

自由境界層における有限攪乱

京大 理 巽 友 正

京大 数研 後 藤 金 英

§ 1. 序

この報告では自由境界層に導入された攪乱の発達を調べ、層流から乱流への遷移と、到達する平衡状態に関する何らかの知識を得ることを目的とする。

一般に自然遷移では、非常に多くの mode にわたって攪乱が増幅されるので、その解析には統計的処理が唯一の方法と考えられる。一方実験室では、層流に含まれる攪乱を予め可能な限り除去し、浄化した層流に既知の攪乱を導入して遷移を起させ、その機構を調べる方法が採られる。これを名付けて、強制遷移と呼ぶことにする。この場合も遷移に特徴的な現象は勿論実現される。ここで我々は、強制遷移を理想化し、攪乱を全く含まぬ層流に既知の攪乱を導入しその発達を調べることにする。勿論この場合、遷移は層流から層流へのそれであり、平衡状態は乱流ではあり得ないが、遷移機構の特徴は備えていると考える。

層流の非線型安定理論は、最近の発展にも拘らず遷移の理論的説明としては、はなはだ不満足なものでしかない。これまでに主要な理論は二つあり、一つは通常準中立攪乱理論と呼ばれ、input として十分小さな増幅率をもつ攪乱を対象とする。今一つは準線型理論と呼ばれ、そこでは input 攪乱の主流への feedback は考慮するが、higher harmonics の発生は一切省略する。これらの理論の応用は、前者に関して平面 poiseuille 流 (Reynolds & Potter, 1967; Pekeris & Shkoller, 1967), 自由流 (Gotoh, 1968, a) に、後者に関して平面 Poiseuille 流 (Meksyn & Stuart, 1951), Couette 流 (Kuwabara, 1966) について発表されている。しかし実験では、大きな増幅率をもった攪乱が幾つかの higher harmonics を伴って発達する。従ってその効果を併せ考慮した理論の展開が必要である。

この論文では、はじめに一般的な解析を三次元攪乱について行いが、具体的な計算は二次元攪乱についてのみ行い。二次元攪乱を対象とすることは、channel 流あるいは板に沿う流れの境界層のよう

に壁を伴う流れで実験的に観測される三次元攪乱と相容れない。自由流では、しかしながら、導入される攪乱が二次元的であれば、それが発達して非線型効果が現れるに至っても尚二次元性を保つことが実験的に示されている (Sato, 1960 ; Sato & Kuriki, 1961 ; Browand, 1966)。

従って計算を二次元攪乱に限って実行することは、自由流の場合には実質的に制限とはならない。

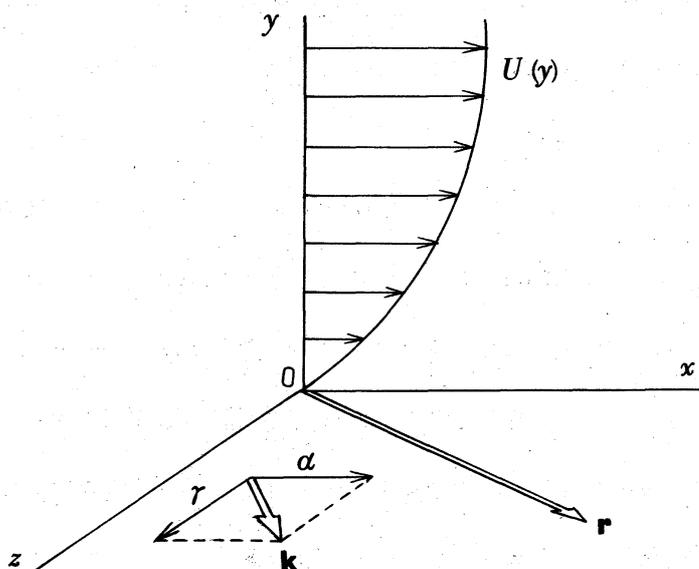
攪乱の追跡に当っては、6つの異なる波数の mode が考慮される。即ち、主流の変形を表す波数 $\alpha=0$ の mode , 線型理論ではほぼ最大増幅率をもつ $\alpha=0.5$ の mode , 高い Reynolds 数状態で中立攪乱として知られる $\alpha=1.0$ の mode , それに3つの減衰 mode $\alpha=1.5, 2.0$ と 2.5 である。これらの mode は全て位相が揃っているとする。この仮定は、全ての higher harmonics が導入攪乱によって作られるとする強制遷移では現実的であろう。

§ 2 攪乱を伴う場の Fourier 解析

この論文では主流を定常・平行流とみなす。流れに沿って x 軸, 速度勾配の方向に y 軸をとると、攪乱を伴わない流れの場は、

$$\left. \begin{aligned} \text{速度 } \mathbf{U}(\mathbf{x}) &= [U(y), 0, 0], \\ \text{圧力 } P(\mathbf{x}) &= P(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

と表わされる。



攪乱は二次元 Fourier 級数で次の形に表されるとする；

$$\left. \begin{aligned} \text{速度 } \hat{\mathbf{u}} &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(y, t) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r})], \\ \text{圧力 } \hat{p} &= \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}(t) p_{\mathbf{k}}(y, t) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r})] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここに、 $\mathbf{r} = [x, 0, z]$ 、 $\mathbf{k} = [\alpha, 0, \gamma]$ 。 $a_{\mathbf{k}}$ および $b_{\mathbf{k}}$ は、それぞれ $u_{\mathbf{k}}$ および $p_{\mathbf{k}}$ を規格化するために導入してある。(2.2)の左辺は物理量ゆえに

$$\left. \begin{aligned} a_{-\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}}^*, & b_{-\mathbf{k}} &= b_{\mathbf{k}}^*, \\ \mathbf{u}_{-\mathbf{k}} &= \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*, & p_{-\mathbf{k}} &= p_{\mathbf{k}}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

でなければならぬ。ここに、*印は複素共役を表す。攪乱を伴う流れの場合は結局

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ p(\mathbf{x}, t) &= P(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

で表される。

流体を非圧縮性流体とすれば、運動は次の方程式系に従う；

$$\text{連続の式： } \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.5)$$

運動方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

(2.4)を(2.5)および(2.6)に代入し、主流がそれ自身(2.5)・(2.6)の解であることを用いると、攪乱を支配する方程式系：

$$i(\mathbf{k} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}) + \frac{\partial v_{\mathbf{k}}}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (a_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}) + \mathbf{L}_{\mathbf{k}} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} \left[i\alpha U \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{U}}{dy} + \nu (\mathbf{k}^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \right],$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\rho} (i\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, i\gamma) b_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}},$$

$$Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \left[i \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot (\mathbf{k} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot v_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) \right]$$

が得られる。

§ 3. 線型理論

(2.8) の圧力項 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ を消去すると、渦度方程式：

$$\begin{aligned} & \left[U + \frac{1}{i\alpha} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{i\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mathbf{k}^2 \right) \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mathbf{k}^2 \right) v_{\mathbf{k}} - \frac{d^2 U}{dy^2} a_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \\ & = \frac{1}{i\alpha} \sum_{\mathbf{k}'} \left[i \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{k} Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}) + \mathbf{k}^2 Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

が得られる。(3.1) の右辺は攪乱について左辺より一次高次であるから、攪乱が微弱な場合には右辺を省略してよい。線型化方程式の解を、

$$a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(0)} \exp[\sigma(\mathbf{k})t], \quad \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(y, t) = \mathbf{u}^{(0)}(y) \quad (3.2)$$

として求めよう。 $a_{\mathbf{k}}^{(0)}$ および $\sigma(\mathbf{k})$ は定数。(3.2) を (3.1) で右辺を 0 とした式に代入すると、

$$\left[U + \frac{\sigma}{i\alpha} - \frac{\nu}{i\alpha} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \mathbf{k}^2 \right) \right] \left(\frac{d^2}{dy^2} - \mathbf{k}^2 \right) v_{\mathbf{k}}^{(0)} - \frac{d^2 U}{dy^2} v_{\mathbf{k}}^{(0)} = 0, \quad (3.3)$$

が得られるが、これは線型理論における Orr-Sommerfeld 方程式に他ならぬ。

自由境界層の安定性の研究では主流の速度分布を

$$U(y) = \tanh y \quad (3.4)$$

で近似することにより、理論的解析が可成り簡単化されることが知られている。事実この速度分布を用いていくつかの研究が行われた (Betchov & Szewczyk, 1963; Michalke, 1964; Tatsumi, Gotoh & Ayukawa, 1964; Gotoh, 1965)。これらの研究では二次元攪乱のみが取扱われているが、それは Squire の変換でこれから容易に三次元攪乱の安定特性が得られるからである。(3.4) に対する二次元攪乱の線型安定特性を要約すると次のようになる。

(1) すべての α および Reynolds 数 R に対して、 $\sigma(\alpha)$ は実数値をとる。その結果 $v_{\alpha}^{(0)}$ は y に関して反エルミート対称性をもつ。

(2) すべての R に対して、 α に臨界値 α_c があり、 $\alpha < \alpha_c$ の擾乱は増幅し、 $\alpha > \alpha_c$ の擾乱はすべて減衰する。従って、いわゆる臨界 Reynolds 数 R_c は $R_c = 0$ である。

(3) α_c は $R = 0$ に対する $\alpha_c = 0$ から R と共に単調に増大し、 $R = \infty$ で有限値 $\alpha_c = 1$ に漸近する。 $R > 1000$ に対しては、安定特性は殆んど R に依らない。これらの結果は図 2, 3 に示される。

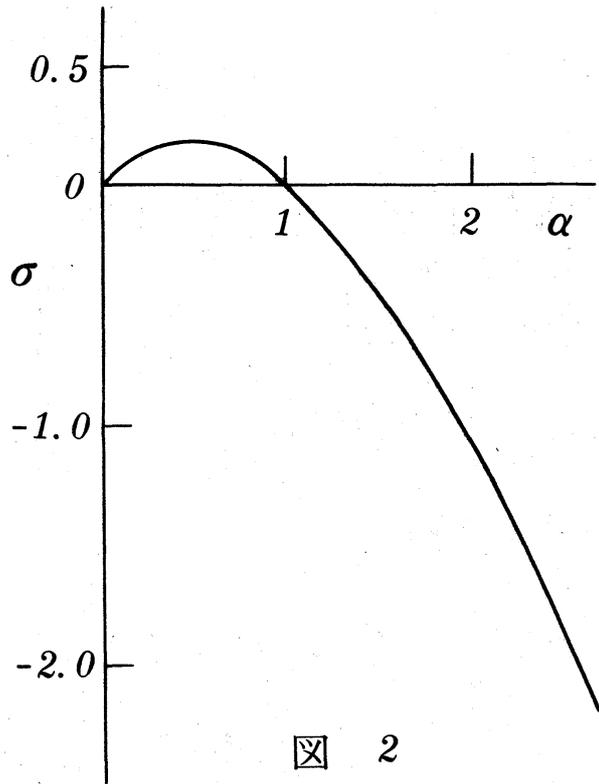


図 2

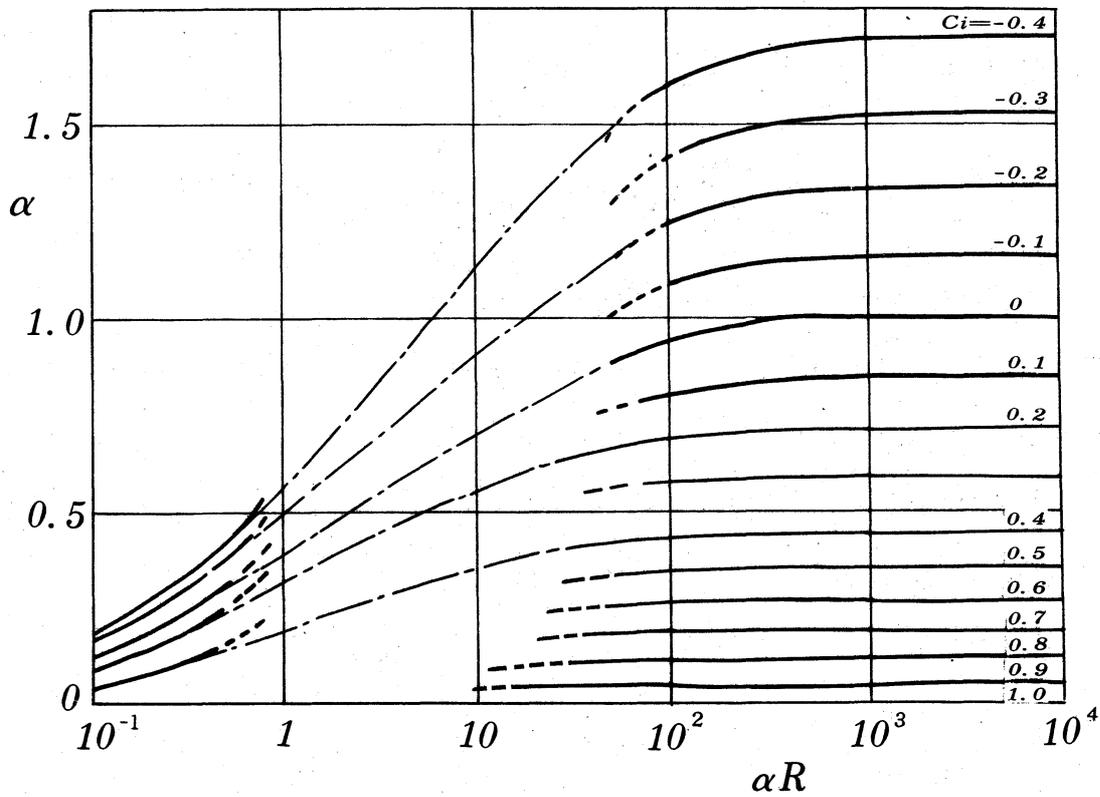


図 3

§ 4. エネルギー方程式と振幅方程式

(2.8) に $a_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^*$ をかけ、その複素共役をとり、両者を加え、 y について $-\infty$ から ∞ まで積分すると次の式が得られる；

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{k}) + L_1(\mathbf{k}) = -\sum_{\mathbf{k}'} Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (4.1)$$

$$E(\mathbf{k}) = |a_{\mathbf{k}}|^2 F(\mathbf{k}),$$

$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} |u_{\mathbf{k}}|^2 dy,$$

$$L_1(\mathbf{k}) = |a_{\mathbf{k}}|^2 M(\mathbf{k}),$$

$$M(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dU}{dy} (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + 2\nu \left(\left| \frac{\partial u_{\mathbf{k}}}{\partial y} \right|^2 + k^2 |u_{\mathbf{k}}|^2 \right)) \right] dy$$

$$Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + C.C.,$$

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int_{-\infty}^{\infty} \left[i (u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}) (k u_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} - \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^*}{\partial y} u_{\mathbf{k}'}) v_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \right] dy.$$

ここで $C.C.$ はその前に現れた項の複素共役をとった項を意味する。

(4.1) は二次元波数 \mathbf{k} についてのエネルギー平衡を表す。 $\frac{1}{2} E(\mathbf{k})$ をエネルギー・スペクトルと呼ぶ。 $M(\mathbf{k})$ の第一項は主流から攪乱のこの mode へのエネルギー流入を、第二項は粘性消散を表す。 $G(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ は異なる波数の mode 間のエネルギーの流れを表し、エネルギー輸送函数と呼ばれる。

$Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ が対称性：

$$Q_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$$

をもつから、

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} [Q_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + Q_1(\mathbf{k}', \mathbf{k})]$$

$$= 0,$$

となり、全波数にわたるエネルギーの増減には此の項は関与しない。この事は一様乱れの理論で既によく知られた事実である。又(4.1)に圧力項がないのは、これも一様乱れの理論で知られた結果であって、 $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ の異なる方向成分の間のエネルギー輸送にのみ圧力が関与して、波数 \mathbf{k} の mode に属するエネルギーを保持するからである。

(4.1)式をもっと簡単にする目的で、ここで我々は $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(y, t)$ に線型方程式の解 $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{(0)}(y)$ を用いるという近似を採用し、これを準線型近似と呼ぼう。(4.1)はこの近似のもとで、

$$F^{(0)}(\mathbf{k}) \frac{d}{dt} |a_{\mathbf{k}}|^2 + M^{(0)}(\mathbf{k}) |a_{\mathbf{k}}|^2$$

$$= - \sum_{\mathbf{k}'} [a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} G^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + C. C.] \quad (4.3)$$

となる。ここに、肩文字 (0) は各表現の $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(y, t)$ を $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{(0)}(y)$ でおきかえた表現を意味する。

$\exp[\sigma(\mathbf{k})t] \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{(0)}$ が線型方程式の解であるから、

$$[\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(-\mathbf{k})] F^{(0)}(\mathbf{k}) + M^{(0)}(\mathbf{k}) = 0. \quad (4.4)$$

従って、(4.3)式は(4.4)を用いて、

$$\frac{d}{dt} |a_{\mathbf{k}}|^2 = [\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(-\mathbf{k})] |a_{\mathbf{k}}|^2$$

$$- \frac{1}{F^{(0)}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{k}'} [a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} G^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + C. C.], \quad (4.5)$$

となる。

(4.5)の右辺は各 mode の振幅のみならずその位相をも含んでいるから、(4.5)はそれ自身閉じていない。しかし強制遷移では、higher harmonics は全て input mode の励起によって発生し、input mode と同位相であるか或は位相差 π をもつ。input mode の $a_{\mathbf{k}}$ は一般性を失うことなく実数にとり得るから、higher harmonics の $a_{\mathbf{k}}$ も実数としてよい。この論文ではこの位相関係が遷移の全過程を通じて成立すると仮定し、これをreal amplitudeの仮定と呼

ぶことにする。この仮定のもとに (4.5) は,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{k}) + \sigma(-\mathbf{k})] a_{\mathbf{k}} \\ &\quad - \frac{1}{2F^{(0)}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} [G^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + C. C.], \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。この式は振幅のみを含み、振幅方程式と呼ぶことにする。(4.6)は初期条件:

$$a_{\mathbf{k}} = \begin{cases} I, & \mathbf{k} = \mathbf{k}_0; \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases}$$

のもとに解かれる。但し, \mathbf{k}_0 は input mode の波数を表す。

§ 5. 二次元攪乱

$$\mathbf{k} = (\alpha, 0, 0), \quad \mathbf{u}_{\alpha} = (u_{\alpha}, v_{\alpha}, 0) \quad (5.1)$$

で定義される二次元攪乱に対しては、連続式 (2.7) から \mathbf{u}_{α} は流れ函数 ϕ (厳密には流れ函数の Fourier 振幅函数) を用いて

$$u_{\alpha} = d\phi_{\alpha}/dy, \quad v_{\alpha} = -i\alpha\phi_{\alpha}, \quad (5.2)$$

と表される。(5.2)を(4.2)に代入すると, $F(\mathbf{k})$ および $G(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ は幾分か簡単になる;

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [|d\phi_{\alpha}/dy|^2 + \alpha^2 |\phi_{\alpha}|^2] dy, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} G(\alpha, \alpha') &= -i \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha d\phi_{\alpha}^*/dy (d^2\phi_{\alpha'}/dy^2 + \alpha'^2 \phi_{\alpha'}) \\ &\quad + \alpha' d\phi_{\alpha'}/dy (d^2\phi_{\alpha}^*/dy^2 + \alpha^2 \phi_{\alpha}^*)] \phi_{\alpha-\alpha'} dy. \end{aligned} \quad (5.4)$$

§ 3(3)で注意したように、線型理論の結果は高 Reynolds 数状態では殆んど R によらないから、

(5.3) および (5.4) の ϕ_{α} に非粘性の極限での ϕ_{α} を近似的に用いてよからう。(3.3)で $\nu \rightarrow 0$

とすると, ϕ_{α} を支配する方程式は,

$$(U-c)(d^2/dy^2 - \alpha^2)\phi_{\alpha} - d^2U/dy^2 \phi_{\alpha} = 0, \quad (5.5)$$

となる。ここに $c = -\sigma/i\alpha$ 。(3.3)から(5.5)への極限移行の有効範囲は、複素 z 面の虚軸の

$z > c$ の部分を含む内部摩擦層の外側であることが、既に線型理論で知られている。

ϕ_α の境界条件は勿論、

$$\phi_\alpha(\infty) = \phi_\alpha(-\infty) = 0. \quad (5.6)$$

(5.5)・(5.6)の解は、数値的には割に容易に求め得る。ここでは解法は省略し、 c の固有値についての結果のみ表Iと図3に示す。解法については、この研究の本論文、或はMichalke(1964)又はGotoh(1968, b)を参照されたい。固有値が定まれば、 y の実数値に対して(5.5)・(5.6)に従う ϕ_α を求めることは容易である。

表I. Eigenvalues of c_i

α	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
c_i	0.37502	0	-0.28686	-0.53439	-0.76159

ここで $\alpha=0$ のmodeについて述べねばならない。 $\alpha=0$ に対しては(3.3)式は解 $\phi_0 \equiv 0$ しか許さない。しかるに平均流の速度分布が主流のそれと異なることは実験的に知られた事実で、何らかの形で u_0 を考慮に入れる必要がある。そこで、 u_0 の函数形を決めるのに、input攪乱自体の非線型相互作用で u_0 が出来ると考える。この事は u_0 の発生初期では確かに事実である。(2.8)の右辺非線型項の中のinput modeだけを残すと、 $u_0^{(0)}$ を決る式が次のように求まる。

$$\begin{aligned} & [\sigma(\alpha_0) + \sigma^*(\alpha_0)] u_0^{(0)} - \nu d^2 u_0^{(0)} / dy^2 \\ & = -Nd(u_{\alpha_0} v_{\alpha_0}^* + C.C.) / dy, \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここに N は $u_0^{(0)}$ の規格化定数。(5.7)は非粘性の場合には

$$\phi_0 = (N/2c\alpha_0)(\phi_{\alpha_0}^* d\phi_{\alpha_0}/dy - \phi_{\alpha_0} d\phi_{\alpha_0}^*/dy), \quad (5.8)$$

となる。(5.7)あるいは(5.8)の ϕ_{α_0} の ϕ_0 へのfeedbackの形は、準線型理論で使用されたそれと同形である。

以上のようにして求めた ϕ_α を(5.3)・(5.4)に代入し数値積分を実行すると $F(\alpha)$ および $G(\alpha, \alpha')$ が表IIに示すように求まる。但し $\alpha_0=0.5$ とし、それに応じて $N=0.4782$ である。積分に際して、内部摩擦層は $y=0$ に収縮し積分には寄与しないとした。 ϕ_α のエルミット対称性の故に、 $G(\alpha, \alpha')$ は実数値をとる。

表 Ⅱ
Values of $F(\alpha)$

α	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(\alpha)$	1.6402	2.0705	2.6667	0.52668	0.14748	0.053851

Values of $G(\alpha, \alpha')$

$\alpha \backslash \alpha'$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.5	0.34628	-6.9602	-0.37064	5.0943	14.742	***
2.0	0.49550	-5.8856	0.10652	9.4522	**	-14.742
1.5	0.69034	-4.8286	2.1541	**	-9.4522	-5.0943
1.0	0	-0.84538	**	-2.1541	-0.10652	0.37064
0.5	-0.64309	**	0.84538	4.8286	5.8856	6.9602
0.0	**	0.64309	0	-0.69034	-0.59550	-0.34628
-0.5	-0.64309	**	-0.50237	0.14933	0.37842	
-1.0	0	0.50237	**	-0.096960		
-1.5	0.69034	-0.14933	0.096960			
-2.0	0.49550	-0.37842				
-2.5	0.34628					

§ 6. 振幅スペクトル

$\alpha=0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ および 2.5 の 6 つの mode の追跡に、方程式系 (4.6) のはじめの 6 式が用いられる。表 Ⅱ の $F(\alpha)$, $G(\alpha, \alpha')$ をこれらの式に代入すると

$$da_0/dt = 0.37502 a_{0.5}^2 - 0.40256 a_{1.5}^2 - 0.28894 a_{2.0}^2 - 0.20193 a_{2.5}^2,$$

$$da_{0.5}/dt = 0.18751 a_{0.5} - 0.64948 a_0 a_{0.5} + 0.20415 a_{0.5} a_{1.0} + 1.0447 a_{1.0} a_{1.5} + 1.4574 a_{1.5} a_{2.0} + 1.7722 a_{2.0} a_{2.5},$$

$$\begin{aligned}
 da_{1.0}/dt &= -0.15851 a_{0.5}^2 - 0.30969 a_{0.5} a_{1.5} \\
 &\quad - 0.019973 a_{1.0} a_{2.0} + 0.051314 a_{1.5} a_{2.5}, \\
 da_{1.5}/dt &= -0.43029 a_{1.5} + 2.7407 a_0 a_{1.5} \\
 &\quad - 2.5391 a_{0.5} a_{1.0} - 9.1151 a_{0.5} a_{2.0} \\
 &\quad - 4.7442 a_{1.0} a_{2.5}, \\
 da_{2.0}/dt &= -1.0688 a_{2.0} + 7.0254 a_0 a_{2.0} + 0.36115 a_{1.0}^2 \\
 &\quad + 12.092 a_{0.5} a_{1.5} - 51.265 a_{0.5} a_{2.5}, \\
 da_{2.5}/dt &= -1.9040 a_{2.5} + 13.446 a_0 a_{2.5} + 43.859 a_{1.0} a_{1.5} \\
 &\quad + 72.254 a_{0.5} a_{2.0}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

となる。ここで $\alpha \geq 3.0$ の波数の higher harmonics は、全部無視した。

(6.1) は input mode の初期値に種々の値を用いて解かれたが、代表的な次の3つの場合をここに呈示する。即ち、

$$I = \begin{cases} 0.007, \\ 0.02, \\ 0.07, \end{cases} \quad \text{或は } E(0.5) = \begin{cases} 0.0001, \\ 0.001, \\ 0.01. \end{cases} \tag{6.2}$$

数値積分は Runge-Kutta-Gill 法で行い、京大数理研の電算機 TOSBAC 3400 を使った。

結果を図5に示す。この図から、次の諸点が指摘され得る。

(1) すべての mode が初期段階で増幅する (図4a)。線型理論では減衰する筈の mode でさえ増幅するのは、導入攪乱の存在に依りその安定特性が影響されるからである。このことは (6.1) の a_0 を含む非線型項の寄与を見れば明らかである。

(2) 非線型効果が現れて、各 mode の増幅が止まったあとで振幅に振動が現れる (図4b)。この計算では higher harmonics の列を有限個で切りすてているから、その端で起るエネルギーの反射がこの振動を生ずると見られる。input mode から higher harmonics へのエネルギーの流れは直ちに平衡状態に達するのではなく、エネルギー再配分のための低い mode へのエネルギーの

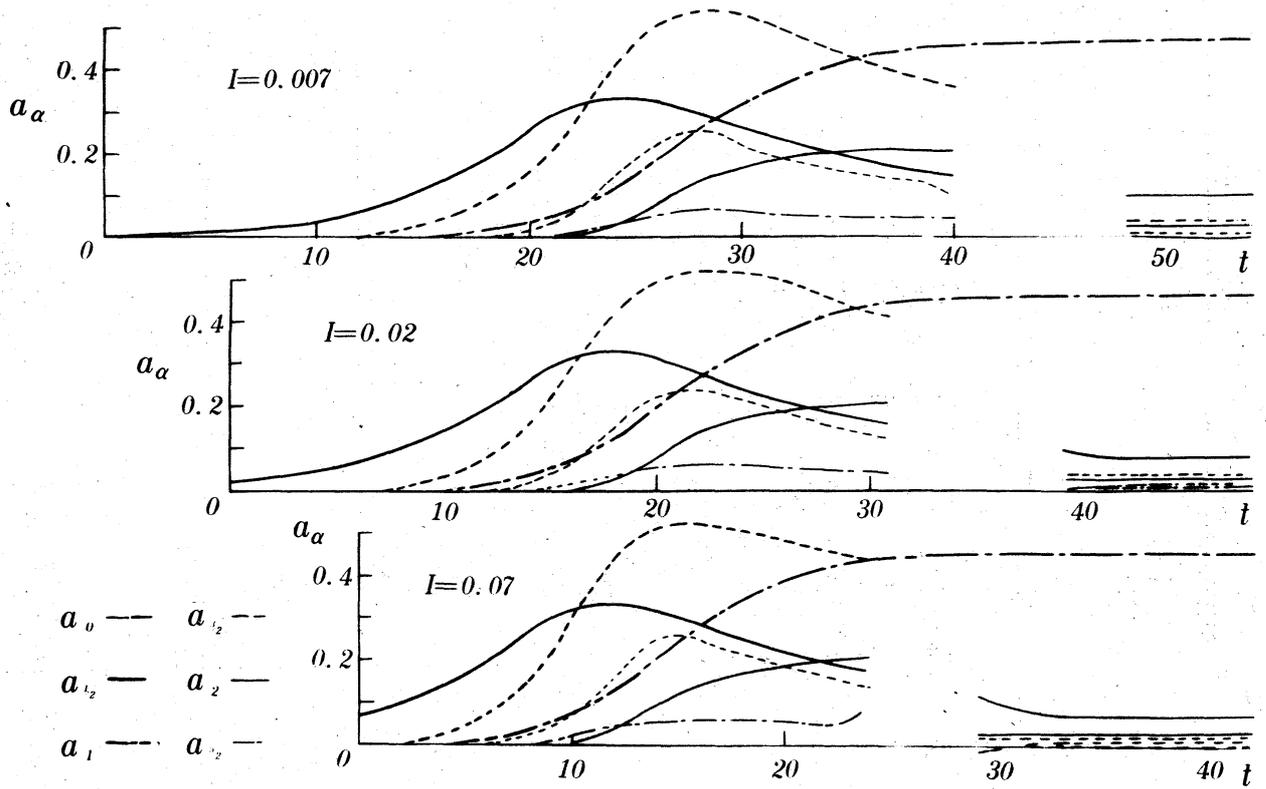


图 4(a)

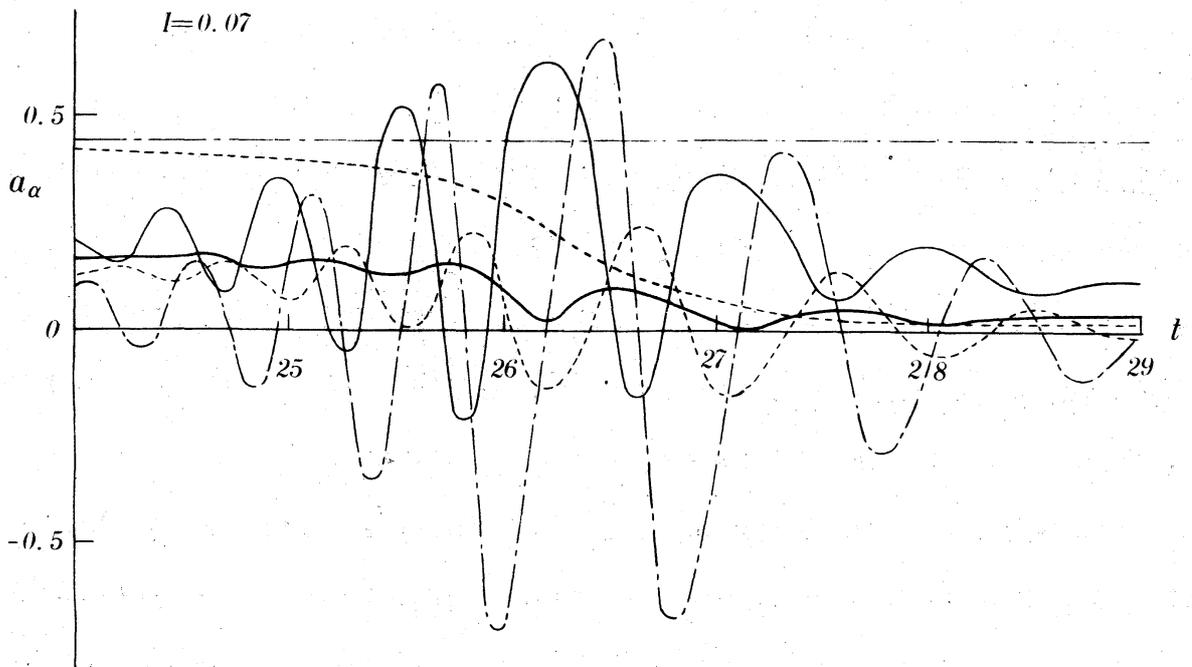


图 4(b)

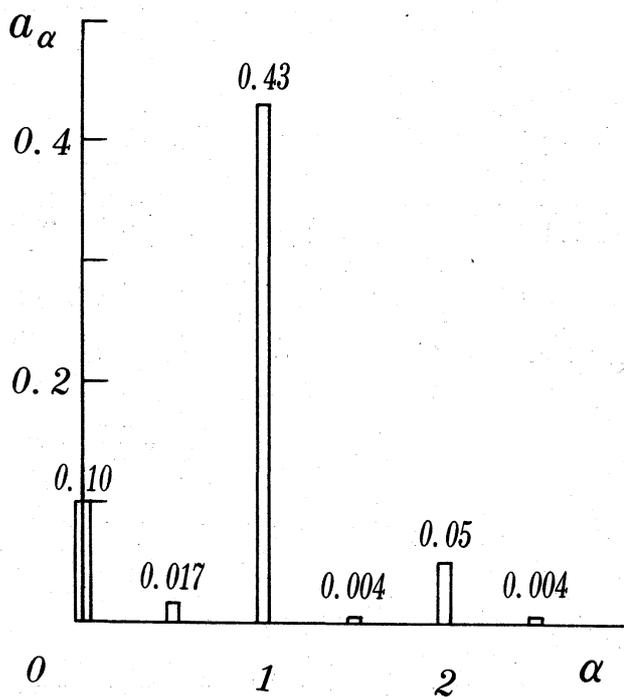


図 5

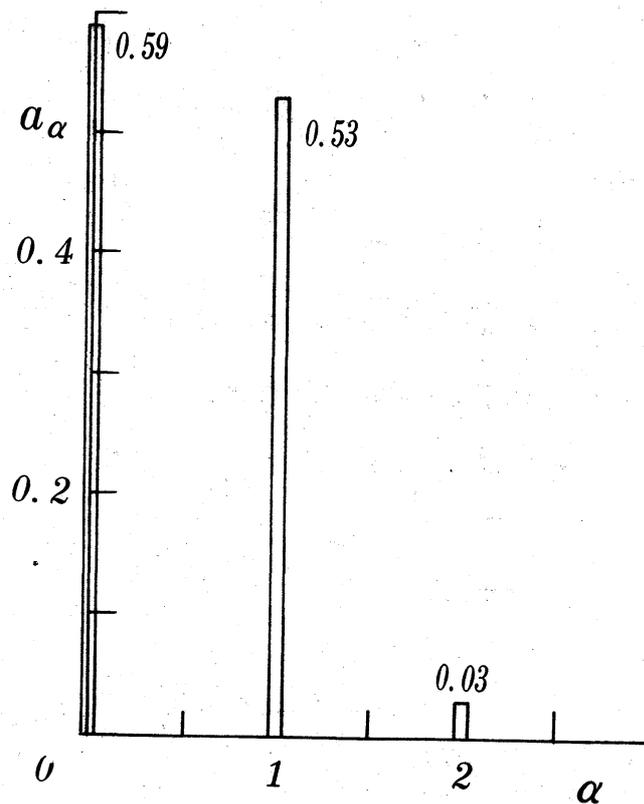


図 6

流れが生じ、高いmodeの振幅に振動が発生する。

(3) (2)でのべた振動は割に短時間で消失し、図5に示すような平衡振幅スペクトルに到達する。

(4) 平衡状態の振幅のみならず、higher harmonicsの成長および振動の発生も含めて全てinputの初期値には依存しない。

(5) 数値計算は全て積分の時間間隔のとり方に依存しない。このことは振動部分についても成立する。つまりこの振動はRunge-Kutta-Gill法の不安定性に依るのでなく、方程式系(6.1)の解の真の振舞を示していると思われる。

以上の特性は、(6.1)に考慮したmodeの数には無関係であると思われる。方程式系に(6.1)の初めの5つをとり、 $a_{2.5} \equiv 0$ とした5成分系の場合の解にも、定性的に上記(1)~(5)の特性が再び見られる。図6の平衡状態の振幅スペクトルは、従って、6成分系のそれと量的に異なる。この特性を更に確認し、且つ何か平衡状態での振幅スペクトルの決定版を得るには、更に一つhigher harmonicsを入れた計算をするのが常道である。しかしその系には、新しく加った $G(\alpha, \alpha')/F(\alpha)$ のいくつかが大ききな値をもって入ってくるので数値積分は困難となり平衡スペクトルは得られなかった。

G/F の値が大きいため、追加された mode の振幅は小さいと思われるが、lower mode の振幅スペクトルは多少とも影響を受けるかもしれない。

§ 7. 議 論

エネルギー・スペクトルは § 4 の定義により $\frac{1}{2} E(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot F(\alpha) a_\alpha^2$ で与えられるから、平衡状態のそれは図 6 の数値を用いて表 III に示すようになる。

攪乱速度の二乗平均 $u_{m.s.}$ は

$$\begin{aligned} u_{m.s.} &= \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\alpha}{2Y} a_\alpha^2 \\ &= \frac{F_0}{2Y} a_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{F_\alpha}{Y} a_\alpha^2, \end{aligned} \quad (7.1)$$

で与えられる。但し $\langle \rangle$ は x, y についての平均を意味し、攪乱が実質的な値をもつのは $|y| < Y$ の範囲とする。そうすると二乗平均スペクトルの平方根 $u_{r.m.s.}(\alpha)$ は

$$u_{r.m.s.}(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{F_0/2Y} a_0, & \alpha = 0 ; \\ \sqrt{F_\alpha/Y} a_\alpha, & \text{その他の } \alpha, \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

となる。 $Y=2$ ととり、統計的等方性 $u_{r.m.s.}(\alpha) = v_{r.m.s.}(\alpha)$ を仮定すれば、 $u_{r.m.s.}$ は無次元形で

$$\frac{u_{r.m.s.}(\alpha)}{U(\infty) - U(-\infty)} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{F_0/2} a_0/4, & \alpha = 0 ; \\ \sqrt{F_\alpha} a_\alpha/4, & \text{その他の } \alpha, \end{array} \right\} \quad (7.3)$$

と表され、その値は表 IV のようになる。

表 III Equilibrium energy spectrum in six modes system

	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$E(\alpha)/2$	0.0080	0.0003	0.250	0.0000	0.0002	0.0000

表Ⅳ Spectrum of $u_{r.m.s.} / [U(\infty) - U(-\infty)]$

α	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\frac{u_{r.m.s.}}{U(\infty) - U(-\infty)}$	0.023	0.006	0.170	0.001	0.005	0.000

この研究の1つの動機に Browand の実験があった。しかし彼の実験では導入攪乱の半分の波数の mode (通常 subharmonic と呼ばれる) が higher harmonics の成長に本質的役割を演じているように見える。従って、この論文の結果と比較すべき意味をもたない。subharmonics の発生については幾つかの論文があるが、我々は subharmonics は初期値を与えられた時に限って発達し得るものであり、且つ、遷移の過程に本質的ではないと信じる。subharmonics を伴わない実験が望まれる。

subharmonic $a_{0.25}$ とその higher harmonics を含む方程式系を解く試みも、再び $G(\alpha, \alpha') / F(\alpha)$ に大きな値が現れて、結果は得られなかった。この論文で考慮しなかった高い harmonics をうまく採り入れる仕事が残された課題であろう。

文 献

- 1) W. C. Reynolds and M. C. Potter (1967) J. Fluid Mech. 27, p465.
- 2) C. L. Pekeris and B. Shkoller (1967) J. Fluid Mech. 29, p31.
- 3) K. Gotoh (1968, a) J. Phys. Soc. Japan 24, p1137.
- 4) D. Meksyn and J. T. Stuart (1951) Proc. Roy. Soc. A208, p517.
- 5) S. Kuwabara (1966) Supplement to Phys. Fluids 1967, p
- 6) H. Sato (1960) J. Fluid Mech. 7, p53.
- 7) H. Sato and K. Kuriki (1961) J. Fluid Mech. 11, p321.
- 8) F. K. Browand (1966) J. Fluid Mech. 26, p281.
- 9) R. Betchov and A. Szewczyk (1963) Phys. Fluids 6, p1391.
- 10) A. Michalke (1964) J. Fluid Mech. 19, p543.
- 11) T. Tatsumi, K. Gotoh and K. Ayukawa (1964) J. Phys. Soc. Japan 19, p1966.
- 12) K. Gotoh (1965) J. Phys. Soc. Japan 20, p164.
- 13) K. Gotoh (1968, b) J. Phys. Soc. Japan 25, p1178.