数理解析研究所講究録
第 77 巻 1969 年 92-98

Infinite tensor product について

阪大 基礎工 竹之内 脩

昨年の作用素環研究会において，type I factors の無限テンソル積の型について報告した．[2] その方法は，measure-theoretic なものであったが，最近 E. Størmer は，竹崎が富田 [4] の理論を発展させた結果を用いて，これを operator algebra の枠内で議論できることを示したので，以下それについて述べる．

H_ν $(\nu=1,2,\cdots)$: ヒルベルト空間

e_ν は H_ν の固定された単位ベクトル

$H = \prod_\nu \otimes (H_\nu, e_\nu)$: $\prod_\nu \otimes e_\nu$ を含む無限テンソル積

M_ν は H_ν 上に与えられた factor

$T \in M_\nu$ の H 上への拡大を $\bar{T}$, $\bar{M}_\nu = \{\bar{T}\,;\, T \in M_\nu\}$,

M は $\bar{M}_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots)$ から生成された H 上の von Neumann 環．

この M の factor type を問題にする．

ここで，M_ν のいずれかが type III ならば，M は type

III となるから，以下には，M_ν はすべて半有限と仮定し，そのとき，M が半有限であるための条件を求める．また，e_ν は M_ν に関し，separating and generating vector であると仮定しておいて，一般性を失わない．

t_ν を M_ν の faithful, normal, semi-finite trace とする．そうすると，M_ν 上の normal state $\rho_\nu(A) = (Ae_\nu, e_\nu)$ $(A \in M_\nu)$ に対して，$\rho_\nu(A) = t_\nu(AH_\nu)$ となるような positive self-adjoint operator $H_\nu \eta M_\nu$ が一意的に定まる．そこで，$H_\nu \eta N_\nu$ なる如き M_ν の maximal abelian subalgebra N_ν をとり，これを measure space (Ω_ν, μ_ν) 上の multiplication algebra として表現する：$N_\nu \ni A \to \varphi_\nu(A) \in L^\infty(\Omega_\nu, \mu_\nu)$.
ここで，measure μ_ν は

$$t_\nu(A) = \int_{\Omega_\nu} \varphi_\nu(A)(\omega)\, d\mu_\nu(\omega) \qquad \text{for } A \in N_\nu$$

なるものとしておくことができる．いま，$h_\nu(\omega) \in L^1(\Omega_\nu, \mu_\nu)$ を，H_ν に対応するようにとると，

$$\rho_\nu(A) = \int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega)\, \varphi_\nu(A)(\omega)\, d\mu_\nu(\omega) \qquad \text{for } A \in N_\nu .$$

定理 (Størmer [1])

M が semi-finite

$$\rightleftarrows \quad \sum_\nu \int_{\Omega_\nu}\int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega)\, h_\nu(\omega') \min\left\{ \left| \frac{h_\nu(\omega)}{h_\nu(\omega')} - 1 \right|^2, c \right\} d\mu_\nu(\omega)\, d\mu_\nu(\omega') < \infty$$

ある $c > 0$，したがってすべての $c > 0$ について

§1. KMS condition.

M を von Neumann algebra, ρ を M 上の faithful normal state とするとき, M の one-parameter (strongly continuous) $*$ automorphism group σ_t $(-\infty < t < \infty)$ があって,

ρ は σ_t に関し invariant.

$\forall A, B \in M$ に対し, $0 < \Im z < \beta$ で正則な関数 $F(z)$ があって,

$$F(t) = \rho(\sigma_t(A) B), \quad F(t+i\beta) = \rho(B \sigma_t(A))$$

となる. (ここに $\beta > 0$ はすべての A, B に対し fixed とする.)

このとき, ρ は KMS-condition をみたすという.

<u>**定理**</u> (竹崎 [3]) 任意の faithful normal state は, $\beta = 1$ として, KMS condition を満足する.

ρ によって定義される cyclic representation を考えると, M に関して, separating and generating vector e があって, ρ は,

$$\rho(A) = (Ae, e) \qquad (A \in M)$$

を満たしているものとしてよい.

$$\mathfrak{A} = \{ Ae \,;\, A \in M \}$$

において,

$$(Ae)(Be) = (AB)e$$

$$(Ae)^* = A^* e$$

と定義すれば，$\mathfrak{A}$ は富田の generalized Hilbert algebra となす.

$\mathfrak{A}$ では left multiplication $x \to ax$ は bounded，また $(ab, c) = (b, a^* c)$ が満たされているが，$\mathfrak{A}$ の適当な dense subalgebra $\mathfrak{B}$ をとると，

right multiplication $x \to xb$ $(x \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B})$ は bounded，

各 $b \in \mathfrak{B}$ に対して，適当な $b^s \in \mathfrak{B}$ が存在して，

$$(ab, c) = (a, cb^s) \qquad (a, b, c \in \mathfrak{B})$$

そこで，$x \in \mathfrak{B}$ に対して，

$$\Delta x = x^{s*}$$

とおくと，Δ は positive self-adjoint operator に unique に拡大できる．この Δ が，富田の所謂 modular operator であるが，この Δ を用いて，M の one-parameter automorphism group σ_t を

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}, \quad A \in M, \ -\infty < t < \infty$$

と定義すれば，これが定理にいう条件を満たしている．

この automorphism group を modular automorphism group と呼ぶ．

定理（竹崎）

前の定理で，

M : semi-finite $\rightleftarrows$ modular automorphism group が inner

M が semi-finite のとき，その faithful semi-finite normal trace を t とする．そして，ρ の t に関する Radon-

Nikodym derivative を H とする：

$$\rho(A) = t(AH).$$

とすれば，modular automorphism group σ_t は，

$$\sigma_t(A) = H^{it} A H^{-it}, \qquad A \in M, \ -\infty < t < \infty$$

で与えられる．

§2. Lemma.

$$M : \text{semi-finite} \rightleftarrows \sum_{\nu} \left(1 - |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)|\right) < \infty$$
$$(-\infty < t < \infty)$$

[⇒] $M = \otimes M_\nu = M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes \bigotimes_{\nu > n} M_\nu$ とすれば，

modular automorphism group は，

$$\sigma^t = \sigma_1^t \otimes \sigma_2^t \otimes \cdots \otimes \sigma_n^t \otimes {}^n\sigma^t$$

という形となり，これらはそれぞれ，

$$H^{it} \qquad H_1^{it} \otimes H_2^{it} \otimes \cdots \otimes H_n^{it} \otimes {}_nH^{it}$$

で与えられる．したがって，M は factor であるから，この両者は絶対値 1 の const. 倍の差を除いて一致する．

$$\therefore \ |(H^{-it} e, e)| = \prod_{\nu \leq n} |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)| \ |({}_nH^{-it} {}_ne, {}_ne)|$$
$$\leq \prod_{\nu \leq n} |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)|$$

$$\therefore \ |(H^{-it} e, e)| \leq \prod |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)|.$$

もし，$(H^{-it} e, e) \neq 0$ ならば，右辺の無限乗積が収束するから Lemma の条件を得る．$(H^{-it} e, e) = 0$ のときは，少し e を

ここで $\theta_\nu(t) = t w_\nu(t)$ とおいた。これから，

$$|\exp it(\log h_\nu(\omega) - \log h_\nu(\omega')) - 1|^2$$
$$= |\exp it(w_\nu(t) - \log h_\nu(\omega')) - \exp it(w_\nu(t) - \log h_\nu(\omega))|^2$$
$$\leqq 2|\exp it(w_\nu(t) - \log h_\nu(\omega)) - 1|^2 + 2|\exp it(w_\nu(t) - \log h_\nu(\omega')) - 1|^2$$

を用いて，

$$\sum_\nu \int_{\Omega_\nu}\int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) h_\nu(\omega') |\exp it(\log h_\nu(\omega) - \log h_\nu(\omega')) - 1|^2 d\mu_\nu(\omega) d\mu_\nu(\omega')$$
$$\leqq 4 \sum_\nu \int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) |\exp it(w_\nu(t) - \log h_\nu(\omega)) - 1|^2 d\mu_\nu(\omega) < \infty.$$

これを定義の形に書き直すことは容易である．

[$\Leftarrow$] 条件から

$$\sum_\nu \int_{\Omega_\nu}\int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) h_\nu(\omega') |\exp it(\log h_\nu(\omega) - \log h_\nu(\omega')) - 1|^2 d\mu_\nu(\omega) d\mu_\nu(\omega') < \infty$$

故に，

$$\sum_\nu (1 - |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)|)$$
$$= \sum_\nu \int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) (1 - |(H_\nu^{-it} e_\nu, e_\nu)|) d\mu_\nu(\omega)$$
$$\leqq \frac{1}{2} \sum_\nu \int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) \| \exp(it \log h_\nu(\omega)) H_\nu^{-it} e_\nu - e_\nu \|^2 d\mu_\nu(\omega)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_\nu \int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega) \left(\int_{\Omega_\nu} h_\nu(\omega') |\exp it(\log h_\nu(\omega) - \log h_\nu(\omega')) - 1|^2 d\mu_\nu(\omega') \right) \cdot d\mu_\nu(\omega)$$
$$< \infty.$$

References

[1] E. Størmer: On infinite tensor product of von Neumann algebras, To appear

[2] O. Takenouchi: On type classification of factors constructed as infinite tensor products, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (1968)

[3] M. Takesaki: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Mimeographed note (1969)

[4] M. Tomita: Standard forms of von Neumann algebras. Mimeographed note (1967)