数理解析研究所講究録
第 78 巻 1969 年 53-65

テーター常数について

名大 理　森川 寿

1. Canonical という概念はそれだけ取出して、定義も説明も出来にくい根元的概念であるが、ある具体的な対象が Canonical であるかどうかは判定出来その証拠をあげることも容易であるのが普通である。ここにお話するテーター常数の問題は、「アーベル多様体を座標射影空間に Canonical に埋込んだ時、その加法公式を特徴づけよ」ということであるといってよい。「原点の像の座標(テーター常数)を特徴づけよ」といっても同じである。

Canonical な埋込みの説明 (古典的な場合)

τ : $r\times r$ 対象行列で虚部分が正定付号なもの

$z=(z_1,\cdots,z_r)$: 変数-Vector,

$a=(a_1,\cdots,a_r)$: 整数-Vector,

l : 1 以上の整数

このときテーター級数 $\vartheta_a(\tau|z)$ を

$$\vartheta_a(\tau|z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}^r} e^{\pi\sqrt{-1}\,l\{(m+\frac{a}{l})\tau\,{}^t(m+\frac{a}{l})+2(m+\frac{a}{l})\,{}^t z\}}$$

で定義する。$\vartheta_a(\tau|z)$ は a の $\bmod\ l\mathbf{Z}^r$ の class のみ

に関係し、次のような性質をもつ：a, $\hat{a}$, h, $\hat{h}$, b を整-Vector とするとき

(1) $\vartheta_a(\tau|z+h\tau+\hat{h})=e^{-\pi\sqrt{-1}\,l\{h\tau{}^th+2h{}^tz\}}\vartheta_a(\tau|z)$

(2) $\vartheta_a(\tau|z+\frac{\hat{a}}{l})=\langle a,\hat{a}\rangle\vartheta_a(\tau|z)$

ここに $\langle a,\hat{a}\rangle=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,a{}^ta}{l}}$

(3) $\vartheta_a(\tau|z+\frac{b}{l}\tau)=e^{-\pi\sqrt{-1}\{\frac{1}{l}b\tau{}^tb+2b{}^tz\}}\vartheta_{a+b}(\tau|z)$.

mod $l\mathbf{Z}^n$ の class に適当な順序を入れておけば (1) より、対応 $\theta: z\longrightarrow(\cdots,\vartheta_a(\tau|z),\cdots)$ は complex torus $A=\mathbf{C}^n/\{h\tau+\hat{h}\,|\,h,\hat{h}\in\mathbf{Z}^n\}$ から (l^n-1)-次元座標射影空間 $\mathbf{P}_{l^n-1}$ の中への写像を与える。非斉次座標

$$\varphi_a(z)=\frac{\vartheta_a(\tau|z)}{\vartheta_0(\tau|z)}\qquad(a\in\mathbf{Z}^n/l\mathbf{Z}^n)$$

にうつれば A の l 分点 $\frac{1}{l}h\tau+\frac{1}{l}\hat{h}\tau$ ($h,\hat{h}\in\mathbf{Z}^n$ mod $l\mathbf{Z}^n$) に対して、次のような性質をもつ：φ_a の極-divisor は $\vartheta_0(\tau|z)$ の divisor、かつ

(4) $\varphi_a(-z)=\varphi_{-a}(z)$, $\varphi_0(z)\equiv 1$,

(5) $\varphi_{a+b}(z)=\varphi_a(z+\frac{1}{l}b\tau)\varphi_b(z)$,

(6) $\varphi_a(z+\frac{1}{l}\hat{b})=\langle a,\hat{a}\rangle\varphi_a(z)$.

このθを Canonical な level l のテーター写像という。
$l \geq 3$ のときには埋込みになる。θはアーベル函数系
$\{\varphi_a(z)\}$ で決定される。

Canonical な埋込みの説明（抽象的な場合）

G： 位数$|G|$が奇の加法群，

K： Universal domain その標数が$|G|$と素

$\mathbb{P}_G$： 次のように座標の入った$(|G|-1)$-次元の射影空間，

$$\mathbb{P}_G = \{(x_a)_{a\in G} \mid x_a \in K,\ (x_a)_{a\in G} \neq 0\}/\sim$$

ただし $(x_a)_{a\in G} \sim (y_a)_{a\in G}$ はある零でないλがあって $\lambda x_a = y_a\ (a \in G)$.

アーベル多様体Aが与えられた時，A上の G-theta structure という概念を導入しよう。Aの divisor Xに対してAの部分群 $\mathcal{G}_X = \{t \in A \mid X_t \sim X\}$ が対応するが，これが有限群のとき，Xは non-degenerate であるという。divisor Xに対しては unique な $\mathcal{G}_X$ の skew-symmetric な bicharactor $e_X(\ ,\ )$が定まる。すなわち写像 $e_X : \mathcal{G}_X \times \mathcal{G}_X \longrightarrow \{K$の1の巾根の群$\}$で次の性質をもつ

(i) $e_X(s+s', t) = e_X(s, t)e_X(s', t)$,

$e_X(s, t+t') = e_X(s, t)\, e_X(s, t')$

(ii) $e_X(s,t)\,e_X(t,s)=1$.

前にあげた古典的例の場合には、次のようになる。

$$\mathfrak{g}_X=\left\{\tfrac{1}{\ell}(h\tau+\hat{h})\,\middle|\,h,\hat{h}\in\mathbf{Z}^n \bmod \ell\,\mathbf{Z}^n\right\}$$

$$e_X\left(\tfrac{1}{\ell}(\tau+\hat{a}),\ \tfrac{1}{\ell}(b\tau+\hat{b})\right)=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ell}(a^t\hat{b}-b^t\hat{a})}$$

$\hat{G}$ で G の双対加法群, $a\times\hat{a}\longrightarrow\langle a,\hat{a}\rangle$ でその pairing: $G\times\hat{G}\longrightarrow\{K$ の 1 の巾根の群$\}$ をあらわすものとする. また $-\delta_A$ で $u\longrightarrow -u$ なる A の automorphism, $\ell(X)=\dim\{f\mid (f)+X>0\}$ とする.

<u>定義</u> A 上の G-theta structure とは A 上の positive divisor X と $G\oplus\hat{G}$ から $\mathfrak{g}_X$ の上への isomorphism ρ との組 (X,ρ) で次の性質をもつものとする.

(i) $(-\delta_A)^{-1}(X)=X$, (ii) $\ell(X)$ は標数と素,

(iii) $e_X(a\rho,\hat{a}\rho)=\langle a,\hat{a}\rangle\quad(a\in G,\ \hat{a}\in\hat{G})$,

(iv) $e_X(G\rho,G\rho)=e_X(\hat{G}\rho,\hat{G}\rho)=\{1\}$

<u>定理</u> アーベル多様体 A 上の G-theta structure (X,ρ) ($|G|$ は奇, 標数 $\neq 2$) に対して, unique に A 上の函数系 $\{\varphi_a(u)\mid a\in G\}$ が存在して次のような性質をみたす.

(i) $\varphi_{-a}(u) = \varphi_a(-u)$, $\varphi_0(u) \equiv 1$

(ii) $\varphi_{a+b}(u) = \varphi_a(u + b\rho)\varphi_b(u)$ $(a, b \in G)$

(iii) $\varphi_a(u+\hat{a}\rho) = \langle a, \hat{a} \rangle \varphi_a(u)$ $(a \in G, \hat{a} \in \hat{G})$

(iv) $(\varphi_a) + X > 0$.

この函数系を用いて A から P_G の中へ rational map φ:

$$u \longrightarrow (\varphi_a(u))_{a \in G}$$

が定義される。これを G-theta structure (X, ρ) に付ずいする Canonical map と呼んでよいであろう。原点で φ が定義可能なら $\varphi(0)$ の座標をテーター常数とみなしてかまわないだろう。よって問題は $\varphi(0)$ を特徴づけること。

2. Commutative composition. P_G の点 $x = (x_a)_{a \in G}$ に対して x^{-1} で a-成分が x_{-a} となる P_G の点をあらわすとし、また $(x_{-a+b}\, y_{a+b})_{a \in G, b \in G}$ で (a, b)-成分が $x_{-a+b}\, y_{a+b}$ の $|G| \times |G|$-行列をあらわすことになる。

今 P_G の一点 e で次の性質

(7) $e_{-a} = e_a$ $(a \in G)$

をみたすもの一つ定め、固定する。e を origin となづける。

<u>定義</u> P_G の2点 $x = (x_a)_{a \in G}$, $y = (y_a)_{a \in G}$ が e に関して結合可能とは、零でない $|G|$-vector $(u_a)_{a \in G}$,

$(v_a)_{a\in G}$ があって次の性質をもつことである.

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} (e_{-a+b}\ e_{a+b})_{a\in G,\, b\in G} & (y_{-a+b}\ y_{a+b})_{a\in G,\, b\in G} \\ {}^t(x_{-a+b}\ x_{a+b})_{a\in G,\, b\in G} & (u_{-a+b}\ v_{a+b})_{a\in G,\, b\in G} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\,(e_{-a+b}\ e_{a+b})_{a\in G,\, b\in G}$$

もしかかる $(u_a)_{a\in G}$, $(v_a)_{a\in G}$ があれば $u=(u_a)_{a\in G}$, $v=(v_a)_{a\in G}$ は P_G の点として unique に x, y によって決まる（$|G|$ が奇だから）. v を $x\circ y$ とあらわすとき, x を x^{-1} でかえることによって $u=x^{-1}\circ y$ であることをしる. かくて $x\circ y$ が特別な x, y に対して定義出来た

性質: $x\circ y$ が定義可能ならば, $x^{-1}\circ y$, $e\circ x$, $x\circ e$, $y\circ x$, $x^{-1}\circ y^{-1}$ も定義可能であって

(i) $x\circ e = e\circ x = x$,

(ii) $x\circ y = y\circ x$

(iii) $(x\circ y)^{-1} = x^{-1}\circ y^{-1}$

次に2分点の概念を入れる.

<u>定義</u> e の2分点（単に2分点ともいう）とは P_G の点 $e(f)=(e_a(f))_{a\in G}$ であって次の性質をもつもの

(8) $e(f)^{-1}\circ e(f) = e(f)\circ e(f) = e$

この定義から $e(f)^{-1}=e(f)$ であることを知ることが出来る。次の二つの場合がおこる。

(i) $e_{-a}(f)=e_a(f) \quad (a\in G)$

(ii) $e_{-a}(f)=-e_a(f) \quad (a\in G)$

2分点を用いて $\mathbb{P}_G$ の closed subspace A_e を次のように定義する。

$$A_e=\{x\in \mathbb{P}_G \mid x\circ e(f) \text{ が全ての2分点 } e(f) \text{ に対して定義可能}\}$$

大問題　いかなる条件のもとで、A_e は n-次元のアーベル多様体となるか？

定理　$\varphi: u\longrightarrow(\varphi_a(u))_{a\in G}$ をアーベル多様体 A から $\mathbb{P}_G$ の中への埋込みで、ある G-theta structure (X,ρ) に対応するものとする（$|G|$: odd）。そのときもし次の仮定

「仮定：自然写像 $\{f\mid(f)+X>0\}\otimes\{f\mid(f)+X>0\}\longrightarrow\{g\mid g+2X>0\}$ が surjective」

がみたされるならば

(9)　$\varphi(u+v)=\varphi(u)\circ\varphi(v)$

ここに $\circ$ は $e=\varphi(0)$ に関する加法 $u+v$ は A 上の加法。

この定理の(9)はいわゆる加法公式にほかならない。

問題　上の仮定はいつなりたつか。

XがVery ampleであって、成り立たない例があれば、極めておもしろい。なぜならば上の加法公式と異なった加法公式が得られる。

問題　アーベル多様体Aの次元をn, 適当なdをとってGを位数dの巡回群としたとき、$A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_G$ なるCanonical rational mapで次のような場合がありうるか;

(i)　$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{P}_G$ は埋込

(ii)　$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{P}_G$ は埋込みで上の定理の仮定をみたす。

(iii)　$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{P}_G$ は everywhere define

また　$\varphi(A)$の singularity は？

3.　2分点とHeisenberg group.　今　$n = \mathrm{rank}(e_{-a+b}e_{a+b})_{a\in G, b\in G}$ とおくと、$(e_{-a+b}e_{a+b})_{a\in G, b\in G}$ は symmetric であるから $|G|\times n$-行列 Sがあって

(10)　$(e_{-a+b}e_{a+b})_{a\in G, b\in G} = S^t S$

とかける。ここにSは orthogonal n-行列Mをかけること

$$S \longrightarrow SM$$

だけの任意性をもつ．もし $\mathbb{P}_G$ の点 $x=(x_a)_{a\in G}$ に対して $e\circ x$ が定義可能なときには

$$\mathrm{rank}\,((e_{-a+b}\,e_{a+b})_{a\in G,\,b\in G}\,(x_{-a+b}\,x_{a+b})_{a\in G,\,b\in G})$$
$$=\mathrm{rank}\,(e_{-a+b}\,e_{a+b})_{a\in G,\,b\in G}$$

より $|G|\times n$－行列 T_x が unique にあって

(11) $$(x_{-a+b}\,x_{a+b})_{a\in G,\,b\in G} = S^t\,T_x$$

とかけることがわかる。また $x\circ y$ が定義可能なときには適当な零でない λ があって

$$((x^{-1}\circ y)_{-a+b}(x\circ y)_{a+b}) = \lambda\,T_x^t\,T_y$$

とかける．これは定義

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}(e_{-a+b}\,e_{a+b})(y_{-a+b}\,y_{a+b})\\ {}^t(x_{-a+b}\,x_{a+b})\,\lambda^{-1}((x^{-1}\circ y)_{-a+b}(x\circ y)_{a+b})\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{rank}\,(e_{-a+b}\,e_{a+b})$$

$$(e_{-a+b}\,e_{a+b}) = S^t S$$

より容易にたしかめられる。λ は斉次座標 $(x_a)_{a\in G}$, $(y_a)_{a\in G}$ $((x^{-1}\circ y)_a)_{a\in G}$, $((x\circ y)_a)_{a\in G}$ に関係する．

上の結果を2分点 $e(f)$ に適用してみよう．

$e(f)^{-1} \circ e(f) = e(f) \circ e(f) = e$, $e(f)^{-1} = e(f)$ であるから, 直ちに

$$S^t S = (e_{-a+b}\, e_{a+b})_{a\in G,\, b\in G} = \lambda\, T_{e(f)}{}^t\, T_{e(f)} .$$

従って S を導入したときの注意より *orthogonal* n-行列 $M_{e(f)}$ があって

$$T_{e(f)} = \sqrt{\lambda}\, S\, M_{e(f)}$$

となる。ここに $e(f) \longrightarrow \{M_{e(f)}, M_{-e(f)}\}$ なる対応が得られ, 付号をのぞいて $M_{e(f)}$ は一意的である.

$M_{e(f)}$ の性質：

(i) $e_{-a}(f) = \varepsilon_{e(f)}\, e_a(f)$ $(a \in G)$ とすれば

${}^t M_{e(f)} = \varepsilon_{e(f)} M_{e(f)}$, すなわち $M_{e(f)}^2 = \varepsilon_{e(f)} I$,

(ii) $e(f), e(g)$ 2分点で $e(f)\circ e(g)$ が定数可能でまた2分点とする. そのとき, 付号 $M_{e(f),e(g)}$ があって

$$M_{e(f)} M_{e(g)} = M_{e(f),e(g)}\, M_{e(f)\circ e(g)},$$

$$M_{e(f)} M_{e(g)} = \varepsilon_{e(f)} \varepsilon_{e(g)} \varepsilon_{e(f)\circ e(g)}\, M_{e(g)} M_{e(f)}.$$

従って2分点の集合 $\{e(f_\alpha)\}$ が加法 $\circ$ で閉じていれば行列の集合 $\{\pm M_{e(f_\alpha)}\}$ は *matrix* の群をつくる。

Δ_r で $(2,\overset{r}{\cdots},2)$－型の加法群 $\hat{\Delta}_r$ でその dual, $\langle g,\hat{g}\rangle$ を pairing $\Delta_r\times\hat{\Delta}_r\longrightarrow\{K$ の1の巾根の群$\}$（標数≠2）.

<u>定理</u>　（標数≠2）origin e が次の仮定をみたすものとする。

（i）　$rank\,(e_{-a+b}\,e_{a+b}) = 2^r$

（ii）　$\Delta_r\oplus\hat{\Delta}_r$ と同型な2分点の群（0に関する）$\{e\in(f+\hat{f})\,|\,f\in\Delta_r,\ \hat{f}\in\hat{\Delta}_r\}$ があって行列群 $\{\pm M_{e(f+\hat{f})}\,|\,f\in\Delta_r,\ \hat{f}\in\hat{\Delta}_r\}$ の center が ±1 であると仮定すると S は適当にとって $\{\pm M_{e(f+\hat{f})}\}$ を次のような Heisenberg group の unitary 表現 $\{U_{f+\hat{f}}\}$ にすることが出来る.

$$U_{f+\hat{f}} = (u_{g,h}(f+\hat{f}))_{g\in\Delta_r,\ h\in\Delta_r}$$

$$u_{g,h}(f+\hat{f}) = \langle\hat{f},g\rangle\,\delta_{g,\,h+f}\ .$$

$$S = (s_{a,g})_{a\in G,\ g\in\Delta_r}\ ,\quad T_x = (t^x_{a,g})_{a\in G,\ g\in\Delta_r}$$

$$e_{-a+b}\,e_{a+b} = \sum_{g\in\Delta_r} s_{a,g}\,s_{a,g}$$

$$e_{-a+b}(f+\hat{f})\,e_{a+b}(f+\hat{f}) = \sum_{g\in\Delta_r}\langle\hat{f},g\rangle\,s_{a,g}\,s_{b,\,g+f}$$

$$x_{-a+b}\,x_{a+b} = \sum_{g\in\Delta_r}\langle\hat{f},g\rangle\,s_{a,g}\,t^x_{b,\,g+f}$$

となる。従って2分点の群 $\{e(f+\hat{f}) \mid f\in\Delta_n, \hat{f}\in\hat{\Delta}_n\}$ の存在 + $\mathrm{rank}\,(e_{-a+b}\, e_{a+b}) = 2^n$ と次のような $|G|\times 2^n$-行列 S の存在とが同値になる。

(i) $\quad \mathrm{rank}\, S = \mathrm{rank}\, S^+ S = 2^n$,

(ii)
$$\sum_{g,g'} \langle \hat{f}, g+g' \rangle\, S_{-a+b,g}\, S_{a+b,g+f}\, S_{-c+d,g'}\, S_{c+d,g'+f}$$
$$= \sum_{g,g'} \langle \hat{f}, g+g' \rangle\, S_{-a+d,g}\, S_{a+d,g+f}\, S_{-c+b,g'}\, S_{c+b,g'+f}$$
$$(a,b,c,d\in G)$$

(i)(ii) をみたす $|G|\times 2^n$-行列 S よりつくった2分点の群を $\{e(f+\hat{f}) \mid f\in\Delta_n, \hat{f}\in\hat{\Delta}_n\}$ とする。

$$V_e = \{x\in P_G \mid x\circ e(f+\hat{f})\ (f\in\Delta_n, \hat{f}\in\hat{\Delta}_n)\ \text{は定義可能}\}$$

で定義した closed subvariety V_e については

<u>予想</u> V_e は n-次元のアーベル多様体であって，その加法は e に関する結合である。

次のことは証明出来る。

<u>定理</u> V_e は $\circ$ に関して閉じている。すなわち $(x, y) \longrightarrow x\circ y$ は $V_e\times V_e \longrightarrow V_e$ なる各点で定義可能な有理写像である。

これより V_e は group variety であることはわかるが，V_e は既約であるかどうか，次元が2より大でないかどうかはわからない。

文　献

[1] H. Morikawa : On some results on theta constants, Nagoya Math. Jour. Vol. 37 (to appear)

[2] D. Mumford : On the equations defining abelian varieties I, II, III Invent. Math 1. 287-354 (1966), 3, 75-135 (1967) 3, 215-244 (1967)

[3] D. Mumford : Lecture note on abelian varieties (Tata).