数理解析研究所講究録
第76巻 1969年 24-28

Bethe-Salpeter 方程式の数値解について

京大 理　青塚剛志
宗像康雄

§1. 序

交換されるmesonの質量μが0でない場合のB-S方程式の解については、まだあまりよく知られていない。最近、数値計算によって、固有値λの値が計算されているが、我々は関数の振舞いを調べる手掛りとして、total 4-momentum $P_\mu=0$の場合の解を積分表示を使って数値計算によって求めた。その方法は、以前、N. Nakanishi によって示されたものと同じであるが、数値計算を実行するために変形された部分があるので、以下にその方法の概略を述べる。

$$(p^2+m_1^2)(p^2+m_2^2)\,\phi(p)=\frac{\lambda}{\pi^2}\int\frac{d^4k\,\phi(k)}{(p-k)^2+\mu^2} \tag{1}$$

の解を極座標を使って

$$\phi_{NLlm}(p)=\Phi_{NL}(p^2)\,\mathcal{H}_{Llm}(\alpha,\theta,\varphi) \tag{2}$$

と分離できると仮定する。$\mathcal{H}_{Llm}(\alpha,\theta,\varphi)$は4次元solid harmonics である。(2)を(1)に代入すれば、$\Phi_{NL}(p^2)$ に対する積分方程式が得られるが、さらに積分表示

$$\Phi_{NL}(p^2) = \int_0^\infty \frac{d\eta\, f_{NL}(\eta)}{p^2+\eta} \tag{3}$$

を仮定して、(2), (3)を(1)に代入すると

$$\int_0^\infty \frac{(\eta-m_1^2)(\eta-m_2^2) f_{NL}(\eta)\, d\eta}{p^2+\eta} = \lambda \int_{\mu^2}^\infty \frac{d\eta}{p^2+\eta} \int_0^{(\sqrt{\eta}-\mu)^2} d\xi\, K_L(\eta,\xi)\, f_{NL}(\xi) \tag{4}$$

という式が得られる。但し、このとき

$$\int_0^\infty f_{NL}(\eta)\, d\eta = \int_0^\infty f_{NL}(\eta)\, \eta\, d\eta = 0 \tag{5}$$

を仮定した。(5)式は、$\Phi_{NL}(p^2)$ が p^2 の大きいところで、$|p|^{-6}$ の order で 0 に近づくことを示している。

我々は、まず、$L=0$，$\mu/2 < m_1 = m_2 \equiv m$ の場合を計算した。この場合

$$K_0(\eta,\xi) = k(\eta,\xi)/\eta \tag{6}$$

$$k(\eta,\xi) \equiv \sqrt{(\eta-(\sqrt{\xi}+\mu)^2)\cdot(\eta-(\sqrt{\xi}-\mu)^2)} = k(\xi,\eta) \tag{7}$$

となり、weight function は次の形でなければならない。

$$f_{N0}(\eta) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^n \cdot \theta(\eta-\Delta_n^2)\,(\alpha u_n(\eta) + \beta v_n(\eta)) \tag{8}$$

$$u_0(\eta) = \delta'(\eta-m^2), \quad v_0(\eta) = \delta(\eta-m^2)$$

$$\Delta_n = m + n\mu, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(8)を(4)に代入すると、

$$(\eta-m^2)^2 u_n(\eta) = \int_{\Delta_{n-1}^2}^{(\sqrt{\eta}-\mu)^2} K_0(\eta,\xi)\, u_{n-1}(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

という式が得られる。$v_n(\eta)$ についても全く同じである。

固有値方程式は、(5)式から得られて、

$$D(\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n = 0 \tag{10}$$

となる。ここで

$$d_0 = 1$$

$$d_n = v_n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\overline{u_j}\, v_{n-j-1} - u_j\, \overline{v_{n-j-1}} \right) \quad (n=1,2,\cdots) \tag{11}$$

$$u_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} u_n(\eta)\, d\eta \ , \qquad v_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} v_n(\eta)\, d\eta$$

$$\overline{u_n} = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} u_n(\eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta \ , \qquad \overline{v_n} = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} v_n(\eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta$$

$$\varphi(\eta) - \varphi(m^2) = \int_{\Delta_1^2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi - m^2)} \left[k(\xi, m^2) - \theta(\xi - (\sqrt{\eta} + \mu)^2)\, k(\eta, \xi) \right]$$

$\varphi(\eta)$ には additive const. だけの不定性がある。また、

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n} > 0 \tag{12}$$

§2. 数値計算の結果

次の変換によって、全ての量を dimensionless にする。

$$\sqrt{\eta}/\mu = x \ , \quad \mu^2 m^{2(n+1)} u_n(\eta) = U_n(x) \ , \quad \mu^2 m^{2n} v_n(\eta) = V_n(x)$$

$$m/\mu = M \ , \quad \lambda/m^2 = \Lambda \ , \quad m^{2n} d_n = D_n \ , \quad -\frac{\beta}{\alpha} m^2 = A$$

すると、固有値方程式は、

$$D(\Lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} D_n \Lambda^n = 0 \tag{13}$$

となる。(11)式の中の cancellation が非常に大きいため、得られた D_n の精度は悪いが、(13)式の n は ground state については余り大きくなくても良い。次に結果を示す。

まず、M=2，及びM=4の場合のD_nの値を示す。D_0，D_1，D_2は、正確な式、または有限区間の定積分によって、必要なだけの精度が得られる。（表のD_5の値は、符号と大きさの程度を調べるために示したが、精度は非常に悪い。）

	M=2.0	M=4.0
D_0	1.0	1.0
D_1	−0.5776986	−0.7338016
D_2	+0.0851303	+0.1562699
D_3	−0.00491	−0.01408
D_4	+0.000153	+0.00079
D_5	−0.000004	−0.00007

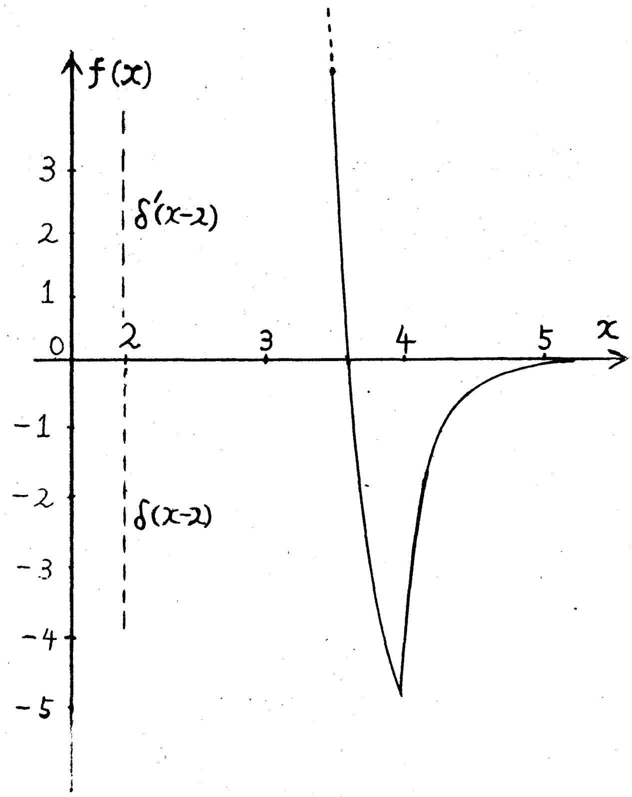
固有値Λについては、(13) 式の中の*sum*を$n=n_0$までとった場合のn_0について表を示すと、*lowest eigen-value* は

	M=2.0	M=4.0
$n_0=3$ のとき	2.546	2.169
$n_0=4$ 〃	2.574	2.251
$n_0=5$ 〃	2.572	2.232

次に、M=2 の場合の、*weight function* を示す。$U_n(x)$と$V_n(x)$の重みの比は、A=0.768756 としている。

右の図で、δ-関数の位置を点線で示し、$x=3$から始まる関数値の目盛は適当にとっている。

M=4の場合についても、右とほぼ同じ形のグラフが得られる。



§3. まとめ

我々は、以上のような方法で、$P_\mu=0$の場合の解が求められることが分った。*unequal mass*, $L\neq0$の場合への拡張は容易である。しかし、数値計算の結果から予想される事でまだ証明できていないことがいくつかある。第一に、$D(\lambda)$が交替級数であること。第二に$\mu/m\to0$の極限でWick-Cutkosky solutionsに一致することである。

また、$f_{NL}(\eta)$がηの大きいところで急速に0になることを利用して、今の方法を修正し、精度を上げ、さらに1st-excited stateの解を求めることも可能だが、近似の問題なのでここではこれ以上述べない。