数理解析研究所講究録
第76巻 1969年 37-55

核子－核子散乱Phase Shiftの計算

大阪市大 理　野田 松太郎

§1. 序論

現実の核子－核子散乱問題に、Nambu-Salpeter-Bethe方程式（N-S-B方程式）が適用され、数値的に解かれ始めている。その才一歩として、核子線の折れ曲がりを無視し、PS(pS)相互作用のladder近似の下で、uncoupled equationに対する計算が、elastic regionで終了している。[1),2)]

我々の研究は、この π中間子交換の結果を下にして、核子－核子散乱を、現象論を用いずにどこまでN-S-B方程式により再現し得るかを、「3-Meson模型」（π, scalar 及び vector）の立場に立って続けている。この場合、low-energyの散乱parameterであるscattering length a 及び effective range r_e を、field theoreticalに計算し得るので、低エネルギーから高エネルギーまでの統一した記述のために、我々の方法は、特に有効な手段になり得ると思う。[3)] §2

において、我々の数値計算の為めの formalism が与えられ、π- ladder での計算結果及び、対応する三次元計算[4]及び、分散式による計算[5]との比較が§3. において行なわれる。 §4.では、「3-Meson模型」へのアプローチの一結果が$^1S_0$状態について示され、諸結果が§5. において、まとめられる。

§2. 数値計算の方法

N-S-B方程式は、全角運動量(J)、Parity 及び Heisenberg's exchange operator により分類される。[6] その部分波N-S-B方程式は、負エネルギー状態からの寄与の無視で、

$$\varphi(p,p_0) = G(p,p_0;\hat{p},0) + \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dq_0\, G(p,p_0;q,q_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(q,q_0;E)\, \varphi(q,q_0), \tag{2-1}$$

とゝで、2-核子 propagator は、

$$S(q,q_0;E) = 1\Big/\big((E(q)-E-q_0-i\varepsilon)(E(q)-E+q_0-i\varepsilon)\big). \tag{2-2}$$

p, p_0 及び E は、相対3元運動量、相対エネルギー及び全エネルギーを表わし、on-shell 運動量 $\hat{p}$ と E は、$E(\hat{p}) = \sqrt{\hat{p}^2+m^2}$ で結びつく。 m は核子の質量である。

(2-1)式は、エネルギー分母による singularity を含む。このsingularity を消す為めに、相互作用 kernel: G における引算を次式の如く行なう。

$$\varphi'(p,p_0) = G(p,p_0;\hat{p},0) + \int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty dq_0 \left\{ G(p,p_0;q,q_0) - \frac{G(p,p_0;\hat{p},0)\,G(\hat{p},0;q,q_0)}{G(\hat{p},0;\hat{p},0)} \right\} \frac{-i}{2\pi^2} S(q,q_0;E)\,\varphi'(q,q_0) \tag{2-3}$$

(2-3) 式の kernel は energy-shell で singularity を持たず、振巾 φ' は、元々の振巾 φ と次式のように結びつく。

$$\varphi'(\hat{p},0) = G(\hat{p},0;\hat{p},0) \tag{2-4}$$

$$\varphi(p,p_0) = \frac{B}{B-I}\varphi'(p,p_0) \tag{2-5}$$

こゝで、Born 項：B 及び高次補正項：I は、

$$B = G(\hat{p},0;\hat{p},0) \tag{2-6}$$

$$I = \int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty dq_0\, G(\hat{p},0;q,q_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(q,q_0;E)\,\varphi'(q,q_0) \tag{2-7}$$

よって、

$$\varphi(p,p_0) = \frac{B}{B-I}\varphi'(p,p_0). \tag{2-8}$$

(2-7) 式の I は、また $S(q,q_0;E)$ による主値積分を含み、

$$S(q,q_0;E) = \frac{\mathcal{P}}{2(E(q)-E)} \left\{ \frac{1}{E(q)-E-q_0-i\varepsilon} + \frac{1}{E(q)-E+q_0-i\varepsilon} \right\} \tag{2-9}$$

この singularity を連続函数の積分に直すため、恒等式、

$$\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{1}{q^2-\hat{p}^2}dq = 0 \tag{2-10}$$

を用いる。　但し、$\hat{p}$ は常数。

即わち、

$$F(q) = \int_{-\infty}^\infty dq_0\, G(\hat{p},0;q,q_0) \frac{-i}{2\pi^2} S(q,q_0;E)\,(E(q)^2-E^2)\,\varphi'(q,q_0), \tag{2-11}$$

とすると、

$$F(\hat{p}) = G(\hat{p},0;\hat{p},0)\frac{E}{\pi}\varphi'(\hat{p},0) = \frac{E}{\pi}\{G(\hat{p},0;\hat{p},0)\}^2. \qquad (2\text{-}12)$$

よって、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dq \frac{\mathcal{P}}{E(q)^2 - E^2} F(q) \\ &= \int_0^\infty dq \frac{1}{E(q)^2 - E^2}\{F(q) - F(\hat{p})\}, \end{aligned} \qquad (2\text{-}13)$$

これで、φ' へ Wick-rotation を適用し、Gauss 数値積分公式によって連立一次方程式に reduce することによって、散乱 Phase Shift $\tan\delta$ は次ぎのように得られる。

$$\begin{aligned} \tan\delta &= \frac{E}{2\hat{p}}\varphi(\hat{p},0) \\ &= \frac{E}{2\hat{p}}\frac{B^2}{B - I} \end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

又、積分範囲は、q 及び q_4 (Wick rotation により、$q_0 \to iq_4$) の両方について、$0 \sim \infty$ であるので、$-1 \sim 1$ の Gauss 積分の点 u, v より次ぎの変換により $0 \sim \infty$ の積分にする。

$$q = \frac{1+u}{1-u} q_m, \quad q_4 = \frac{1+v}{1-v} q_{4m}. \qquad (2\text{-}15)$$

こゝで、q_m 及び q_{4m} は常数である。(積分範囲の中点)。より、くわしくは参考文献 1) 参照。

§3. π－中間子交換による数値結果[1,2]

i). Singlet Even State

π-ladder における $^1S_0$, $^1D_2$ 状態の散乱 phase shift が

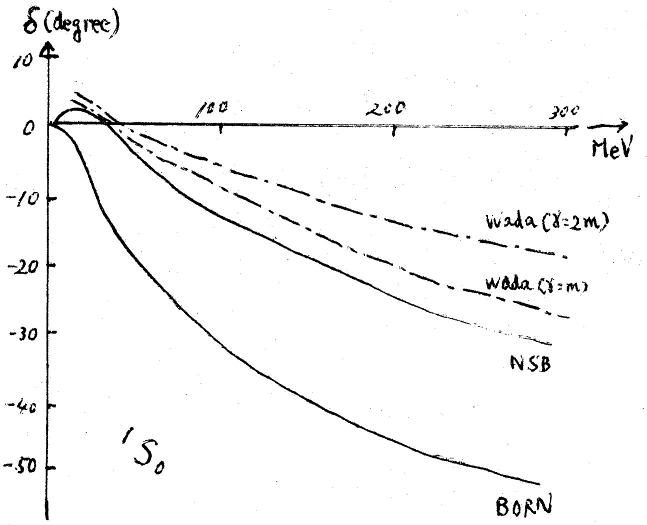


図 1-1

図1-1 及び 図1-2 に示されている。我々の結果は実線（NSB）であり、対応する三次元計算の結果[4)]が破線で示されている。

$^1S_0$ 状態において、三次元計算は、積分の上限を核子の質量（m）に取るか、その2倍に取るかで、かなりの違いを出す。

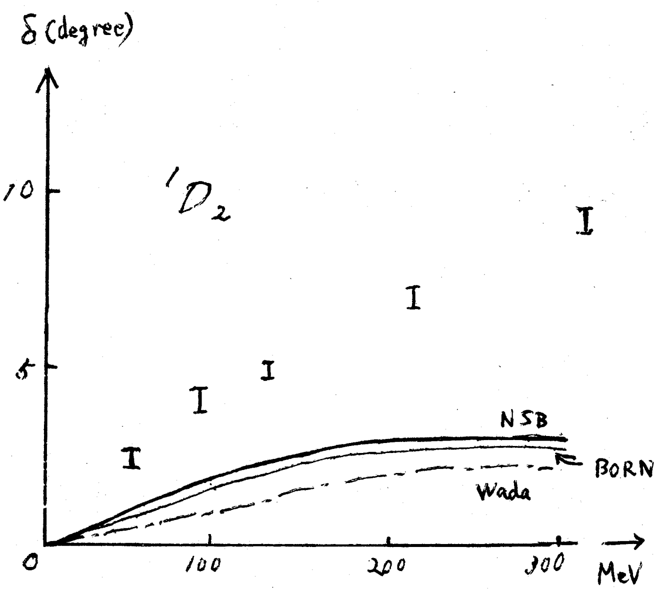


図 1-2

上限（γ）が 2m よりも大きくなると、わずかではあるが、さらに解は「BORN」より離れてゆく。これに反して我々の積分（cut-off なし）に、もし cut-off をするなら、逆に「BORN」

に近づくであろうことが図1-1より容易にわかる。即わち、我々の結果と対応する三次元計算の結果は、定性的には同じように振る舞うが、定量的には、definite な差を持つ。これは、本来変数であるべき相対エネルギーを三次元計算においては、F-S-T type で fix してしまっているからであり、retardation の効果を不完全に計算しているのに反し、N-S-B の解では、retardation を十分に考慮しているからである。

一方、$^1D_2$ 状態においては retardation 効果は小さいということがわかる。さらに、$^1D_2$ 状態の結果は分散式の結果とも似ている*) が、$^1S_0$ 状態では、分散式の方で現象論的パラメーターの使用がなければ計算し得ないので、直接の比較は出来ない。

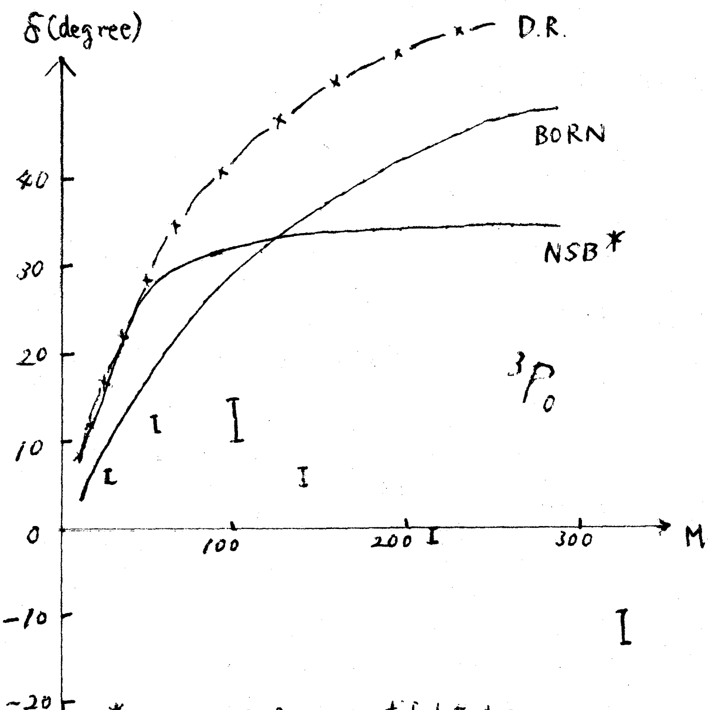
このことは、$^1D_2$ 状態においては、ボルン近似が非常に良い近似になっているのに反して、$^1S_0$ 状態のボルン近似はあまり良くなく、実際の N-S-B の解とボルン近似での phase shift とが、かなり違っていることの一つの反映となっている。

なお、phase shift analysis の解（縦線）とは、両状態共に大きく違い、引力が不足している。

---

*) 古市 進氏の御指摘による。

ii). Triplet Odd State



*NSBは、360° 下にずらしたもの。

図 2-1

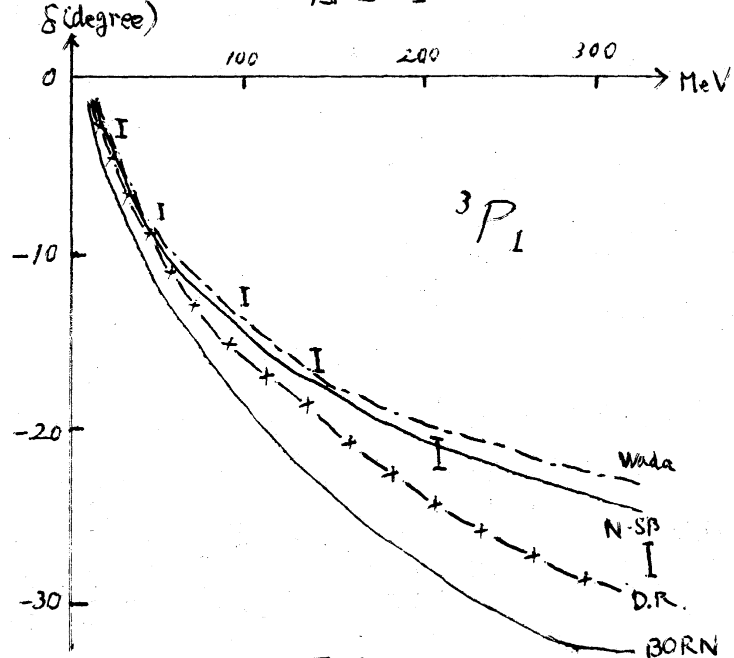


図 2-2

^3O の核力から、ここでは、$^3P_0$、$^3P_1$、$^3P_2$ の各状態を見る。

図2-1には、$^3P_0$ 状態の phase shift が、分散式の結果(x-)[5] と共に示されている。(NSBの解は、本来360°から出発するものである。) 詳しい議論を後に行なうが、ここで我々は2つの束縛状態を持つ。

図2-2には、対応する分散式及び三次元計算と共に $^3P_1$ 状態の結果が示めされている。これら色々な方法での結果

は、良く一致しており、ボルン近似も目茶に悪いとは云えない。

又、図示されていないが、$^3F_2$ 状態との mixing を無視した $^3P_2$ 状態の phase shift も、ボルン近似と近く、$^3F_2$ mixing を考慮した分散式の結果ともよく一致している。これは $^3P_2$ - $^3F_2$ mixing parameter：

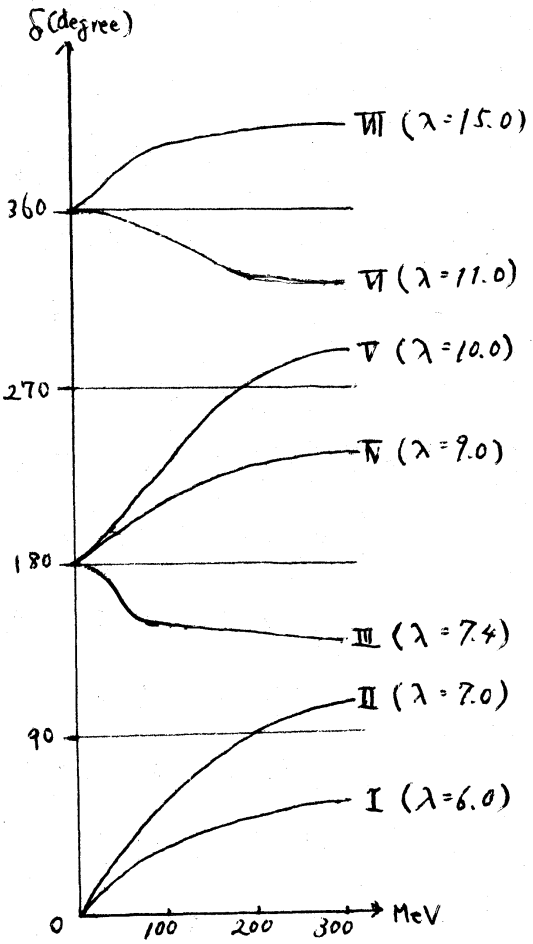


図 3

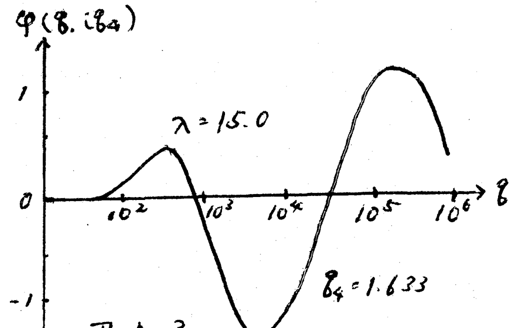


図 4-3

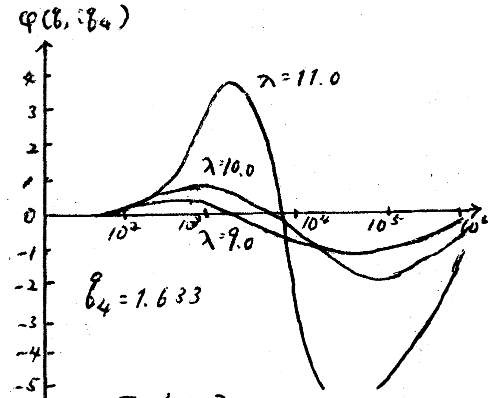


図 4-2

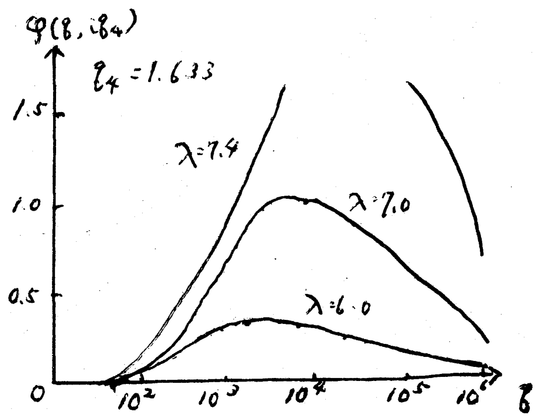


図 4-1

ε_2 の小さいと共に、我々の解が妥当であり、ボルン近似の良さが、分散式との一致性を意味するという考えを否定したい。

図3には、$^3P_0$ phase shift の πN 結合常数：λ への依存性が示めされている。（$\lambda = g^2/4\pi$）　又、λ の各々の値いに対する $^3P_0$ 状態の波動函数 $\varphi(q, iq_4)$ の三元運動量 (q) 依存性が、図4-1, -2, -3 に書かれている。即わち、図2-1 の NSB phase shift は図3の case VI に相当し、その波動函数が図4-3に示されている。図3で、小さな引力が I に表われ、散乱 phase shift は II で 90° を横切る。即わち、共鳴状態が表われ、λ の増加と共に引力はより大きくなり、III で束縛状態を作くる。この間の波動函数が図4-1であり、I → III と共に $\varphi(q, iq_4)$ は大きくなる。(2-7)、(2-11)、(2-13)、(2-14) 式等より容易に、$\varphi(q, iq_4)$ の増加と、$\tan\delta$ の零への移行、束縛状態の出現が理解しうる。IV において、波動函数は、その振舞いを図4-2 の通り変える。この波動函数の形（IV → VI）は再たび大きくなり、引力の増加をもたらし、V で第二の共鳴状態を、VI で第二の束縛状態を形成する。

N-S-B 方程式を解いて、$^3P_0$ 状態にはこのように2つの二核子系束縛状態が存在することになるが、対応する分散式

の計算では束縛状態は表われない。このことは、二つのスカラー核子間き第三のスカラー粒子が交換する模型において、K. V. Vasavadaが行なった分散式(N/D の方法)と、N-S-B方程式の結果の比較と矛盾しない[7]。この場合、強い引力の時は、N-S-B phase shift はN/Dの解より、はるかに大きくなっており、その因は、多粒子交換(2粒子以上)による left-hand cut からの寄与が、N/Dでは無視されるのに反して、N-S-Bにおいては ladder type のみは含まれているという点にある。

又、実際の核子−核子系には、重陽子($^3S_1 + {}^3D_1$)以外には、束縛状態は見い出されていないので、π-ladder 以外の機構を導入することによって、現在出てきている束縛状態を消去し、phase shift analysis の解と合わさねばならないであろう。

iii) Triplet Even State

^3E の核力として考えうるのは、$^3S_1$, $^3D_1$, $^3D_2$ 及び $^3D_3$ の各状態である。しかし、$^3D_2$ 以外の状態は全て他の状態と混じり合っている —— $^3S_1 + {}^3D_1$, $^3D_3 + {}^3G_3$ —— ので、詳しい議論は、行ない得ない。特に $^3S_1$、$^3D_1$ の混じり合う2つの状態(重陽子状態)は、共に NSB phase shift

が、BORN phase shift から、かなり離れており、色々な効果が効いてくるものと見られる。 但し、対応する三次元計算等がないため、比較は不可能であり、かつ、$^3S_1$ phase shift は、用いている近似の下では 全く $^1S_0$ phase shift と同じになる。 さらに、$^3S_1$, $^3D_1$ 両状態とも斥力が主に効くようになっているため、π中間子交換の ladder 近似のみでは、重陽子束縛状態を示めし得ないのではないかと思われる。

$^3D_3$ 状態では、ボルン近似が良い近似になっているが、これも詳しい議論は coupled equation を解いてからになる。

一方、$^3D_2$ 状態については、図5に示めされる通り、対応する三次元計算との比較がなされ得る。 NSB phase shift は、ボルン phase shift とかなり違っており、当然、retardation の効果の取り扱いによる差が期待され、それが、積分の上限の二通りの三次元計算における取り方 —— $\gamma = m$ 及び $\gamma = 2m$ —— の結果での差により、$^1S_0$ 状態と全く同じ議論が、図5から行ない得る。 さらに、三次元計算では、meson-propagator へ Feynman-cut : R を導入したものがあり、丸印つきの線(—○—)で図5に示めされている。 この Feynman-cut を用いた結果は我々のものと似かよってくる。このことは、retardation の効果が、Feynman-cut による

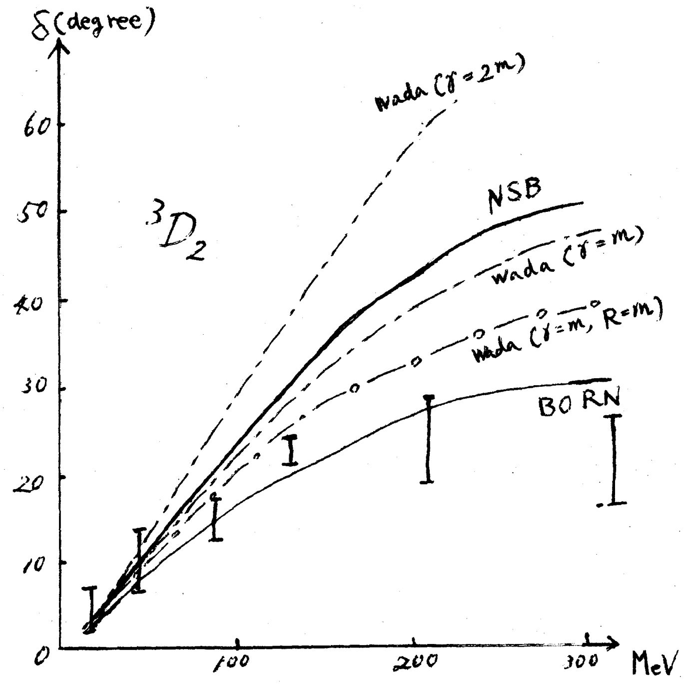


図 5

効果と似た寄与を与えることを示している。

高エネルギーの振舞いで、NSB phase shift も phase shift analysis の解を再現する事は出来ない。

iv). Singlet Odd State

ここでは、^1O 状態の核力として $^1P_1$ 状態のみを見る。

NSBの結果は、ボルン近似のものと、そう変わらないが、三次元計算の結果と 200 MeV 以上では定量的な差を産んでくる。今までの慣

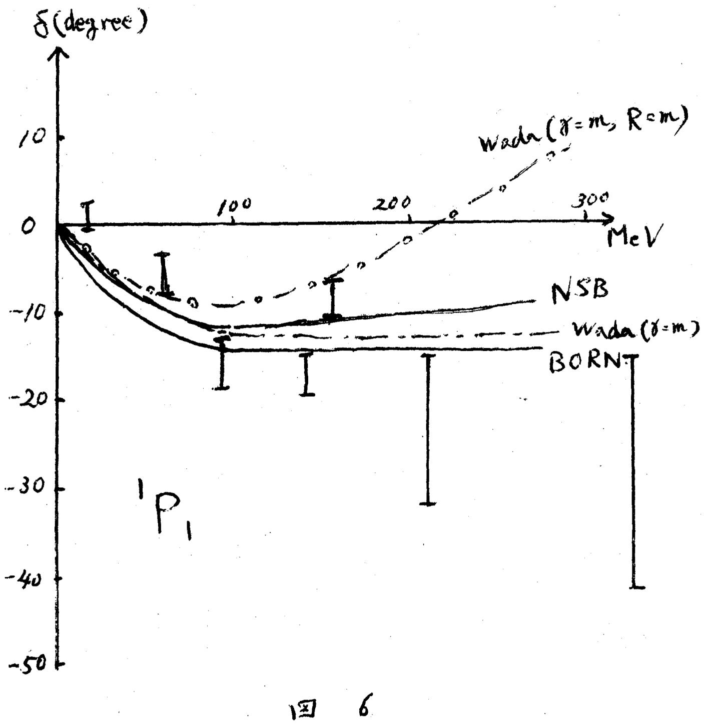


図 6

例とは違った意味において、この差を、やはり retardation の効果によるものとする。即わち、$^1S_0$、$^3D_2$ 状態における retardation の効果は phase shift をボルン phase shift に近ずける働らきをしたが、$^1P_1$ 状態ではそれが逆になり、ボルン phase shift から遠ざける働らきをしている。これをも retardation とする因は、三次元計算が、ほとんど cut-off 依存性を持たぬからである。又、$^1S_0$，$^3D_2$ 等と同じく、ここでも retardation の効果は三次元計算での meson-propagator への Feynman-cut (R) と導入の効果と同じような寄与を与えている。

§4　3-中間子模型

我々は、§3. において phase shift analysis の解を再現する為には、π中間子交換の ladder 近似（かつ負エネルギー状態からの寄与を無視する近似）だけでは不十分であり、他の機構を考える事の必要性を見た。その試みの中の一つとして、場の理論的に核子－核子問題を解くために、擬スカラー以外の相互作用でかつ、くりこみ可能なものを考えると、スカラー及びベクトル相互作用がある。（ベクトル中間子のベクトル相互作用では、核子－核子 isospin 状態として T = 1 のみを考えるので、発散の困難はない）。この3

種の中間子交換でphase shift analysisの解を求める立場を、「3－中間子模型」と名付ける。又、その第一歩として、「3－中間子模型」を$^1S_0$状態に適用してゆく。「3－中間子模型」を現象論なしに押し進めるために、第一にπ－中間子の質量($m_\pi = 135.0\,MeV$)及び結合常数($g_\pi^2/4\pi = 14.4$)以外のパラメーターであるスカラー及びベクトル中間子の質量(m_s 及び m_v)、結合常数($g_s^2/4\pi$、$g_v^2/4\pi$)の決定をしなければならない。

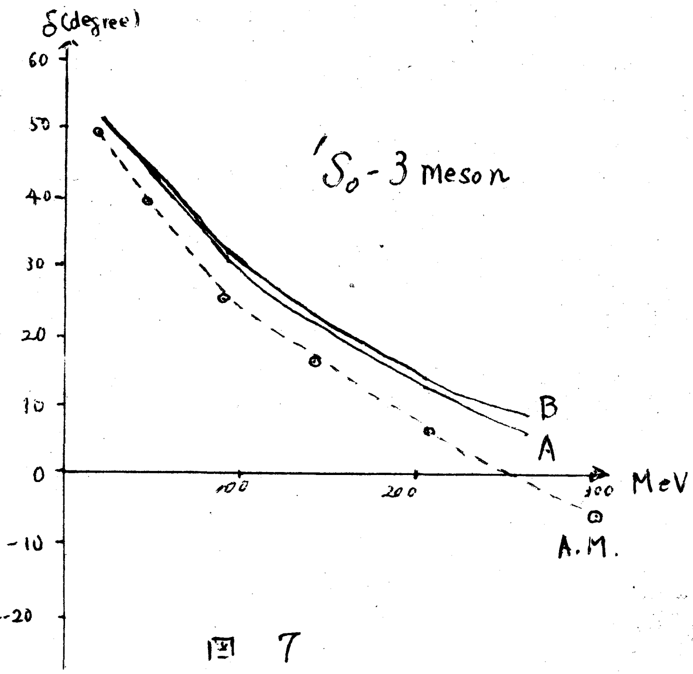


図 7

未知パラメーターの中、m_sと$g_s^2/4\pi$ 及び m_vと$g_v^2/4\pi$ は各々相互に関連を持つので、未定の変数は2種であり、低エネルギー散乱パラメーターのscattering length α と effective range r_e の2つから、その組みを見い出す事が出来る。r_eはN-S-B方程式のzero energy波動函数から導びく事が出来る[3)]ので、我々はαとr_eを合わす多くのパラメーターの組みを求め得、それらで有限エネルギーのphase shiftを合わす作業を行なう。

。図7には、その極く一例として、π－中間子以外に次ぎの数値を取ったグラフが各々A，Bとして描かれている。

A：　$m_v = 620.0\ \mathrm{MeV}$　　$g_v^2/4\pi = 4.0$

　　$m_s = 475.2\ \mathrm{MeV}$　　$g_s^2/4\pi = 4.15$

B：　$m_v = 620.0\ \mathrm{MeV}$　　$g_v^2/4\pi = 2.0$

　　$m_s = 432.0\ \mathrm{MeV}$　　$g_s^2/4\pi = 2.56$

又、「A・M」の点線は phase shift analysis の解の一つである。[8]　A，Bは共にエネルギー増加と共に斥力不足により phase shift analysis の解を再現しないが、ベクトル中間子の結合常数の増加で「A・M」に近づいているので、いまだ、「3－中間子模型」のみの立場は否定的であるとも云えない。　本当に「3－中間子模型」のみでいいのか、又は　これだけでは悪く、一種の現象論を加えることが要求されるのか、という問題は、今后に待たねばならない。

§5　まとめ

以上、核子－核子散乱を elastic region において、次ぎの近似のもとに見てきた。

1)　PS(ps) 相互作用 の ladder 近似.

2)　負エネルギー状態からの寄与無視.

3)　状態の mixing 無視

各状態のphase shiftのBorn phase shiftからのズレは、大ざっぱに4つに分類される。

図8の如く、

$$\alpha = \frac{\mathrm{Min}[|\delta|, |\delta^{BORN}|]}{\mathrm{Max}[|\delta|, |\delta^{BORN}|]}$$

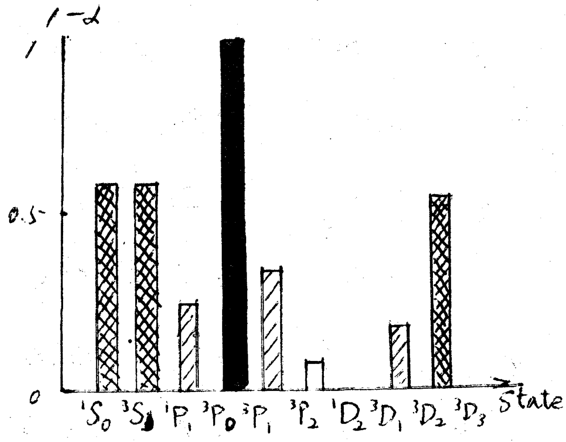


図 8

を用いると明らかなように、Bornとのズレの大きさが最大($^3P_0$)、大($^1S_0$, $^3S_1$及び$^3D_2$)、中($^1P_1$, $^3P_1$及び$^3D_1$)そして小($^3P_2$, $^1D_2$, $^3D_3$)と分類される。このズレの因として、考えられる大きな因子は$(\tau \cdot \tau')$により$T=1$と$T=0$で3倍になるiso spin、及び遠心力に働く全角運動量、そして相互作用が引力か、斥力か、という要素である。

これらの因子より、isospinについては、$T=1$に対して*印を、$T=0$に○印を、又全角運動量について'○○'を$J=0$に、'○'を$J=1$に'*'を$J=2$に当てはめる。さらに相互作用が引力か斥力かに関し、引力(A)の場合に○印、斥力(R)の場合に*印を書き、これらの○印の数をσとして表わしたものが、次ページに他の、既に議論された物理量との関係をも含んで書かれている。Bornとの差の大小関係とσの大小関係は、ほゞ対応する事がわかる。

状態	J	T	A or R	σ	Bornとの差	3次元計算との差	分散式計算との差
$^1S_0$	○○	*	*	2	大	有	/
$^3P_0$	○○	*	○	3	最大	/	有 (bound state)
$^3S_1$	○	○	*	2	大	/	/
$^1P_1$	○	○	*	2	中	有	/
$^3P_1$	○	*	*	1	中	無	無
$^3D_1$	○	○	*	2	中	/	/
$^3P_2$	*	*	○	1	小	/	無
$^1D_2$	*	*	○	1	小	無	(無)
$^3D_2$	*	$\dot{\circ}$	○	2	大	有	/
$^3D_3$	*	○	*	1	小	/	/

さらに、3次元計算との差（retardation）、及び分散式の計算との差（多粒子交換の left-hand cut からの寄与の計算の差—— many particle exchange effect ）の有無は、まさに σ の値によることが見られる。J，T，A or R は、状態の分類と Born phase shift の計算のみで F－部分波以上の高い波についても容易にわかるので、NSB phase shift を、どの部分波まで求めてゆけばよいかが、この計算でわかるようになる。

次ぎの段階として、「3－中間子模型」が、どのように考えられるか——核子－核子散乱が elastic region では、これのみで記述されるか、あるいは何んらかの現象論が必要なのか——、又 coupled equation の計算をどう行なってゆくか、さらに N-S-B 方程式の特徴の一つとして、「負エネルギー状態」からの寄与がどの程度あるのか等々を見てゆき、それと共に核子－核子束縛状態の計算も実行に移してゆかねばならない。

———— 。 ————

なお、本研究は、室田敏行（北大 理）、田中富士男（奈良高専）と筆者による共同研究であり、それを筆者がまとめたものであります。

参考文献

1). T. Murota, M.T. Noda and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 41 ('69), No. 5.

2). M.T. Noda, Prog. Theor. Phys. submitted.

3). M. Mizouchi, T. Murota and M.T. Noda, Prog. Theor. Phys. 40 ('68), 1079.

4). M. Wada, Prog. Theor. Phys. 37 ('67), 763.
M. Wada, Prog. Theor. Phys. 41 ('69), 105.

5). S. Furuichi, Prog. Theor. Phys. 27 ('62), 51.
S. Furuichi, Prog. Theor. Phys. 29 ('63), 235.

6). H. Ito, M. Mizouchi, T. Murota, T. Nakano, M. T. Noda and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. 37 ('67), 372.

7). K. V. Vasavada, Phys. Rev. 165 ('68), 1830.

8). R. A. Arndt and M. H. MacGregor, Phys. Rev. 141 ('66), 873.