}}{\partial \alpha}, \qquad (53)$$

水平面（$z=j,\ j=0,1$）で　$\dfrac{\partial \hat{T}_j^{(2)}}{\partial \eta_j}+\dfrac{\partial \hat{T}_j^{(1)}}{\partial \xi_j}+(-1)^j T^{(0)}=0,$　　(54)

側壁（$r=r_0$）で　　$\bar{v}_\theta^{(1)}=0$.　　(55)

こゝで興味あるのは境界條件(54)を介して第2近似の量$\hat{T}_j^{(2)}$が関係している事である。この量に対しては次の式がある：

$$\partial^2 \hat{T}_j^{(2)}/\partial \eta_j^2=-\frac{\sigma S}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{\varphi}_j^{(0)}\right).\qquad(56)$$

$\hat{\varphi}_j^{(0)}$が得られた場合には（確かにそうであるが）、$\hat{T}_j^{(2)}$はその境界層的性質により一意に定まる．それ故、第一近似には何の不定性も含まれない。高次近似を調べると、この性質は高次近似に引きつがれている事が、従って我々の解法の有効なことがわかる．

側壁境界層での第2近似の式は次のようになる：

$$\partial^4\bar{\bar{\psi}}^{(2)}/\partial\beta^4+\partial\bar{\bar{T}}^{(2)}/\partial\beta=0,\qquad(57)$$

$$\partial^2\bar{\bar{T}}^{(2)}/\partial\beta^2-\sigma S\,\partial\bar{\bar{\psi}}^{(2)}/\partial\beta=0,\qquad(58)$$

側壁（$r=r_0$）で

$$\left.\begin{aligned}\partial\bar{\bar{\psi}}^{(2)}/\partial\beta&=\partial\psi^{(0)}/\partial r,\\ \partial\bar{\bar{T}}^{(2)}/\partial\beta&=\partial T^{(0)}/\partial r-\partial\bar{T}^{(1)}/\partial\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(59)$$

これまでの結果及び(57)～(59)により、厚さ$E^{\frac{1}{2}}$の側壁境界層は第零近似の子午面環流によって受動的に誘起される事がわかる．側壁境界層の受動性についてのHoltonの仮定[5]はこの限りで正しい．しかし、Holtonの解は側壁の温度が与えられている場合にも、或は断熱の場合にも対応していない．彼の解は非常に特殊な壁の條件に対応している。

ラプラス変換により、(39)及び(40)を満足する(34)及び(35)の解は次のようになる：

$$\hat{Q}^{(0)}_{\theta j}=(-1)^{1+j}(1-i)A_j e^{-(1+i)\eta_j}+(-1)^{1+j}(1+i)B_j e^{-(1-i)\eta_j}, \qquad (60)$$

$$\hat{\Psi}^{(0)}_j= A_j e^{-(1+i)\eta_j}+ B_j e^{-(1-i)\eta_j}, \qquad (61)$$

$$A_j=\frac{i}{2}\left\{(1+i)\Psi^{(0)}_j+(-1)^{1+j}\left(\frac{rw}{\tau}-Q^{(0)}_{\theta j}\right)\right\}, \qquad (62)$$

$$B_j=\frac{i}{2}\left\{-(1-i)\Psi^{(0)}_j+(-1)^{j}\left(\frac{rw}{\tau}-Q^{(0)}_{\theta j}\right)\right\}. \qquad (63)$$

こゝに大文字は対応する小文字のラプラス変換を表わし、また、添字(j=)1及び0は上底及び下底に対応する。慣用通り、初期条件(47)は基礎方程式の変換に組み込まれている。(60)及び(61)を(41)に代入すると水平面での非粘性解の条件を得る：

水平面($z=j,\ j=0,1$)で $\quad 2\tau\Psi^{(0)}+2(-1)^{1+j}\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}=(-1)^j rw.\qquad (64)$

式(30)から(32)までのラプラス変換は次のようになる。

$$\delta\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi^{(0)})\right\}+4\frac{\partial^2\Psi^{(0)}}{\partial z^2}=0, \qquad (65)$$

$$Q^{(0)}_\theta=-\frac{2}{\tau}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial z}, \qquad (66)$$

$$J^{(0)}=\frac{\delta}{\tau r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi^{(0)}). \qquad (67)$$

我々の問題は方程式(65)を境界条件(49)及び(64)の下で解く事に帰せられた。

上の境界値問題は簡単に解けて次の解を与える：

$$\Psi^{(0)}=r_0 w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\{\Omega_n(1-z)\}-\sinh(\Omega_n z)}{w_n J_2(w_n)(\tau\sinh\Omega_n+\Omega_n\cosh\Omega_n+\Omega_n)}J_1\left(w_n\frac{r}{r_0}\right), \qquad (68)$$

$$\Omega_n=\frac{\sqrt{\delta}\,w_n}{2r_0}. \qquad (69)$$

こゝに $J_n(x)$ 及び $\omega_n$ は夫々 $n$ 次の第1種ベッセル函数及び $J_1(x)$ の零点である。

(68) を (66) 及び (67) に代入し、逆変換すると次の結果を得る：

$$\frac{v_\theta^{(0)}}{2r_0\omega}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{-\frac{\Omega_n(\cosh\Omega_n+1)}{\sinh\Omega_n}t}\right\}\frac{\cosh(\Omega_n z)+\cosh\{\Omega_n(1-z)\}}{\omega_n J_2(\omega_n)(1+\cosh\Omega_n)}J_1\left(\omega_n\frac{r}{r_0}\right), \quad (70)$$

$$\frac{T^{(0)}}{\rho\omega}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-e^{-\frac{\Omega_n(\cosh\Omega_n+1)}{\sinh\Omega_n}t}\right\}\frac{\sinh\{\Omega_n(1-z)\}-\sinh(\Omega_n z)}{\Omega_n J_2(\omega_n)(1+\cosh\Omega_n)}J_0\left(\omega_n\frac{r}{r_0}\right). \quad (71)$$

第零近似 (70) 及び (71) は非粘性域：$0\leq r<r_0$, $0<z<1$ に於て有界である。同様の事は境界層内の解についても、また、高次近似解についても成り立つ。それ故、我々の解は自己矛盾を含まない正当なものと言える。上の解は、また、比例係数を除けば $\sqrt{\delta}/r_0$ のみをパラメータとして含んでいる。つまり、$r_0$ が無限大の極限は $\delta$ が零の極限と同値である。我々の解は§3で論じた $r_0$ 無限大の場合の極限を特殊例として確かに包含している。

§5. 結果及び考察

(70)式及び

$$\frac{r}{r_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_n J_2(\omega_n)}J_1\left(\omega_n\frac{r}{r_0}\right), \quad (72)$$

により、水平境界層の外縁での漸近的角速度分布は"新しい"角速度での剛体回転に対応するが、他方、側壁境界層外縁での漸近的角速度分布は"古い"角速度での剛体回転に対応する。これによって回転減衰の漸近状態は非一様回転である事

がわかる。この事情は子午面流れによって非粘性域に輸送される全角運動量を調べると更に明らかにされる：

$$J/J_r = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\Omega_n}{\omega_n^2\Omega_n(1+\cosh\Omega_n)}\ , \qquad (73)$$

$$J = 2\pi\int_0^L\int_0^{Lr_0}\bar r^2\bar\rho\,\bar v_\theta\,d\bar r\,d\bar z\ . \qquad (74)$$

こゝに添字rは"新しい"角速度での剛体回転に対応する。

$$f(z) = \frac{S\sinh z\quad J_0(2r_0z/\sqrt{S})}{(2r_0z)^2 z(1+\cosh z)J_1(2r_0z/\sqrt{S})}\ , \qquad (75)$$

を適当な積分路に沿って積分し、留数の定理を適用すると次式を得る。

$$J/J_r = 1 + \frac{1}{6}\frac{S}{r_0^2} - \frac{16\sqrt{S}}{r_0\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_0(2r_0\pi(2n+1)/\sqrt{S})}{(2n+1)^3 I_1(2r_0\pi(2n+1)/\sqrt{S})}\ . \qquad (76)$$

こゝに$I_n(x)$はn次の第1種変形ベッセル函数である。式(76)は縮まない極限($\sqrt{S}/r_0\to0$)への滑らかな移行を保証する。また、式(73)は層状度の強い極限で子午面流れによる効果が消え去る有様をはっきり表わしている。$J/J_r$の値は次の表のようになる：

| $\sqrt{S}/r_0$ | $J/J_r$ | |
|---|---|---|
| | 断熱の場合 | 温度を与える場合 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0.25 | 0.8720 | 0.9971 |
| 0.5 | 0.7592 | 0.9894 |
| 0.75 | 0.6609 | 0.9782 |
| 1 | 0.5765 | 0.9648 |
| 1.25 | 0.5051 | 0.9504 |
| 1.5 | 0.4458 | 0.9363 |

この表には比較の為に側壁の温度を与えた場合の結果を並記してある。断熱の場合に於ける方が温度を与える場合に於けるよりも子午面流れが弱められる有様がよくあて

いる。しかし、くり返し強調するが、それは決して唯今の場合に回転減衰の起らない事を意味しない。回転減衰は確かに起っている。たゞ、その程度が層状性によって弱められるだけなのである。従って、回転減衰の非存在を主張するPedloskyは間違っている。このように我々は完全にHoltonの側に立っている：Ekmanの境界層によって誘起された2次的子午面流れによって回転減衰が起り、回転減衰時間の後には"新しい"漸近状態に移行する。しかし、縮まない場合と異なり、この漸近状態は剛体回転ではない。"新しい"角速度での剛体回転への移行は粘性による拡散を介して行われる。

我々の結果がDickeの問題に於て果す役割りは明らかであろう。少くとも、彼はPedloskyの誤りの結果を使用する事をあきらめなければならない。それでも、彼には回転減衰の漸近状態の非一様性を、或はこゝで用いたBoussinesq近似の適用限界を理由に彼の仮設の正しさを主張する余地が残されている。しかし、それはDickeの問題が質の問題ではなく量の問題に変質した事を意味するのみである。それ故、Dickeの問題を解決する最もよい方法は太陽モデルについて回転減衰を調べる事である。

既に述べたように、我々は側壁の温度が与えられた場合の回転減衰を調べたが、その側壁上の漸近的な速度分布は未道

に相当する対称面上($z=0.5$)に角速度の最大値を有し、太陽面上での角速度分布に酷似している。我々の場合と太陽の場合との大きな相違点には重力の向きの相違があげられようが、Ekman 層による2次的子午面流れの駆動及び層状性による影響をごく大局的にとらえれば両者には類似点の方が多いのである。それ故、我々の結果から太陽の回転状態を類推して差支えないものと思われる。太陽での回転減衰時間は、我々の結果及びHowardの結果から$10^{5}\sim10^{7}$年であり、粘性拡散の時間は$10^{11}$年である。太陽の年齢が$10^{9}$年であるから、太陽は現在回転減衰での漸近状態にあると言える。そして、漸近状態の非一様性により太陽の非一様回転を説明できるのである。この推論の当否の決定は、やはり、太陽モデルの回転減衰の究明にかかっている。

最後に、研究会当日にはRossby 波或は内部波に対する層状度の影響についても若干の報告を行なったが、与えられた枚数も盡きたので今回はこゝで筆を擱く。

—— 三派系の教養部放送に悩まされながら ——

参考文献


1) Greenspan, H. P. and Howard, L. N. 1963 J. Fluid Mech. 17 385

2) Dicke, R. H. 1964 Nature 202 432

3) Howard, L. N., Moore, D. W. and Spiegel, E. A. 1967

Nature 214 1297

4) Dicke, R. H. 1967 Astrophys. J. 149 L121

5) Holton, J. R. 1965 J. Atmos. Sci. 22 402

6) Pedlosky, J. 1967 J. Fluid Mech. 28 463

7) Holton, J. R. and Stone, P. H. 1968 J. Fluid Mech. 33 127

8) Sakurai, T. 1969 J. Phys. Soc. Japan 26/3 に掲載予定

9) Sakurai, T. 1969 J. Fluid Mech. に掲載予定

10) Barcilon, V. and Pedlosky, J. 1967 J. Fluid Mech. 29. 1

11) Greenspan, H. P. The Theory of Rotating Fluids
1968 Cambridge