数理解析研究所講究録
第70巻 1969年 151-160

円柱のまわりを過ぎる定常輻射流の漸近解

京大 工 久保昇三

流れの場と、その流体の温度場との相互作用を考えるにあたって、Fig 1. の様な冷めたい一様流U中におかれた熱い物体Bのまわりの流れを考えてみよう。但し簡単のため粘性による効果は無視出来るものとする。

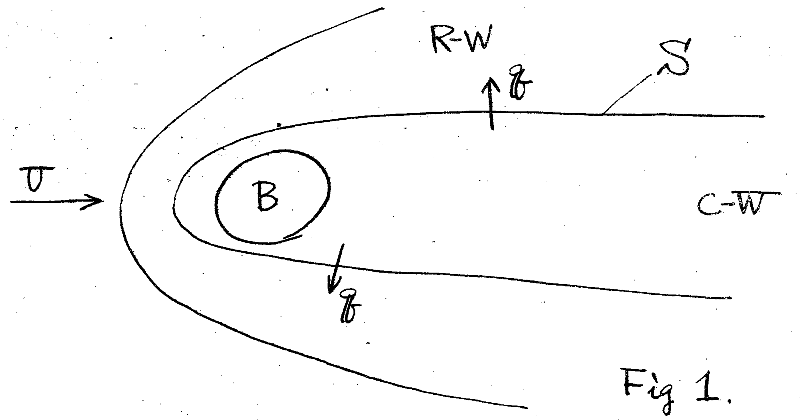


Fig 1.

熱の伝達が熱伝導($q=-k\nabla T$)であるとすれば、適当なPrandtl数, Mach数の下で(実際的にも多い場合として)高温物体Bの影響による高温部分は狭い後流領域C-Wにとじ

とめられてしまう。これに対し熱伝達が熱輻射（e.g.(C)）であれば、流体が光学的によほど濃密（τ；大）でないかぎり、熱輻射の持つ遠達的な性質によってC-W領域の高温ガスはその外の領域に熱を放出し、かつ又同時的に全ての点との相互作用を起す事から積分的な性質が出てくる。これらの効果によって、高温部分はもはやC-W内に止まらず、新しい、そしてより拡がった高温領域R-Wを形成するであろう。この事情は流れの場（そして温度場）が一次元であれ、二次元，三次元であれ成立つものである（ref. 1）が二次元，三次元の場合は拡がり得る外部領域が一次元の場合に比してはるかに大きい事からも，より一層この効果が顕著である事が期待される。

§1　二次元，三次元の場合の輻射場

一般に輻射場は、それを巨視的に見た場合でも種々困難な問題を含んでいる（ref. 2）のであるが、輻射場と流れの場との相互作用を調べようとする時、これらの困難をは極力さけるのが望ましい。従って、ここでは、流体及び物体Bの輻射率等々は光の波長に無関係、いわゆる灰色気体，灰色物体と考え、さらに物体Bは完全な黒体である、と仮定する。又巨視的輻射の温度場は巨視的な流体の温度場と完全に一致し、しかもそれらは局所熱力学的平衡にある、と仮定する。この様な場合，輻射場は最も簡単となり光速cが流速u等に

比し充分大であるとして，次の式を得る

$$\Omega \nabla I(\mathbf{r}, \Omega) = -\alpha I + \alpha \frac{\sigma}{\pi} T^4(\mathbf{r}) \qquad (1)$$

$$q_R = \int_{4\pi} \Omega \, I(\mathbf{r}, \Omega) \, d\Omega \qquad (2)$$

Ω ; 考える方向の単位ベクトル

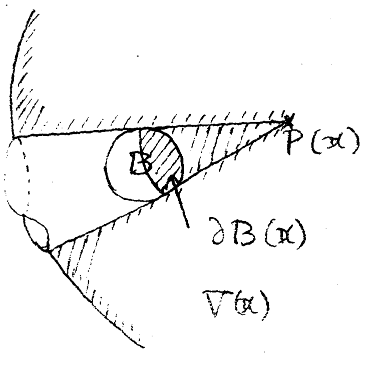
$I(\mathbf{r}, \Omega)$; $\mathbf{r}$ 点で Ω 方向への total intensity

q_R ; radiative heat flow

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial r_2}, \frac{\partial}{\partial r_3}\right)$

$T(\mathbf{r})$ を既知函数と見做せば (1) は形式積分出来て

$$\nabla q_R = 4\alpha\sigma T^4 - \alpha\frac{\sigma}{\pi}\int_{\partial B(x)} \frac{T_W^4(x_0)\, e^{-\alpha|x-x_0|}}{|x-x_0|^2} \xi \, dS - \alpha^2 \frac{\sigma}{\pi}\int_{V(x)} \frac{T^4(x')\, e^{-\alpha|x-x'|}}{|x-x'|^2} \, dx' \qquad (3)$$



α ; (gas) total absorption coefficient

σ ; Stefan-Boltzmann constant

dS ; $\partial B(x)$ の面積要素

$\xi := (x-x_0)/|x-x_0|$

となる。この時の積分領域 $\partial B(x)$ 及び $V(x)$ が位置 x の函数である困難さをさけるには物体 B を無限に小さくすればよい

しかしその時右辺第二項の積分はBの形になることを忘れてはならない。又(3)は一次元の場合のみ，やや簡単になり得る(ref. 3)。そしてその積分項の様子は調べられている(ref. 4)。　(3)式の様に複雑な二重積分を含む表現を流体の式とともに取扱う事は非常に困難であるので，(1)式中の $I(\nu,\Omega)$ を Ω について球面調和函数展開する近似法が提唱されている(ref. 5)が，この近似法は近似の程度が非常にわかり難いし，P_1-近似であるため，二次元，三次元の流れの全体的効果を良く近似しているかどうか，疑問である。

§2　流体力学の方程式の簡単化

流体力学の方程式は，それのみで充分に複雑であるので，極力単純化しなければならない。そこで，定常，二次元，非粘性，非熱伝導性，の圧縮性流体とし，物体を円柱であるとする。さらに線型化(Oseen 近似)を行い無次元化して

$$\nabla(\mathbf{v} + \rho\,\mathbf{e}_U) = 0 \qquad (4)$$

$$(\mathbf{e}_U \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{M^2}\nabla p \qquad (5)$$

$$\mathbf{e}_U \nabla\left(T - \frac{\gamma-1}{\gamma}p\right) = -\Gamma\,\nabla\mathbf{q}_R \qquad (6)$$

$$p = \rho + T \qquad (7)$$

$\mathbf{e}_U$; U(主流)方向単位ベクトル

$M = |U|/a_T$; 等温 Mach 数

$$\Gamma = \frac{8\alpha\sigma T_0^4}{\rho_0 C_p T_0}$$ ；輻射のBoltzmann数。

この線型化は，流体力学的非線形効果をおとし，輻射のT^4的振舞をおとすので好ましくないが，現在の所やむをえない。
さらに上式中の全ての量を

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} M^{2n} A_n$$

と展開して　$n=0$ のみをとれば

$$p_0 = 0 \quad , \qquad \therefore \quad \rho_0 + T_0 = C \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_{r,0}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_{\theta,0}\right) \tag{9}$$

$$\cos\theta \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_{r,0}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{\theta,0}}{\partial \theta} = 0 \tag{10}$$

$$\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) T_0 = -\Gamma \nabla \mathfrak{F}_{R,0}(T_0) \tag{11}$$

$n=1$ の時

$$p_1 = -v_{r,0}\cos\theta - v_{\theta,0}\sin\theta$$

u. s. w.

となって順次解ける。

§3　輻射熱流項

(3)式より，物体Bを円柱，その表面温度を一定とし，Bの円柱半径 $\longrightarrow 0$ とした時，エネルギー式中の $\nabla \mathfrak{F}_{R,0}$ は

$$\nabla q_{R,0} = 2T_0 - 2T_w \frac{Ki_2(r)}{r}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{Ki_1\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\varphi)}\right)}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\varphi)}} T_0(r',\varphi') r' dr' d\varphi$$

$$T_w = \frac{1}{\pi} \lim_{r_0 \to 0} \left[r_0 \frac{T_w(r_0)}{T_0} \right] \quad ; \text{有限}$$

$$Ki_n(\tau) \equiv \int_\tau^\infty \cdots\cdots \int_p^\infty K_0 \;(p)\; (dp)^n$$

となり、輻射の場合でも無限に小さい物体から有限の大きさの熱量を取り出すには、物体温度は無限大（適当な order の）でなければならない。

又 $\quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \equiv r\tau_{r,0} \qquad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \equiv r\tau_{\theta,0}$

として Φ_0 なる函数を導入し

suffix 0 のついた全量（以後 0 は除く）を Fourier 展開する。この熱流れの上下対称性から cos θ 形の項だけでよい。

i.e. $\quad A = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta$

又

$$\mathcal{L}_m[f] = \int_0^\infty \tan^{-1}\xi \, J_m(\xi r)\, d\xi \int_0^\infty J_m(\xi r')\, r' f(r') dr'$$

の operator $\mathcal{L}_m$ を導入すれば

$$\rho_m + T_m = 0 \qquad (12)$$

$$\Phi_0' = \frac{1}{2} r T_1 \qquad (13\text{-}1)$$

$$\Phi_1'' - \frac{1}{r}\Phi_1 = \frac{1}{2}\left[2rT_0' + rT_2' + 2T_2\right] \qquad (13\text{-}2)$$

$$\phi_m'' - \frac{m^2}{r}\phi_m = \frac{1}{2}\left[r T_{m+1}' + (m+1) T_{m+1} \right. \qquad (13\text{-}3)$$

$$\left. + r T_{m-1}' - (m-1) T_{m-1} \right] \qquad m \geq 2$$

$$\frac{1}{4P}\left[T_1' + \frac{1}{r} T_1\right] = - T_0 + T_w \frac{Ki_2(r)}{r} \qquad (14\text{-}1)$$

$$+ \mathcal{L}_0 [T_0]$$

$$\frac{1}{4P}\left[2T_0' + T_2' + \frac{2}{r} T_2\right] = - T_1 + \mathcal{L}_1 [T_1] \qquad (14\text{-}2)$$

$$\frac{1}{4P}\left[T_m' + \frac{m}{r} T_m + T_{m-2}' - \frac{m-2}{r} T_{m-2}\right] \qquad (14\text{-}3)$$

$$= - T_{m-1} + \mathcal{L}_{m-1} [T_{m-1}] \qquad m \geq 3$$

境界条件は　(全ての量) $\longrightarrow 0$ when $r \to \infty$ 　(15)

$v_r \longrightarrow 0$ when $r \longrightarrow 0$ 　(16)

以上の (12)～(14) の方程式系は、一次元の場合の exact Kernel の場合の式に対応し、これを解析的に解くにはまだ多くの困難がある。

§4 Kernel Substitution

一次元輻射流体の時に多用されたと類似の Kernel Substitution をここでも考えてみよう。そのため

$$Ki_1(\tau) \simeq \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\tau}$$

$$Ki_2(\tau) \simeq e^{-\frac{\pi}{2}\tau}$$

の置換えをする。

これは丁度 operator $\mathcal{L}_m$ 中の $\tan^{-1} \simeq z/\sqrt{1+(\frac{2}{\pi}z)^2}$ とした置換えになっており積分項 $\mathcal{L}_m$ の性質をほとんどそのままで保存している。適当な変数 r の拡大の後、$\Gamma \to \infty$ (輻射支配的) としてやれば

$$\left.\begin{aligned} T_m &= 0 \qquad m \geq 1 \\ T_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{\,n}\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sqrt{r}^{\,n} K_{\frac{n}{2}}(r) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

となる事がわかる。(17) は $r \to 0$ の時 $T_0 \to \infty$ となる。(17) の級数の収束について詳しい事はよくわからない。Γ が有限の場合 (17) の形より

$$T_m = \sum_{k=-2m-1}^{\infty} a_{m,k}\, r^{m+\frac{k}{2}} K_{\frac{k}{2}}(r) \qquad (18)$$

として (14) 式に代入すれば係数 $\{a_{m,k}\}$ についての連立一次方程式(無限次元)を得る。そして

$$b_{m,k} \equiv \begin{cases} (m+k)!!\, a_{m,-m+k} & m+k;\ \text{even} \\ -(m+k)!!\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_{m,-m+k} & m+k;\ \text{odd} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}_m \equiv \{ b_{m,k} \ ;\ k=-1,0,1,2,\cdots \}$$

$$M \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & 1 & & \ddots \end{bmatrix} \qquad N \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & & 1 & 0 & \ddots \\ & & & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

とする事により

$$b_1 = -2\pi T M b_0$$
$$b_2 = -2\pi T M b_1 - 2N b_0$$
$$b_m = -2\pi T M b_{m-1} - N b_{m-2} \qquad m \geq 3$$

となって、全ての b_m は b_0 で表現出来る。

一方 (14) 式は無限次元の連立方程式となっているので解き難い。このため、(12) 式の前の Fourier 展開を適当な有限項で打切り、又 (18) の展開も打切ったM, Nが正方行列になる様に打切ることによって、近似解を得ることが出来る。

§5、熱伝導の場合、球面調和展開について

熱伝達が熱伝導の場合の解は既に知られており (ref. 6)

$$T_0(x,y) = T_w\, e^{\frac{x}{r_c}} K_0\left(\frac{r}{r_c}\right) .$$

$$\text{where} \quad r_c = \frac{2kT_0}{\rho_0 C_p U T_0}$$

の形となる。

これは熱輻射の場合、熱伝導類似の部分があれば、(12) 式の前及び (18) 式の展開により、比較的少い項数で良い近似が得られそうな希望を持たせる形である。又明らかに、この場合、$r_c \to \infty$ 及び $r_c \to 0$ では $T_0(x,y) = \text{const.}$ しか解はない。

球面調和展開については現在検討中である。

最後に、各場合について x, y について Fourier 変換した形を示しておこう。

conduction $\quad \tilde{T}_0(k,h) = \dfrac{1}{i\alpha_c k + \rho^2} \qquad \alpha_c \equiv \dfrac{1}{P_c}$

$\rho \equiv \sqrt{k^2+h^2}$

from Cheng $\quad \tilde{T}_0(k,h) = \dfrac{1}{i\alpha k + \dfrac{\rho^2}{\rho^2+3}} \qquad \alpha \equiv \dfrac{1}{P}$

Kernel substitution

$$\tilde{T}_0(k,h) = \frac{4\pi T_w \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(\pi/2)^2}}}{i\alpha k + 2 - \dfrac{\pi}{\sqrt{\rho^2+(\pi/2)^2}}}$$

Exact Kernel

$$\tilde{T}_0(k,h) = \frac{4\pi T_w \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+1}} B\left(\dfrac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)}{i\alpha k + 2 - \dfrac{1}{\rho}\sin^{-1}\left(\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\right)}$$

where

$$B(x) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

$$= \left(1-\frac{1}{x^2}\right)K(x) + \frac{1}{x^2}E(x)$$

$K(x)$, $E(x)$; 第一,第二種完全楕円積分.

ref.

1. M.A. Heaslet, and B.S. Baldwin ; Phys. Fluids 6 (1963) p-781
2. V. Kourganoff ; Basic Methods in Transfer Problems, (1952) Oxford Univ. Press.
3. W.G. Vincenti and B.S. Baldwin ; J.F.M. 12 (1962) p-449
4. 久保昇三 ; 1967 秋期日本物理学会 応用力学数学分科会予稿集
5. P. Cheng ; AIAA. J 4 p-238 (1966)
6. H.A. Wilson ; Proc. Camb. Phil. Soc. 12 (1904) p406

3-1, W.G. Vincenti and C.H. Kruger ; Introduction to Physical Gas Dynamics ; (1965) John Wiley and Sons.